Université de Bordeaux **Mathématiques**
Préparation à l'agrégation, Option A **Année 2018/2019**

TD - Martingales 1 - Corrigé

Exercice 1.

D'abord, on remarque qu'avec les hypothèses, on a bien que $\varphi(X_n)$ est intégrable et $\mathcal{F}_n$-mesurable.

1. De plus, pour tout n, avec l'inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelles,

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \geqslant \varphi(\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]) = \varphi(X_n)$$

ce qui prouve que $(\varphi(X_n))$ est une sous-martingale.

2. Comme (X_n) est une sous-martingale,

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geqslant X_n$$

et puisque φ est croissante,

$$\varphi(\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]) \geqslant \varphi(X_n)\ .$$

Enfin, en utilisant l'inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelles, il vient

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \geqslant \varphi(\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]) \geqslant \varphi(X_n)\ ,$$

ce qui prouve que $\varphi(X_n)$ est une sous-martingale.

3. Comme $x \mapsto x^2$ est convexe, la question 1 assure que (X_n^2) est une sous-martingale.

4. Comme $x \mapsto x_+$ est croissante et convexe, la question 2 assure que (X_n^+) est une sous-martingale.

Exercice 2.

Exercice 3.

Exercice 4. Identité de Wald

Commençons par rappeler que $\mathbb{E}[T] < \infty$ implique que $T < \infty$ p.s.

1. D'abord, S_n est intégrable comme somme de v.a. intégrables, donc M_n est intégrable. De plus, M_n est bien mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n$. Ensuite, pour tout n,

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_{n+1} - (n+1)m|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} - m + M_n|\mathcal{F}_n] = M_n + \mathbb{E}[X_{n+1} - m|\mathcal{F}_n]$$

car M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable. De plus, les X_i étant indépendantes, X_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$ et donc $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}] = m$. Ainsi $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$ et donc (M_n) est une martingale.

2. Comme T est un temps d'arrêt, $(M_{n\wedge T})$ est encore une martingale. Donc

$$\mathbb{E}[M_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[M_0] = S_0 = 0$$

ce qui se réécrit

$$\mathbb{E}[S_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[(n\wedge T)m] = m\,\mathbb{E}[n \wedge T]\ .$$

3. **a.** Déjà $n \wedge T$ croît vers T donc par convergence monotone $\mathbb{E}[n \wedge T] \to \mathbb{E}[T]$. De plus, comme les X_i sont positives, $(S_{n\wedge T})$ croît vers S_T donc par convergence monotone, $\mathbb{E}[S_{n\wedge T}] \to \mathbb{E}[S_T]$. En passant à la limite dans l'égalité de la question précédente, il vient

$$\mathbb{E}[S_T] = m\mathbb{E}[T]\ .$$

En particulier, $\mathbb{E}[S_T] < \infty$.

b. Le cas positif (appliqué à $|X_i|$ au lieu de X_i) montre que $Y_T \in L^1$ (avec $\mathbb{E}[Y_T] = \mathbb{E}[|X_i|]\mathbb{E}[T]$). De plus pour tout n

$$|S_{n\wedge T}| = |\sum_{i=1}^{n\wedge T} X_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n\wedge T} |X_i| \leqslant \sum_{i=1}^{T} |X_i| = Y_T \ .$$

Comme on a aussi $S_{n\wedge T} \to S_T$ (car $T < \infty$ p.s.), le théorème de convergence dominée assure que

$$\mathbb{E}[S_{n\wedge T}] \longrightarrow \mathbb{E}[S_T] \ .$$

Par ailleurs on a encore $\mathbb{E}[n \wedge T] \to \mathbb{E}[T]$ par convergence monotone. Finalement,

$$\mathbb{E}[S_T] = m\mathbb{E}[T]$$

et en particulier S_T est intégrable.

Exercice 5.

Exercice 6. Urne de Polya

1. Comme S_n désigne le nombre de boules rouges avant le n-ième et que $X_i = 1$ si l'on a tiré une boule rouge au $i-1$-ième tirage ($X_1 = 0$ pour $i = 1$), on a

$$S_n = 1 + X_1 + \ldots + X_n \ .$$

2. D'abord, il est clair que S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, donc M_n aussi. De plus $0 \leqslant M_n \leqslant 1$, donc M_n est intégrable. Enfin, pour tout n,

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \frac{1}{n+2}\left(\mathbb{E}[S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\right) = \frac{S_n}{n+2} + \frac{1}{n+2}\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \ .$$

Or, conditionnellement à $\mathcal{F}_n$, X_{n+1} suit la loi de Bernoulli de paramètre M_n. Par suite,

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n\frac{n+1}{n+2} + \frac{M_n}{n+2} = M_n \ .$$

Cela prouve que (M_n) est une martingale.

Attention : dans cette question, il ne fallait surtout pas dire que X_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$. En effet, la loi conditionnelle de X_{n+1} dépend clairement de M_n (proportion de boules rouges dans l'urne).

3. (M_n) est une martingale à valeurs dans $[0, 1]$ donc elle est clairement bornée dans L^1. Le théorème du cours assure qu'elle converge p.s. vers une v.a. M_∞. De plus, comme $|M_n| \leqslant 1$, le théorème de convergence dominée assure qeu $M_n \to M_\infty$ dans L^2 (et même dans tous les L^p, $p < \infty$).

4. On a

$$\frac{\text{nb de boules rouges}}{\text{nb de boules blanches}} = \frac{S_n}{n+1-S_n} = \frac{M_n}{1-M_n} \longrightarrow \frac{M_\infty}{1-M_\infty} \in [0, \infty] \ .$$

5. Pour $n = 1$, on a $S_1 = 1$ qui suit bien la loi uniforme sur $\{1\}$. Supposons maintenant que pour $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$. Alors

$$P(S_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(S_n = 1, X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0|S_n = 1)\mathbb{P}(S_n = 1) = \left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} \ .$$

Ensuite, pour $k \in \{2, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{n+1} = k) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1|S_n = k-1)\mathbb{P}(S_n = k-1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 0|S_n = k)\mathbb{P}(S_n = k) \\ &= \left(\frac{k-1}{n+1}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{n+1-k}{n+1}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \ .\end{aligned}$$

Par déduction, on a aussi $\mathbb{P}(S_{n+1} = n+1) = \frac{1}{n+1}$. Ainsi S_{n+1} suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n+1\}$.

Le principe de récurrence permet de conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

6. La suite M_n converge en loi vers la loi uniforme sur $[0, 1]$. En effet, pour toute $f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{E}[f(M_n)] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n+1}\right) \longrightarrow \int_0^1 f(t)dt$$

car on a affaire à une somme de Riemann pour une fonction continue. Comme $M_n \to M_\infty$ p.s. on a aussi $M_n \to M_\infty$ en loi et donc M_∞ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 7. Processus autorégressif