Topologie métrique

1 Espaces métriques

Exercice 1$^{\square}$. Caractérisations de la continuité

Soient E, F deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$.

1. Montrer que f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert est ouverte.

2. Énoncer une propriété analogue avec des fermés.

3. Montrer que f est continue sur E si et seulement si pour tout $A \subset E$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Exercice 2$^{\square}$. Fonctions distances et séparation des fermés

Soit (E, d) un espace métrique.

1. **a.** Montrer que pour tout $x \in E$, $y \mapsto d(x, y)$ est 1-lipschitzienne.
En déduire qu'une boule fermée est fermée et qu'une boule ouverte est ouverte.
b. On munit le produit $E \times E$ de la distance $D((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(y, y')$.
Montrer que $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue.

2. Soit A une partie non vide de E.
On rappelle que la distance d'un point x à la partie A est définie par $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$.
a. Montrer que $x \mapsto d(x, A)$ est continue.
b. Montrer que $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

3. Soient A, B deux fermés non vides disjoints de E et $a < b$ dans $\mathbb{R}$.
a. Montrer qu'on peut construire $\varphi : E \longrightarrow [a, b]$ continue qui vaut a sur A et b sur B.
b. En déduire qu'il existe deux ouverts disjoints U et V de E tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Exercice 3.

Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est-il une réunion finie d'intervalles ouverts ?

Exercice 4. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non-réduit à 0.
On note $G_+ = G \cap \mathbb{R}_+^*$ et on pose $a = \inf G_+$.

1. On suppose que $a > 0$. Montrer que $G = a\mathbb{Z}$. En déduire que G est discret.

2. On suppose que $a = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que a/b est irrationnel. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que $\alpha\mathbb{N} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

5. Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 5.

Soient E un espace métrique, D une partie dense de E et $d \in D$.
À quelle condition $D \setminus \{d\}$ est encore dense dans E ?

2 Complétude

Exercice 6$^{\square}$.

Soit E un espace de Banach et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ une série à valeurs dans E.
On suppose que la série est normalement convergence, c'est-à-dire $\sum \|u_n\| < \infty$.
Montrer qu'alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.

Exercice 7$^{\square}$. Théorème des fermés emboîtés ou Théorème de Cantor

Soit (E, d) un espace métrique complet et soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés bornés non vides. On suppose que la suite $d_n = \sup_{x,y\in F_n} d(x, y)$ tend vers zéro.

Montrer qu'alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.

Exercice 8. Une métrique rendant $\mathbb{R}$ non complet

On considère sur $\mathbb{R}$ la distance d définie par $d(x, y) = |\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$.
Montrer que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

Exercice 9$^{\square}$. Prolongement des applications uniformément continues

Soient E, F deux espaces métriques, D une partie dense de E, et $\varphi : D \longrightarrow F$.
On suppose que F est complet, et que φ est uniformément continue. On va voir que φ admet admet un unique prolongement continu à E et que de plus celui-ci est uniformément continu.

1. Montrer qu'un éventuel prolongement continu est nécessairement unique.

2. Montrons maintenant l'existence.

a. Soit $x \in E$. Montrer que si (x_n) est une suite d'éléments de D qui converge vers x, alors $(\varphi(x_n))$ converge dans F. Montrer de plus que la limite ne dépend pas de la suite (x_n) choisie.

On note cette limite $\psi(x)$.

b. Montrer que $\psi : E \longrightarrow F$ est uniformément continue et qu'elle prolonge φ.

Exercice 10$^{\square}$. Théorème du Point fixe de Banach-Picard

Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \longrightarrow E$ une application contractante, *i.e.*

$$\exists k \in [0, 1[,\ \forall x, y \in E, \quad d(f(x), f(y)) \leqslant k\, d(x, y) .$$

On va montrer que f admet un unique point fixe $a \in E$, c'est-à-dire un point a tel que $f(a) = a$.

1. Montrer qu'un éventuel point fixe est unique.

2. On se donne $x_0 \in E$ et on considère la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout n.

a. Montrer que pour $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p < q$, on a $d(x_p, x_q) \leqslant \dfrac{k^p}{1-k} d(x_0, x_1)$.

b. En déduire que (x_n) converge vers un point $a \in E$ et montrer que $f(a) = a$.

c. Déduire de ce qui précède que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $d(x_p, a) \leqslant \dfrac{k^p}{1-k} d(x_0, x_1)$.

Exercice 11$^{\square}$. Nécessité des hypothèses dans le théorème de Banach-Picard

Soit E un espace métrique.

