TD - Martingales 2

Exercice 1.

Soit (X_n) une suite de v.a.r. centrées indépendantes et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On suppose que $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k^2] < \infty$.

1. Montrer que (S_n) converge dans L^2.

2. Montrer que (S_n) converge p.s.

Exercice 2. Théorème des trois séries, condition suffisante

Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes. Pour $a > 0$, on pose $Y_n^a = X_n \mathbf{1}_{|X_n| \leqslant a}$.
On suppose qu'il existe $a > 0$ tel qu'on ait convergence des trois séries

$$\sum \mathbb{P}(|X_n| > a) \qquad \sum \mathbb{E}[Y_n^a] \qquad \sum \mathrm{Var}(Y_n^a) \ .$$

1. Montrer que la série $\sum (Y_n^a - \mathbb{E}[Y_n^a])$ converge p.s.

2. En déduire que $\sum Y_n^a$ converge p.s.

3. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} \{X_n \neq Y_n^a\}) = 0$.

4. En déduire que $\sum X_n$ converge.

Exercice 3. Processus de Galton-Watson

Soit $(\xi_{n,j})_{n,j\in\mathbb{N}}$ une famille de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ i.i.d. de loi μ d'espérance $m < \infty$.
On suppose que $\mu \neq \delta_1$ et $\mu \neq \delta_0$.
On définit une suite X_n en posant $X_0 = \ell \in \mathbb{N}^*$ puis par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = \sum_{j=1}^{X_n} \xi_{n,j} \ .$$

On considère aussi la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(\ \xi_{k,j}\ ,\ 1 \leqslant k < j\ ,\ j \in \mathbb{N}\ )$.

1. Montrer que $(m^{-n} X_n)$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

2. En déduire que $(m^{-n} X_n)$ converge p.s. vers une v.a. Z finie p.s.

3. Supposons $m < 1$. Montrer qu'alors on a p.s. $X_n = 0$ à partir d'un certain rang.

4. Supposons $m > 1$ et que les $\xi_{n,j}$ admettent une variance σ^2.
 a. Montrer que $(m^{-n} X_n)$ est bornée dans L^2.
 b. Montrer que $\mathbb{E}[Z] = \ell$.
 c. En déduire que $\mathbb{P}(Z > 0) > 0$.