TD1

Exercice 1.

Considérons le lancer d'un dé équilibré.

1. Quel espace de probabilité naturel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suggérez-vous pour modéliser cette expérience aléatoire ?

2. Écrire en termes ensemblistes les évènements A : "le résultat est pair" et A^c : "le résultat est impair".

3. Considérons maintenant la tribu $\mathcal{B} = \{ \varnothing , \{1, 2, 3\} , \{4, 5, 6\} , \Omega \}$.
Est-ce que A est toujours un évènement pour cette tribu ? Que permet d'observer cette tribu ?

Exercice 2.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Écrire les événements suivants à l'aide d'opérations ensemblistes :
E_1 = "au moins un des A_n est réalisé" ;
E_2 = "tous les A_n sont réalisés" ;
E_3 = "à partir de $n = 500$ aucun A_n n'est réalisé" ;
E_4 = "au plus un nombre fini de A_n est réalisé" ;
E_5 = "une infinité de A_n sont réalisés" ;
E_6 = "tous les A_n sauf un nombre fini sont réalisés".

Exercice 3.

Un candidat à l'agrégation externe de mathématiques imagine que le couplage qu'il tirera pour son oral d'analyse et probabilités est choisi uniformément parmi tous les couplages possibles (en admettant tout de même qu'un couplage ne comporte pas deux fois la même leçon). La liste des leçons comporte 36 leçons parmi lesquelles 4 leçons de probabilités.

1. Calculer la probabilité pour que le couplage contienne exactement une leçon de probabilité.

2. Calculer la probabilité pour que le couplage contienne deux leçons de probabilité.

3. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 4.

Une pêcheuse s'adonne à son activité favorite au lac de Cazaux qui contient 5 carpes, 3 brochets, 16 ablettes, et 1 dauphin égaré. Elle fait l'hypothèse qu'elle pêche uniformément parmi les poissons disponibles et elle décide d'en pêcher 9.

1. On suppose qu'elle garde les poissons pêchés. Calculer la probabilité pour qu'elle pêche 2 carpes, 3 brochets, 4 ablettes (et pas de dauphin).

2. Reprendre le calcul en supposant qu'elle relâche les poissons après chaque prise.

Exercice 5. Formule de Poincaré

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Démontrer que

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{1\le j\le n} A_j\Big) = \sum_{1\le k\le n} (-1)^{k-1}\Big(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})\Big) .$$

Exercice 6.

Considérons une variable U uniforme sur $[0,1]$. Calculer la loi de $X = -\log(U)$.

Exercice 7.

1. On considère une v.a.r. X de loi $\frac{1}{4}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2$. Tracer sa fonction de répartition.

2. Tracer la densité et la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[-1,1]$.

Exercice 8.

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F.

1. Montrer que F est croissante.

2. Montrer que F est continue à droite.

3. Montrer que F admet des limites à gauche en tout point (qu'on exprimera à l'aide de X).

4. Montrer que F admet 0 pour limite en $-\infty$ et 1 pour limite en $+\infty$.

5. Pour $a \in \mathbb{R}$, exprimer $\mathbb{P}(X = a)$ à l'aide de F.

Exercice 9.

Construire une variable aléatoire réelle qui n'est ni discrète, ni à densité.

Exercice 10.

1. Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur aléatoire admettant une densité f.
Exprimer la loi marginale de (X_1, X_2) à l'aide de f, puis celle de X_2.

2. Construire deux v.a. X, Y à densité telles que le couple (X, Y) ne soit pas à densité.

Exercice 11.

Soit X une variable aléatoire réelle dans L^2. Montrer que $\mathrm{Var}(X) = \inf_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}[(X-a)^2]$.

Exercice 12.

Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que si $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$, alors $\|X\|_p \leqslant \|X\|_q$.

Exercice 13.

Une urne contient N boules de K couleurs différentes : N_1 boules de la couleur 1, N_2 boules de la couleurs 2,... N_K boules de la couleur K avec $N_1 + N_2 + \cdots + N_K = N$. On pose $p_i = N_i/N$ la proportion initiale de la couleur i. On tire au hasard $n \leq N$ boules dans l'urne et on s'intéresse à la répartition des couleurs dans l'échantillon obtenu. On note $p(n_1, \ldots, n_K)$ la probabilité d'obtenir n_1 boules de la couleur 1, n_2 boules de la couleur 2,..., n_K boules de la couleur K. Déterminer cette probabilité lorsqu'on fait

1. un tirage sans remise,

2. un tirage avec remise.

Exercice 14. Calculs de fonctions génératrices

1. Calculer les fonctions génératrices de

a) la loi binomiale de paramètre (n, p),

b) la loi de Poisson de paramètre λ,

c) la loi géométrique de paramètre p.

2. En déduire les espérances et variances de ces lois.