1. Trouver $f : E \longrightarrow E$ contractante qui n'admet pas de point fixe (car E n'est pas complet).

2. Trouver E complet et $f : E \longrightarrow E$ vérifiant $\forall x \neq y, d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, mais tels que f n'admette pas de point fixe.

3. Trouver E complet et $f : E \longrightarrow E$ admettant plusieurs points fixes (car pas contractante).

3 Compacité

Exercice 12.

Soit E un espace métrique compact et (F_n) une suite décroissante de fermés non vides.
Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est non vide.

Exercice 13$^{\square}$**.**

Soit E un espace métrique compact et soit $A \subset E$.
Montrer que A est compacte si et seulement si A est fermée.

Exercice 14$^{\square}$**.**

Soient E un e.v.n. et A, B deux parties de E.

1. Montrer que si A, B sont compactes, alors $A + B$ est compacte.

2. Montrer que si A est fermée et B compacte, alors $A + B$ est fermée.

3. Donner un exemple où A et B sont fermées sans que $A + B$ le soit.

Exercice 15$^{\square}$**.**

1. Rappeler pourquoi, dans $\mathbb{R}$, les compacts sont les fermés bornés.

2. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.
Montrer que dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, les compacts sont les fermés bornés.

Exercice 16. Théorèmes de Dini

1. Soit K un espace métrique compact et soit (f_n) une suite de fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$.
On suppose que (f_n) est croissante ($f_n \leqslant f_{n+1}$) et que (f_n) converge simplement vers une fonction continue f. Montrer qu'alors (f_n) converge uniformément sur K.

2. Soit $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions croissantes.
On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction continue f.
Montrer qu'alors (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$.

4 Espaces vectoriels normés

Exercice 17$^{\square}$.

Soit E un espace vectoriel normé et $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ deux normes sur E.

On dit que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont topologiquement équivalentes si ces deux normes définissent les mêmes ouverts (c'est-à-dire qu'un ouvert pour $\|\cdot\|_1$ est ouvert pour $\|\cdot\|_2$ et réciproquement). Ceci revient à dire que $\mathrm{Id} : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_2)$ est un homéomorphisme.

1. Montrer que $\mathrm{Id} : (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$ est continue si et seulement s'il existe A telle que $\forall x \in E, \|x\|_2 \leqslant A\|x\|_1$.

2. En déduire que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont topologiquement équivalentes si et seulement s'il existe des constantes a, A telles que pour tout $x \in E$, $a\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant A\|x\|_1$.

Exercice 18$^{\square}$. Équivalence des normes en dimension finie

On pourra utiliser les résultats de l'Exercice 15.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie dont on se donne une base $(e_1, \dots, e_n)$.

Pour $v \in E$ se décomposant en $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on note $\|x\| = \max_i |x_i|$ ce qui définit une norme sur E.

On note $S = \{\, x \in E \mid \|x\| = 1 \,\}$ la sphère associée à la norme $\|\cdot\|$.

1. Montrer que la continuité de l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi & (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (E, \|\cdot\|) \\ & (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} & \longmapsto & \sum x_i e_i \end{array}.$$

2. En déduire que S est compacte dans $(E, \|\cdot\|)$.

3. En plus des notations de la question 2, soit maintenant une autre norme N sur E.

- **a.** Montrer qu'il existe $A > 0$ telle que pour tout $x \in E$, $N(x) \leqslant A\|x\|$.
- **b.** En déduire que $N : (E, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}_+$ est continue.
- **c.** Déduire des questions précédentes que N est minorée sur S.
- **d.** En déduire qu'il existe $a > 0$ telle que pour tout $x \in E$, $\|x\| \leqslant aN(x)$.
- **e.** En déduire que dans (E, N), les compacts sont les fermés bornés.

4.
- **a.** Montrer que tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.
- **b.** En déduire que si E est un sous-e.v. de dimension finie d'un e.v.n. X, alors E est fermé dans X.

Exercice 19$^{\square}$.

Montrer que l'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales $n \times n$ est un compact de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Exercice 20$^{\square}$.

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. On note $\|A\|_{p,q} = \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^m\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_q}{\|x\|_p}$.

1. Montrer que $\|A\|_{\infty,\infty} = \displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{1\leqslant j\leqslant m} |a_{ij}|$.

2. Montrer que pour $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique, $\|A\|_{2,2}$ est le rayon spectral $\rho(A)$ de A (c'est-à-dire le module maximum d'une valeur propre complexe).

