Université de Bordeaux | **Mathématiques**
Préparation à l'agrégation | **Année 2021/2022**

TD3

Exercice 1. Convergence en probabilité et Borel-Cantelli

Soit (X_n) une suite de v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que $X_n \to X$ p.s. dès lors que pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum \mathbb{P}\big(|X_n - X| > \varepsilon\big) < \infty$.

2. Montrer que c'est une équivalence si les $(X_n - X)$ sont indépendantes.

3. Montrer que l'équivalence est fausse avec des $(X_n - X)$ non indépendantes.
(On pourra considérer $X_n = \frac{1}{n} Y$ où Y suit la loi de Cauchy de densité $\frac{1}{\pi(1+y^2)}$ sur $\mathbb{R}$.)

Exercice 2. Suites de v.a. de Bernoulli indépendantes

On considère une suite (X_n) de v.a. indépendantes, avec $X_n \sim \mathcal{B}(\varepsilon_n)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $X_n \to 0$ en probabilités.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $X_n \to 0$ p.s.

Exercice 3. Des exemples et contre-exemples

1. Donner une suite (X_n) qui converge p.s. mais pas dans L^1.

2. Donner une suite (X_n) qui converge dans L^1, mais pas p.s.

3. Donner une suite (X_n) qui converge en probabilité, mais pas p.s.

4. Donner une suite (X_n) qui converge en loi, mais pas en probabilité.

5. Donner deux suites $(X_n), (Y_n)$ qui convergent en loi vers X, Y respectivement, mais telles que $X_n + Y_n$ ne converge pas en loi vers $X + Y$. Qu'en déduire sur la convergence en loi de (X_n, Y_n) ?

Exercice 4.

Soient $(X_n), (Y_n)$ deux suites de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ respectivement.
On suppose que (X_n) et (Y_n) convergent respectivement vers X, Y en probabilité.

1. Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ continue. Montrer que $f(X_n) \to f(X)$ en probabilité.

2. Montrer que (X_n, Y_n) converge en probabilité vers (X, Y).

3. En déduire que $X_n + Y_n \to X + Y$ en probabilité.

Exercice 5.

Soit (X_n) une suite de v.a. de densités respectives $f_n(x) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-(nx - n - 1)^2)$.

1. Quelle est la loi de X_n ? En déduire $\mathbb{E}[X_n]$ et $\mathrm{Var}(X_n)$.

2. Que peut-on dire de la convergence de la suite (X_n) ?

Exercice 6.

Soit $\lambda > 0$. Pour $n > \lambda$, on considère une v.a. X_n de loi géométrique $\mathcal{G}(\frac{\lambda}{n})$.
Étudier la limite en loi de $\frac{X_n}{n}$.

Exercice 7. Approximation poisson-binomiale

Soit (p_n) une suite dans $[0,1]$ telle que $np_n \longrightarrow \lambda$ avec $\lambda > 0$.
Soit (X_n) une suite de v.a. telle que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$.
Montrer que (X_n) converge en loi vers une v.a. de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 8. Records de v.a. exponentielles

Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
Montrer que la suite de v.a.

$$Y_n = \lambda \max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i - \log(n)$$

converge en loi. Préciser la fonction de répartition et la densité de la loi limite.

Exercice 9.

Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose

$$Y_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n X_k} .$$

1. Quelle est la limite de (Y_n) ?

2. Montrer que $\sqrt{n}(Y_n - \lambda) \longrightarrow \mathcal{N}(0, \lambda)$ en loi.

Exercice 10.

Soit (U_n) une suite de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Montrer que $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log(U_k)$ converge p.s. et donner sa limite.

2. Que peut-on en déduire pour $X_n = \left(\prod_{k=1}^n U_k\right)^{\frac{\alpha}{n}}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$?

3. Montrer que $Z_n = e^{\alpha\sqrt{n}} \left(\prod_{k=1}^n U_k\right)^{\frac{\alpha}{\sqrt{n}}}$ converge en loi et donner sa limite.