Université de Bordeaux **Mathématiques**
Préparation à l'agrégation **Année 2019/2020**

TD Espérance Conditionnelle

Exercice 1.

On lance un dé équilibré à six faces une infinité de fois.
On note X, Y le nombre de lancers nécessaires pour obtenir respectivement un 5 et un 6.

1. Calculer $\mathbb{E}[X]$, et $\mathbb{E}[X|Y=1]$.

2. Calculer $\mathbb{E}[X|Y=2]$.

3. Peut-on exprimer $\mathbb{E}[X|\mathbf{1}_{Y=2}]$ en fonction de $\mathbb{E}[X|Y=2]$?

Exercice 2.

1. Soient $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p), X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ indépendantes.
Déterminer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2 = n$. En déduire $\mathbb{E}[X_1|X_1 + X_2]$.

2. Soient $X_1, \ldots, X_p$ des v.a. de lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.
Déterminer la loi conditionnelle de $(X_1, \ldots, X_{p-1})$ sachant $X_1 + \ldots + X_p$. En déduire $\mathbb{E}[X_1|X_1 + X_2]$.

Exercice 3.

Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité $(x, y) \mapsto 2e^{-(x+y)}\mathbf{1}_{0<x<y}$.
Calculer la densité conditionnelle de X sachant Y.

Exercice 4. Trois propriétés de cours sur l'espérance conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

1. Soient X, Z deux v.a.r. intégrables telles que XZ soit aussi intégrable. On suppose que Z est $\mathcal{B}$-mesurable. Montrer qu'alors

$$\mathbb{E}[XZ|\mathcal{B}] = Z\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] \, .$$

2. Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$ telles que $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$. Montrer que pour toute v.a.r. X intégrable,

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}_2] \ | \mathcal{B}_1\big] = \mathbb{E}[X|\mathcal{B}_1] \, .$$

3. Soient $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $\sigma(X)$ et $\mathcal{B}$ sont indépendantes. Montrer que

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[X] \, .$$

(En particulier, si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$.)

Exercice 5.

Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{F}$ une sous-tribu.
On définit la variance conditionnelle de X sachant $\mathcal{F}$ par $\mathrm{Var}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2]$.

1. Montrer que

$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}[X^2|\mathcal{F}] - (\mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2 \, .$$

2. Comparer à la variance de $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$.

3. En déduire que

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|\mathcal{F})] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]) \, .$$

Exercice 6.

Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. intégrables, et $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Notons

$$\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots) .$$

1. Expliquer pourquoi $\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$.
Est-ce que $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$?

2. Montrer que $\mathbb{E}[X_1|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_1|S_n]$.

3. Montrer que $\mathbb{E}[X_1|S_n] = \ldots = \mathbb{E}[X_n|S_n]$.

4. En déduire que $\mathbb{E}[X_1|S_n] = \dfrac{S_n}{n}$.

Exercice 7.

Soient $a, b > 0$ et (X, Y) une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ dont la loi est caractérisée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t > 0, \quad \mathbb{P}(X = n, Y \leqslant t) = b \int_0^t \frac{(ay)^n}{n!} e^{-(a+b)y} dy .$$

1. Soit $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Calculer $\mathbb{E}[\psi(Y)|X]$.

2. Calculer $\mathbb{E}[\frac{Y}{X+1}]$.

3. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n|Y)$ puis $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 8.

Soient X, Y des v.a.r. telles que (X, Y) admette une densité sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que Y suit la loi Gamma $G(2, \lambda)$ et que la loi conditionnelle de X sachant Y est la loi uniforme sur $[0, Y]$.

Montrer que X et $Y - X$ sont des v.a. indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.