Exercice 21. Théorème de Householder

Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$, on définit la norme subordonnée sur $\mathbb{C}^{n\times n}$ par

$$\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad \|A\| = \sup_{x\in\mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} .$$

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et $\rho(A)$ son rayon spectral (module maximum d'une valeur propre complexe).

1. Montrer que si $\|\cdot\|$ est une norme subordonnée sur $\mathbb{C}^{n\times n}$, alors $\rho(A) \leqslant \|A\|$.

2. On va voir que $\rho(A) = \inf \|A\|$ où l'inf est pris sur toutes les normes subordonnées.
a. Montrer que l'on peut supposer que A est triangulaire supérieure.
Dans les questions suivantes, on fait cette supposition.
b. Soit $\mu \in]0,1[$ et notons $Q(\mu) = \operatorname{diag}(1, \mu, \mu^2, \ldots, \mu^{n-1})$.
Montrer que $A(\mu) := Q(\mu)TQ(\mu)^{-1}$ est triangulaire supérieure et que $A(\mu)_{ij} = \mu^{i-j}A_{ij}$.
En déduire que quand $\mu \longrightarrow +\infty$, $A(\mu)$ tend vers la matrice $D = \operatorname{diag}(A_{11}, \ldots, A_{nn})$.
c. En conclure que $\inf \|A\| \leqslant \|D\|_{2,2} = \rho(D) = \rho(A)$.

3. Montrer que $\rho(A) < 1$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $\lim\limits_{k\to\infty} A^k x = 0$.

4. Étendre le résultat de la question précédente à une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Exercice 22$^\square$.

Soit E un espace vectoriel normé **de dimension finie**.
Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$.
Montrer que f admet un minimum $m \in \mathbb{R}$ qui est atteint.

Exercice 23$^\square$. Existence et unicité de la projection

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel **de dimension finie**.

1. On fixe $x \in E$ et on considère le problème de minimisation de la fonction $\varphi : y \in F \longmapsto \|x - y\|$.
a. Montrer que φ atteint son minimum sur F.
b. Est-ce que le minimum est atteint en un unique point ?
c. Montrer que si E est préhilbertien, alors le minimum est atteint en un unique point.

2. On considère ici $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ et F le sous-espace des polynômes de degré $\leqslant n$. Que pouvez-vous déduire des questions précédentes en termes d'approximation polynomiale d'une fonction f pour la norme L^∞ ? pour la norme L^2 ?

3. On considère $E = (\mathscr{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_1)$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$, et $x = \mathbf{1}$.
Montrer que dans ce cas, φ n'atteint pas son infimum (i.e. $d(x,F) = 1$ n'est pas atteinte).

Exercice 24$^\square$. Le théorème de Riesz

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie.

1. Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et tel que $d(u,F) = 1$.

2. En déduire que la boule unité B de E n'est pas compacte.
(On pourra construire une suite (x_n) de B dont les termes sont deux-à-deux à distance $\geqslant 1$.)

Exercice 25$^\square$.

Étudier la convergence dans $(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ des suites (f_n), (g_n), (h_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = x^n, \quad g_n(x) = (1-x)x^n, \quad h_n(x) = n(1-x)x^n .$$

Exercice 26$^\square$.

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 27.

On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$.
Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $E_a(P) = P(a)$.

1. Vérifier que $\|\cdot\|$ est bien une norme.

2. Montrer que pour $a \in [0,1]$, E_a est une application linéaire continue sur $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$.

3. Est-ce encore vrai pour $a \notin [0,1]$?

Exercice 28$^\square$**.**

On munit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$.

1. Montrer qu'on peut définir une application linéaire $\begin{array}{rccc} \Phi & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}}dt \end{array}$.

2. Est-ce que Φ est continue ?

Exercice 29.

On munit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme uniforme et pour $f \in E$, on pose

$$\Phi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt \ .$$

1. Montrer que Φ est continue et calculer sa norme.

2. Est-ce qu'il existe $f \in E$ non nulle telle que $|\Phi(f)| = \|\Phi\|\|f\|$?

Exercice 30$^\square$**.**

Soit E un espace de Banach. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes continus de E.
On rappelle que $\mathcal{L}(E)$ est un espace de Banach pour la norme $\forall u \in \mathcal{L}(E), \quad \|u\| = \sup_{x\in E} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$.

1. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est de norme < 1, montrer que $I - u$ est inversible.
(On pourra exprimer l'inverse à l'aide d'une série convergeant dans $\mathcal{L}(E)$.)

2. On note $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des inversibles de $(\mathcal{L}(E), \circ)$.
Montrer que $\mathcal{GL}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.
(Pour $E = \mathbb{R}^n$, ceci montre que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathbb{R}^{n\times n}$.)

Exercice 31$^\square$**.**

Soient E, F deux e.v.n. et $T_n : E \to F$ une suite d'applications linéaires continues.
On suppose que $S := \sup_n \|T_n\| < \infty$ et qu'il existe $D \subset E$ dense dans E telle que $\forall z \in D,\ T_n(z) \to 0$.
Montrer que $T_n(x) \to 0$ pour tout $x \in E$.

Exercice 32.

On munit $[0,2\pi]$ de la mesure de Lebesgue renormalisée $\mu(dx) = \frac{dx}{2\pi}$.
L'espace $L^1(0,2\pi)$ est alors muni de la norme $\|f\|_{L^1(\mu)} = \int_0^{2\pi} |f(x)| \frac{dx}{2\pi}$.
Pour $f \in L^1(0,2\pi)$, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$.
On note aussi $\mathbb{C}_b^{\mathbb{Z}}$ l'espace des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bornées, muni de la norme $\|(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|$.

1. Montrer que $\mathcal{F} : f \to (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une application linéaire continue de $L^1(0,2\pi)$ dans $\mathbb{C}_b^{\mathbb{Z}}$ et calculer sa norme.

2. Est-ce que $\mathcal{F} : L^1(0,2\pi) \to \mathbb{C}_b^{\mathbb{Z}}$ est surjective ?

Exercice 33$^{\square}$. Espace de Schwartz

On introduit l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ des fonctions f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad N_p(f) := \sup_{\substack{0\leqslant\alpha\leqslant p \\ 0\leqslant\beta\leqslant p}} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\beta f^{(\alpha)}(x)| < \infty \ .$$

On munit $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ de la distance

$$d(f,g) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^p} \min\Big(1 \, , \ N_p(f-g) \Big) \, .$$

1. Montrer qu'une suite (f_n) converge vers f dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad N_p(f_n - f) \to 0 \ .$$

En déduire que si $f_n \to f$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, $f_n^{(\alpha)} \to f^{(\alpha)}$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est complet pour la distance d.

3. Montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ et que l'injection est continue.

Exercice 34. Convergence uniforme sur les compacts

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert. On note $\mathscr{C}(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles continues sur Ω.
On introduit pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$K_j = \left\{ x \in \Omega \ \middle| \ \|x\| \leqslant j \ \text{ et } \ d(x, \Omega^c) \geqslant \frac{1}{j} \right\} \quad , \quad (j \geqslant 1) \ .$$

1. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, K_j est compact, et $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$.

2. **a.** Montrer que $\Omega = \bigcup_{j\geqslant1} K_j$.

b. En déduire que si K est un compact dans Ω, il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset K_j$.

3. On munit $\mathscr{C}(\Omega)$ de la distance

$$d(f,g) = \sum_{j\geqslant1} \frac{1}{2^j} \min\Big(1 \, , \ \sup_{K_j} |f-g| \Big) \, .$$

a. Montrer que $d(f_n, f) \to 0$ si et seulement si $f_n \to f$ uniformément sur les compacts de Ω.
b. Montrer que $\mathscr{C}(\Omega)$ est complet pour d.
c. Montrer que l'espace $\mathscr{C}_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $\mathscr{C}(\Omega)$.
d. On prend ici $\Omega = \mathbb{R}$. Montrer que l'espace $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ des fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ n'est pas fermé dans $\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

5 Le théorème d'Arzela-Ascoli

Définition 1. Une partie A d'un espace métrique X est dite relativement compacte si $\overline{A}$ est compacte.

Proposition 1. *Une partie A d'un espace métrique X est dite relativement compacte si et seulement si de toute suite (x_n) d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite qui converge **dans** X.*

Soient E, F deux espaces métriques.

Définition 2. On dit que $\mathcal{A} \subset \mathscr{C}(E,F)$ est **équicontinue** en $a \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in E, \quad (\ d_E(a,y) < \eta \implies \forall f \in \mathcal{A}, \quad d_F(f(a), f(y)) < \varepsilon\ )\ .$$

On dit que $\mathcal{A} \subset \mathscr{C}(E,F)$ est **uniformément équicontinue** si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in E, \quad (\ d_E(x,y) < \eta \implies \forall f \in \mathcal{A}, \quad d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon\ )\ .$$

Proposition 2 (Heine)**.** *On suppose E compact.*
Alors $\mathcal{A}$ est uniformément équicontinue si et seulement si $\mathcal{A}$ est équicontinue en tout point de E.

