TD Espérance Conditionnelle - Corrigé

Exercice 1.

Dans cet exercice, les v.a. X et Y sont discrètes. Par conséquent, on pouvait appliquer directement la formule vue en cours pour le calcul de l'espérance conditionnelle, par exemple

$$\mathbb{E}[X|Y=1] = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{Y=1\}}]}{\mathbb{P}(Y=1)} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{n\mathbb{P}(X=n, Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} = \sum_{n\geqslant 1} n\mathbb{P}(X=n|Y=1) \ .$$

Vous pouvez utiliser directement l'une de ces trois expressions, selon ce qui vous arrange.

1. X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$. Donc $\mathbb{E}[X] = 6$.

Ensuite, sachant $Y = 1$, X est le premier indice après 2 où l'on obtient un 5. Par conséquent, la loi conditionnelle de $X - 1$ sachant $Y = 1$ est la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$. Donc

$$\mathbb{E}[X|Y=1] = 1 + \mathbb{E}[X-1|Y=1] = 1 + 6 = 7 \ .$$

2. Pour la dernière, il fallait poser le calcul :

$$\mathbb{E}[X|Y=2] = \sum_{k\geqslant 1} k\mathbb{P}(X=k|Y=2) \ .$$

Pour faire les calculs, notons L_n le résultat du n-ième lancer.

D'abord,

$$\mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}(L_1 \neq 6, L_2 = 6) = \frac{5}{6}\frac{1}{6} = \frac{5}{36} \ .$$

Ensuite,

$$\mathbb{P}(X=1, Y=2) = \mathbb{P}(L_1 = 5, L_2 = 6) = \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{36} \quad \text{d'où} \quad \mathbb{P}(X=1|Y=2) = \frac{1}{5} \ .$$

(Remarque : on aurait pu aussi dire que sachant $Y = 2$, le résultat du premier lancer n'est pas un 6, donc la probabilité d'obtenir un 5 au premier lancer est de $\frac{1}{5}$.)

Bien sûr, $\mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = 0$ car on ne peut pas obtenir à la fois 5 et 6 au deuxième lancer.

Enfin, pour $k \geqslant 3$,

$$\mathbb{P}(X=k, Y=2) = \mathbb{P}(L_1 \notin \{5,6\}, L_2 = 6, L_3 \neq 5, \ldots, L_{k=1} \neq 5, L_k = 5) = \frac{4}{6}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-3}\frac{1}{6}$$

d'où

$$\mathbb{P}(X=k|Y=2) = \frac{2}{15}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-3} = \frac{2}{15}\frac{6}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} = \frac{4}{25}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} = \frac{144}{125}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \ .$$

Ainsi, en reconnaissant l'espérance de la loi géométrique (à deux termes près ôtés de la somme), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|Y=2] &= \frac{1}{5} + \frac{144}{125}\sum_{k\geqslant 3} k\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{144}{125}\left(6 - \frac{1}{6} - \frac{5}{18}\right) = \frac{1}{5} + \frac{144}{125}\frac{50}{9} = \frac{33}{5} \ .\end{aligned}$$

(Remarque : il y avait plusieurs manières de mener le calcul.)

3. D'après le cours, on a

$$\mathbb{E}[X|\mathbf{1}_{Y=2}] = \mathbb{E}[X|Y=2]\mathbf{1}_{Y=2} + \mathbb{E}[X|Y\neq 2]\mathbf{1}_{Y\neq 2} \ .$$

Ce qui précède nous a permis de calculer le premier terme. Par contre, le deuxième terme nécessiterait un autre calcul analogue.

Exercice 2.

Exercice 3.

Exercice 4.

Exercice 5.

Exercice 6.

Exercice 7.

D'abord, remarquons que la donnée de l'énoncé caractérise la loi de (X,Y) car elle implique que pour toute fonction mesurable positive $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[f(X,Y)] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^\infty f(n,y)\, b\frac{(ay)^n}{n!} e^{-(a+b)y} dy \ .$$

1. Pour calculer cette probabilité conditionnelle, on a déjà besoin de la loi de X. En faisant $t \to \infty$ dans la donnée de l'énoncé, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=n) &= \frac{ba^n}{n!} \int_0^\infty y^n e^{-(a+b)y} dy \\
&= \frac{ba^n}{n!} \int_0^\infty \left(\frac{z}{a+b}\right)^n e^{-z} \frac{dz}{a+b} \\
&= \frac{ba^n}{n!(a+b)^{n+1}} \int_0^\infty z^n e^{-z} dz \ .
\end{aligned}$$

Par intégration par parties successives on montre que $\int_0^\infty z^n e^{-z} dz = n!$. Par suite

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X=n) = \frac{ba^n}{(a+b)^{n+1}} \ .$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$,

$$\mathbb{P}(Y \leqslant t | X=n) = \frac{\mathbb{P}(Y \leqslant t, X=n)}{\mathbb{P}(X=n)} = \frac{(a+b)^{n+1}}{n!} \int_0^t y^n e^{-(a+b)y} dy \ .$$

Autrement dit, sachant $X=n$, Y admet pour densité conditionnelle $y \mapsto \frac{(a+b)^{n+1}}{n!} y^n e^{-(a+b)y} \mathbf{1}_{y>0}$. Par suite, pour toute fonction ψ mesurable positive,

$$\mathbb{E}[\psi(Y)|X] = \frac{(a+b)^{X+1}}{X!} \int_{\mathbb{R}} \psi(y) y^X e^{-(a+b)y} dy \ .$$

En fait, ceci signifie que la loi conditionnelle de Y sachant X est une loi Gamma $G(X+1, a+b)$.

2. Comme $\frac{1}{X+1}$ est $\sigma(X)$-mesurable, on a par définition de l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X+1}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[Y|X]\, \frac{1}{X+1}\right] \ .$$

D'autre part, en utilisant l'espérance des lois Gamma rencontrée dans un TD précédent, on a

$$\mathbb{E}[Y|X] = \frac{X+1}{a+b}$$

d'où

$$\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X+1}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{X+1}{a+b}\,\frac{1}{X+1}\right] = \frac{1}{a+b}\ .$$

3. Pour conditionner par rapport à Y, on a d'abord besoin de calculer la loi marginale de Y. Pour toute fonction φ mesurable positive,

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{X=n}\varphi(Y)] = b\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\frac{(ay)^n}{n!}e^{-(a+b)y}dy\ .$$

En sommant sur n, on obtient par convergence monotone

$$\mathbb{E}[\varphi(Y)] = b\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)e^{ay}e^{-(a+b)y}dy = b\int_{\mathbb{R}} e^{-by}dy\ .$$

Autrement dit $Y \sim \mathcal{E}(b)$. Dans l'expression au dessus, on peut donc mettre en facteur la densité de Y pour obtenir

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{X=n}\varphi(Y)] = \mathbb{E}[\psi_n(Y)\varphi(Y)]$$

où $\psi_n(y) = \frac{(ay)^n}{n!}e^{-ay}$ Par conséquent

$$\mathbb{P}(X=n|Y) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{X=n}|Y] = \psi_n(Y) = \frac{(aY)^n}{n!}e^{-aY}\ .$$

Autrement dit, la loi conditionnelle de X sachant Y est la loi $\mathcal{P}(aY)$. En utilisant l'espérance de la loi de Poisson, on en déduit

$$\mathbb{E}[X|Y] = aY\ .$$

Exercice 8.