Université de Bordeaux **Mathématiques**
Préparation à l'agrégation, Option A **Année 2018/2019**

TD - Martingales 1

Exercice 1.

Soit (X_n) un processus adapté à une filtration $\mathcal{F}$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ convexe.
On suppose que $\mathbb{E}[\varphi(X_n)] < \infty$ pour tout n.

1. Supposons que (X_n) est une martingale. Montrer que $(\varphi(X_n))$ est une sous-martingale.

2. Supposons que (X_n) est une sous-martingale et que φ est croissante.
Montrer qu'alors $(\varphi(X_n))$ est une sous-martingale.

3. Supposons que (X_n) est une martingale et $X_n \in L^2$ pour tout n. Que dire de X_n^2 ?

4. Supposons que (X_n) est une sous-martingale. Que dire de $X_n^+ = \max(X_n, 0)$?

Exercice 2.

Soit $(X_n)_{n>0}$ une suite de v.a. i.i.d. Soit $u \in \mathbb{R}$ tel que $g(u) := \mathbb{E}[e^{uX_1}] < \infty$.
Montrer que $Y_n = g(u)^{-n} \exp\left(u \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ est une martingale.

Exercice 3.

Soit (Y_n) une suite de v.a. i.i.d. centrées de variance $\sigma^2 < \infty$.
Montrer que $X_n = \left(\sum_{k=0}^{n} Y_k\right)^2 - (n+1)\sigma^2$ est une martingale.

Exercice 4. Identité de Wald

Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de v.a. i.i.d. intégrables d'espérance m. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \ .$$

On considère la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Soit T un temps d'arrêt tel que $\mathbb{E}[T] < \infty$.

1. On pose $M_n = S_n - nm$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[S_{n\wedge T}] = m\,\mathbb{E}[n \wedge T]$.

3. On veut montrer que S_T est intégrable et que $\mathbb{E}[S_T] = m\mathbb{E}[T]$.
a. Commençons par supposer que les X_i sont $\geqslant 0$. Montrer la propriété dans ce cas.
b. Revenons au cas général et posons $Y_n = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$.
Avec le cas positif, montrer que $Y_T \in L^1$ et que $|S_{n\wedge T}| \leqslant Y_T$ pour tout n.
En déduire que S_T est intégrable et que $\mathbb{E}[S_T] = m\mathbb{E}[T]$.

Exercice 5.

Soit (X_n) une martingale. On va montrer qu'il y a équivalence entre

(i) X_n converge vers X_∞ p.s. et dans L^1.

(ii) Il existe $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X_n = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n]$ pour tout n.

1. Supposons (i). Montrer que $X_n = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n]$ pour tout n.

2. Supposons (ii).
- **a.** Montrer que (X_n) converge p.s.
- **b.** Supposons que Z est bornée. Montrer que (X_n) converge dans L^1.
- **c.** Pour $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\mathbb{E}[|Z|\mathbf{1}_{|Z|>M}] < \varepsilon$.
- **d.** En déduire que (X_n) est de Cauchy dans L^1 et conclure.

Exercice 6. Urne de Polya

On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule rouge. À chaque instant, on tire une boule de l'urne, on la replace dans l'urne, et on rajoute une boule de la même couleur. Ainsi, il y a $n+1$ boules dans l'urne avant le n-ième tirage.

Pour $n \geqslant 1$, on notera S_n le nombre de boules rouges dans l'urne avant le n-ième tirage et $M_n = \dfrac{S_n}{n+1}$. On note aussi $X_1 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, $X_{n+1} = 1$ si la n-ième boule tirée est rouge et $X_{n+1} = 0$ sinon. Enfin, on note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

1. Déterminer S_n en fonction de $X_1, \dots, X_n$.

2. Montrer que (M_n) est une martingale.

3. Montrer que (M_n) converge p.s. et dans L^2 vers une v.a. M_∞.

4. Que peut-on dire de la convergence du rapport $\frac{\text{nb de boules rouges}}{\text{nb de boules blanches}}$?

5. Démontrer par récurrence que S_n suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

6. En déduire la loi de M_∞.

Exercice 7. Processus autorégressif

Les processus autorégressifs sont souvent utilisés en économie pour modéliser des évolutions de cours boursiers. Un exemple est donnée par une suite (X_n) qui vérifie $X_0 = a \in]0,1[$ constante, et telle qu'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = \theta X_n + (1-\theta)\varepsilon_{n+1}$$

où la loi conditionnelle de ε_{n+1} sachant $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ est une loi de Bernoulli de paramère X_n.

1. Vérifier que la définition a un sens, c'est-à-dire que pour tout entier n, $X_n \in [0,1]$.

2. Montrer que X_n est une martingale.

3. Que peut-on dire de sa convergence ?

4. Identifier la loi limite.