Dans la suite, on munit $\mathscr{C}(K,F)$ de la distance uniforme $d(f,g) = \sup\limits_{x \in K} d(f(x), g(x))$.

Théorème 1. ***(Arzela-Ascoli)*** *Soient K et F deux espaces métriques.*
On suppose K compact. Alors $\mathcal{A} \subset \mathscr{C}(K,F)$ est relativement compacte dans $\mathscr{C}(K,F)$ si et seulement si

- *$\mathcal{A}$ est équicontinue en tout point de K,*
- *pour tout $x \in K$, $\mathcal{A}(x) = \{\ f(x)\ ;\ f \in \mathcal{A}\ \}$ est relativement compacte dans F.*

Exercice 35$^{\square}$.

Soient E, F deux espaces métriques.
Soit $k > 0$. Dans $\mathscr{C}(E,F)$ on considère la famille $\mathcal{A}$ des applications k-lipschitziennes.
Montrer que $\mathcal{A}$ est uniformément équicontinue.

Exercice 36$^{\square}$.

Faire la preuve du théorème de Heine pour l'équicontinuité (Proposition 2 ci-dessus).

Exercice 37.

Dans $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, on considère le sous-espace $F = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et on note

$$\mathcal{A} = \{\ f \in F \mid \|f\|_\infty \leqslant 1 \text{ et } \|f'\|_\infty \leqslant 1\ \}\ .$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est uniformément équicontinue.

2. Montrer que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans E.

3. En déduire que de toute suite (f_n) de fonctions réelles $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ telles que $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$, et $\|f_n'\|_\infty \leqslant 1$ pour tout n, on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément.

Exercice 38$^{\square}$.

Soit (f_n) une suite de fonctions $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(0) = 0\ , \quad \text{et} \quad \int_0^1 |f_n'(t)|^2 dt \leqslant 1\ .$$

Montrer que (f_n) admet une sous-suite qui converge uniformément.

6 Preuve du théorème d'Arzela-Ascoli

Nous allons prouver le théorème d'Arzela-Ascoli. On se donne K espace métrique compact, et F un espace métrique. Pour simplifier, on va faire l'hypothèse supplémentaire que F **est complet** (le cas général s'obtient alors en plongeant F dans un espace complet, appelé complété de F).

L'idée est d'utiliser la relative compacité ponctuelle sur une suite dense, pour construire un candidat limite, qui sera ensuite étendu à tout l'espace par uniforme continuité. On a donc besoin d'un lemme.

Lemme 2. *Dans K métrique compact, il existe une partie dénombrable dense.*

Démonstration. Pour tout $n \geqslant 1$, il existe un nombre fini de points $(x_{n,j})_{1\leqslant j\leqslant J_n}$ de K tels que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{J} B\left(x_{n,j}\ ,\ \frac{1}{n}\right) .$$

On peut alors montrer que $D = \{x_{n,j}\ ,\ n \geqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant J_n\ \}$ est dense dans K. □

6.1 Preuve de l'implication directe

D'abord, remarquons que la relative compacité de $\mathcal{A}$ implique la relative compacité des $\mathcal{A}(x)$ pour chaque x. Ceci est dû au fait que la convergence uniforme implique la convergence simple.

Montrons ensuite que la relative compacité de $\mathcal{A}$ implique l'équicontinuité. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est compacte dans $\mathscr{C}(K, F)$, il existe $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{C}(K, F)$ telles que les boules $B(f_i, \varepsilon)$ recouvrent $\mathcal{A}$. Comme les f_i sont uniformément continues sur K (et en nombre fini), il existe $\eta > 0$, tel que

$$d(x, y) < \eta \quad \Longrightarrow \quad \forall i = 1, \ldots, n,\ d(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon .$$

On en déduit que

$$d(x, y) < \eta \quad \Longrightarrow \quad \forall f \in \mathcal{A},\ d(f(x), f(y)) < \varepsilon ,$$

ce qui prouve que $\mathcal{A}$ est uniformément équicontinue sur K.

