TD2

Exercice 1.

Dans l'expérience consistant à lancer deux fois un même dé équilibré, considérons les évènements

$$A = \text{“pile au premier lancer”}\ ,$$
$$B = \text{“pile au deuxième lancer”}\ ,$$
$$C = \text{“même résultat aux deux lancers”}\ .$$

Est-ce que les évènements A, B, C sont indépendants deux à deux ? dans leur ensemble ?

Exercice 2.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r.

1. Calculer la variance de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

2. Que peut-on dire si les X_i sont indépendantes ?

Exercice 3.

Calculer la loi de la somme de deux v.a. indépendantes uniformes sur $[0, 1]$.

Exercice 4. Interprétation de la fonction génératrice

En un jour ensoleillé, une personne se promène dans les bois et ramasse un nombre aléatoire N de champignons. Supposons que tous les champignons aient indépendamment la même probabilité d'être comestible, notée p. Le nombre N est également indépendant du caractère comestible des champignons. Montrer que la probabilité que tous les champignons ramassés soient comestibles est $G(p)$ où G est la fonction génératrice de N.

Exercice 5. Propriété d'absence de mémoire

Soit X une v.a. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

1. Montrer que X vérifie la propriété d'absence de mémoire

$$\forall t, s > 0, \quad \mathbb{P}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s)\ .$$

Interpréter en termes de probabilités conditionnelles.

2. Montrer que la partie entière supérieure $Y = \lceil X \rceil$ de X suit une loi géométrique.

3. Montrer que Y vérifie aussi une propriété d'absence de mémoire

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y > m + n) = \mathbb{P}(Y > m)\mathbb{P}(Y > n)\ .$$

Exercice 6.

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des v.a. indépendantes de même loi à densité f.

1. Calculer la loi du couple $(A, B) = (\min(X_i), \max(X_i))$. Indication : calculer $\mathbb{P}(a < A, B < b)$.

2. Dans le cas où les X_i sont uniformes sur $[0, 1]$, donner la loi de $B - A$.

Exercice 7. Le problème des parapluies

À l'entrée d'un restaurant, n personnes déposent leur parapluie à l'entrée. En partant, chacune récupère un parapluie au hasard : la première choisit le sien de manière uniforme parmi les n parapluies, la deuxième en prend un de façon uniforme parmi les $n-1$ restants, etc.

1. Montrer qu'on peut modéliser cette expérience avec l'espace de probabilités $\Omega = \mathfrak{S}_n$ des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ muni de la loi uniforme.

2. **a.** Quelle est la probabilité pour que la première personne récupère son parapluie ?
b. Quelle est la probabilité pour que la i-ième personne récupère son parapluie ?
c. Ces évènements sont-ils indépendants ?

3. Quelle est l'espérance du nombre de personnes qui récupèrent leur propre paraluie ?

4. Déterminer la probabilité p_n qu'au moins une personne récupère son parapluie. Que devient p_n lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 8. Loi de Hardy-Weinberg

Les gènes se présentent le plus souvent en paire et sous deux formes d'allèles que nous noterons A et B. Cela donne donc trois génotypes possibles : AA, AB, et BB. Chaque individu reçoit au hasard un allèle du gêne de chaque parent. Pour chaque parent, l'allèle transmis est choisi avec probabilité $\frac{1}{2}$ parmi les deux disponibles. On suppose que les génotypes des deux parents sont indépendants et de même loi : on notera x la probabilité du génotype AA, $2y$ celle du génotype AB et z celle du génotype BB. On remarquera que $x + 2y + z = 1$.

1. Calculer la probabilité de chacun des génotypes pour un enfant.

2. Vérifier que, si $x = y = z = \frac{1}{4}$, alors les génotypes de l'enfant ont les mêmes probabilités d'apparition que chez ses parents.

3. Calculer la probabilité de chacun des génotypes pour un enfant de la seconde génération. Que constatez-vous ?

Exercice 9. Lois Gamma, χ^2, Student

On appelle loi Gamma de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$ la loi $G(a, \lambda)$ de densité

$$\gamma_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbf{1}_{x>0} \,, \quad \text{où} \quad \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx \,.$$

1. Soit X une v.a. de loi $G(a, \lambda)$. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

2. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de lois $G(a, \lambda)$ et $G(b, \lambda)$. Montrer que $X + Y$ suit la loi $G(a+b, \lambda)$, et montrer que

$$B(a, b) := \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \,.$$

3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Calculer la loi de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

4. Soit Y une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $Y^2 \sim G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. En déduire $\Gamma(\frac{1}{2})$.

5. Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ des v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
Calculer la loi de $Z = Y_1^2 + \ldots + Y_n^2$ (appelée loi du χ^2 à n degrés de liberté). En déduire $\mathbb{E}[Z]$ et $\mathrm{Var}(Z)$.

6. Soient Y une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendante des Y_i.
Calculer la loi de $\frac{\sqrt{n}Y}{\sqrt{Z}}$ (appelée loi du Student à n degrés de liberté).

Exercice 10. Calculs de fonctions caractéristiques

1. Calculer les fonctions caractéristiques des lois binomiale, géométrique et de Poisson.
Comparer avec le calcul de la fonction génératrice.

2. Calculer la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
En déduire les moments (de tout ordre) de cette loi.

Exercice 11. Fonction caractéristique de la loi normale

On rappelle la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ qui est $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

1. Calculer la fonction caractéristique Φ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
(On pourra chercher une équation différentielle d'ordre 1 que satisfait Φ.)

2. Calculer la fonction caractéristique Ψ de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

3. Montrer que si X, Y sont indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2), \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, alors

$$X + Y \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \ .$$

Exercice 12. Application du lemme de Borel-Cantelli

Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Quelle est la loi de $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$?

2. Notons f la densité de $\mathcal{N}(0,1)$ et F sa fonction de répartition. Montrer que $\forall x > 0,\ 1 - F(x) \leqslant \dfrac{f(x)}{x}$.

3. Fixons $c > 1$. En déduire que p.s., se produit seulement un nombre fini des événements

$$A_n = \left\{ \frac{S_n}{\sqrt{n}} > c\sqrt{2\log n} \right\} \ .$$

4. Montrer que $\limsup \dfrac{S_n}{\sqrt{2n\log n}} \leqslant 1$.
En déduire que presque sûrement on a $S_n < 2\sqrt{n\log n}$ à partir d'un certain rang.

Exercice 13. Fonction caractéristique de la loi Gamma

Soient $a > 0, \lambda > 0$. Pour z complexe, on considère (sous réserve d'existence) l'intégrale

$$\psi(z) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda - z)x} x^{a-1} dx \ .$$

1. Déterminer le domaine de définition D de ψ.

2. Calculer la valeur de $\psi(t)$ pour $t \in]\lambda, +\infty[$.

3. Montrer que ψ est holomorphe sur D.

4. En déduire la fonction caractéristique de la loi Gamma de paramètres (a, λ).