ENS Cachan 2015-2016 **Préparation à l'Agrégation**
Ariane Trescases - Arthur Leclaire **Option Probabilités et Statistiques**

Martingales - TP
Ruine du joueur

Exercice 1 (Identités de Wald). [4]

Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires intégrables i.i.d. On pose $m = \mathbb{E}[X_1]$, $S_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, et pour $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$. Soit τ un temps d'arrêt intégrable.

1. On pose $M_n = S_n - nm$. Montrer que $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.
2. Montrer que pour tout n, $\mathbb{E}[S_{n\wedge\tau}] = m\mathbb{E}[n \wedge \tau]$.
3. Montrer que S_τ est intégrable et que $\mathbb{E}[S_\tau] = m\mathbb{E}[\tau]$.

On admet la seconde identité de Wald : si $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, si $m = 0$, et si l'on note $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$, alors $\mathbb{E}[S_\tau^2] = \sigma^2\mathbb{E}[\tau]$.

Exercice 2 (Ruine du joueur). [1, 2, 3]

On considère $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que $P(X = 1) = p$ et $P(X = -1) = q$ avec $p = 1 - q$ et $p \in]0, 1[$. On modélise l'évolution de la fortune d'un joueur jouant 1 euro à chaque partie et partant d'une fortune initiale $a \in \mathbb{N}^*$ par $S_n = a + \sum_{i=1}^n X_i$. On suppose que le joueur s'arrête de jouer lorsqu'il a atteint la somme $b \in \mathbb{N}$ ($b > a$) ou lorsqu'il est ruiné (ie $S_n = 0$). On note $\tau = \inf\{n \geqslant 0 \mid S_n = b \text{ ou } S_n = 0\}$, et on appelle probabilité de ruine la probabilité $\mathbb{P}(S_\tau = 0)$.

1. Simuler avec Scilab une partie jusqu'à ruine ou fortune du joueur en fonction de a, b, et p.
2. Vérifier que $n \mapsto M_n = S_n - n(p - q)$ est une martingale pour une filtration que l'on précisera.
3. Montrer que τ est un temps d'arrêt et que $\mathbb{E}[\tau] < \infty$.

Cas $p \neq q$:

4. On suppose que $p \neq q$. Calculer $\mathbb{E}[\tau]$ en fonction de la probabilité de ruine.
5. Posons $Z_n = (\frac{q}{p})^{S_n}$. Montrer que c'est une martingale positive. En déduire $\mathbb{E}[Z_\tau]$. Déduire de ce qui précède la probabilité de ruine et la valeur de $\mathbb{E}[\tau]$.
6. Pour $p = \frac{1}{3}$, $a = 10$ et $b = 20$, estimer numériquement la durée moyenne d'une partie. Estimer la probabilité de ruine. Vérifier les résultats obtenus.
7. Construire un histogramme des durées des parties pour différentes valeurs de p. Tracer les courbes théorique et expérimentale de la durée moyenne d'une partie en fonction de p. Tracer aussi ces courbes pour la probabilité de ruine.

Cas $p = q$:

8. Supposons $p = q = 1/2$. Calculer la probabilité de ruine du joueur. À l'aide de la seconde identité de Wald, calculer la valeur de $\mathbb{E}[\tau]$.
9. Vérifier que cette valeur est bien la limite du cas $p \neq q$.
10. De même pour $p = \frac{1}{2}$, $a = 10$ et $b = 20$, estimer numériquement la durée moyenne d'une partie. Estimer la probabilité de ruine. Vérifier que les résultats obtenus correspondent aux valeurs théoriques.

Références

[1] Bercu et Chafaï, Modélisation Stochastique et Simulation, Sciences Sup (2007).

[2] Dacunha-Castelle et Duflo, Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe, Masson (1982).

[3] Le Gall, Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires, polycopié de l'ENS Paris.

[4] Mazliak, Priouret et Baldi, Martingales et chaînes de Markov, Hermann (1998).