6.2 Preuve de l'implication réciproque

Montrons maintenant l'implication réciproque, qui est la plus difficile. Avec le lemme, on peut introduire une suite $p \in \mathbb{N} \mapsto x_p$ injective telle que $D = \{x_p, p \in \mathbb{N}\}$ est dense dans K.

Supposons les deux hypothèses du théorème vérifiées, et montrons la relative compacité de $\mathcal{A}$. Pour cela, prenons une suite (f_p) dans $\mathcal{A}$ et montrons qu'elle admet une sous-suite qui converge uniformément sur K.

Remarquons que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\overline{\mathcal{A}(x_p)}$ est compacte, donc $(f_n(x_p))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. On va extraire successivement pour avoir convergence simple sur les premiers éléments de la suite, puis pratiquer une extraction diagonale pour avoir la convergence simple sur toute la suite.

Par récurrence, on construit des fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_p, \ldots$ strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ ainsi que des éléments $f(x_0), f(x_1), \ldots \in F$, ... de sorte que

$$\begin{aligned}
&f_{\varphi_0(n)}(x_0) \longrightarrow f(x_0)\\
&f_{\varphi_0(\varphi_1(n))}(x_1) \longrightarrow f(x_1)\\
&\vdots\\
&f_{\varphi_0(\varphi_1(\ldots(\varphi_p(n))\ldots))}(x_p) \longrightarrow f(x_p)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Au passage ceci définit $f : D \to F$. On pose alors $\psi(n) = \varphi_0(\varphi_1(\ldots\varphi_n(n)\ldots))$. Remarquons que ψ est encore une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et puisque

$$\forall n \geqslant p, \quad \psi(n) = \varphi_0(\ldots\varphi_p(\varphi_{p+1}(\ldots\varphi_n(n)\ldots))\ldots) ,$$

$(f_{\psi(n)}(x_p))_{n\geqslant p}$ est une sous-suite de $(f_{\varphi_0(\dots\varphi_p(n)\dots)}(x_p))_{n\in\mathbb{N}}$ et donc converge encore vers $f(x_p)$. Ainsi, $(f_{\psi(n)})$ est une sous-suite de (f_n) qui converge simplement vers f sur D. Pour terminer, il ne reste plus qu'à prolonger f à K entier, et à montrer que la convergence est en fait uniforme sur K.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que

$$\forall x, y \in K, \quad d(x,y) < \eta \quad \Longrightarrow \quad \forall g \in \mathcal{A},\ d(g(x), g(y)) < \varepsilon\ .$$

En appliquant cela à $g = f_{\psi(n)}$ et en passant à la limite quand $n \to \infty$, on obtient que

$$\forall x, y \in D, \quad d(x,y) < \eta \quad \Longrightarrow \quad d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon\ .$$

Cela prouve que f est uniformément continue sur K. Comme f est à valeurs dans F complet, on peut appliquer le théorème de prolongement par uniforme continuité, ce qui permet de prolonger cette fonction en $f : K \to F$ continue.

Supposons par l'absurde que $(f_{\psi(n)})$ ne converge pas uniformément vers f sur K. Alors il existerait $\varepsilon > 0$, une sous-suite $(f_{\psi(n_k)})$ et des points $x_k \in K$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad d(f_{\psi(n_k)}(x_k), f(x_k)) > \varepsilon\ .$$

Par compacité, quitte à ré-extraire, on peut supposer que la suite (x_k) converge vers un $x \in K$. Mais alors la famille $\mathcal{A} \cup \{f\}$ est uniformément équicontinue sur K, donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$d(y,z) < \eta \quad \Longrightarrow \quad \forall g \in \mathcal{A} \cap \{f\}\ ,\ d(g(y), g(z)) < \frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Comme D est dense dans K, il existe aussi $y \in D$ tel que $d(x,y) < \eta$. Ainsi,

$$d(f_{\psi(n_k)}(x_k), f(x_k)) \leqslant d(f_{\psi(n_k)}(x_k), f_{\psi(n_k)}(y)) + d(f_{\psi(n_k)}(y), f(y)) + d(f(y), f(x_k))\ .$$

Sur le membre de droite, le premier et le troisième termes sont $< \frac{\varepsilon}{3}$, et le deuxième terme est aussi $< \frac{\varepsilon}{3}$ à partir d'un certain rang (car $f_{\psi(n)}(y) \to f(y)$ vu que $y \in D$). On obtient donc une contradiction.

Finalement, $f_{\psi(n)} \to f$ uniformément sur K, ce qui prouve que $\mathcal{A}$ est relativement compacte.