Intégration

1 Mesures et Intégrales

1.1 Rappels de cours

Soit E un ensemble.

Définition 1. Une tribu sur E est un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de E qui vérifie

- $E \in \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$,
- $(\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \in \mathcal{A}) \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{A}$.

Exemple 1.

- $\mathcal{P}(E)$ est une tribu (dite discrète)
- $\{\emptyset, E\}$ est une tribu (dite grossière).
- Si $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille de tribus, alors $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ est une tribu.
- Si $C \subset \mathcal{P}(E)$, alors il existe une plus petite tribu contenant C. C'est l'intersection de toutes les tribus contenant C, et elle est appelée tribu engendrée par C et notée $\sigma(C)$.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ est usuellement muni de la tribu engendrée par les intervalles $]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. C'est aussi la tribu engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$.
- Plus généralement, si E est un espace métrique, on le munira naturellement de la tribu borélienne qui est la tribu engendrée par les ouverts de E. Par exemple, $\mathbb{R}^d$ est muni de sa tribu borélienne.
- Si E, F sont des ensembles munis de tribus $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, alors le produit $E\times F$ est muni de la tribu engendrée par les $A \times B$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$, qui est appelée tribu produit.

Définition 2. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, c'est-à-dire un ensemble E muni d'une tribu $\mathcal{A}$.
Une mesure positive sur E est une application $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ qui vérifie

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- si $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si les A_n sont disjoints deux à deux, alors

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \ .$$

On dira alors que $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.
Si $\mu(E) = 1$, on dira que μ est une mesure de probabilité, et que $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de probabilités.
Si $\mu(E) < \infty$, on dira que μ est une mesure finie.
On dira que μ est sigma-finie s'il existe une suite croissante (E_n) dans $\mathcal{A}$ telle que

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \ , \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \mu(E_n) < \infty \ .$$

On dira qu'une propriété $P(x)$ dépendant du point $x \in E$ est vraie μ-presque partout (ou presque sûrement si μ est une mesure de probabilités) s'il existe un ensemble $N \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(N) = 0$ et tel que la propriété $P(x)$ soit vraie pour tout $x \in E \setminus N$.

Exemple 2.

- Si $(E, \mathcal{A})$ est un ensemble mesurable, la mesure de Dirac en $x \in E$ est définie par $\delta_x(A) = \mathbf{1}_{x \in A}$.
- Si E est un ensemble muni de la tribu discrète, alors on définit la mesure de comptage sur E en posant pour tout $A \subset E$, $\mu(A) = |A|$ où $|A|$ désigne le cardinal de A.
- On peut montrer qu'il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, appelée mesure de Lebesgue, telle que
$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ avec } a < b, \quad \lambda([a, b]) = b - a \, .$$
C'est aussi l'unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ invariante par translation telle que $\lambda([0, 1]) = 1$.

Proposition 1. *Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et deux mesures μ, ν sur E. On suppose qu'il existe $C \subset \mathcal{A}$ stable par intersection finie, contenant E, telle que $\mathcal{A} = \sigma(C)$ et que pour tout $A \in C$, $\mu(A) = \nu(A)$.*

- *Si μ, ν sont finies, alors $\mu = \nu$.*
- *S'il existe une suite croissante (E_n) dans C telle que $E = \bigcup E_n$ et $\mu(E_n) < \infty$ pour tout n, alors $\mu = \nu$.*

Définition 3. Soient $(E, \mathcal{A}), (F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurés.
On dit qu'une fonction $f : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B})$ est mesurable si pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.
Remarque : Lorsque $\mathcal{B} = \sigma(C)$, il suffit de le vérifier pour tout $B \in C$.

Dans toute la suite du paragraphe, $(E, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

Définition 4. Une fonction mesurable $f : E \to \mathbb{R}$ est dite étagée si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs. De façon équivalente, une fonction étagée est une combinaison linéaire d'indicatrices de parties mesurables.

Proposition 2. *Si $f : E \to [0, \infty]$ est mesurable, alors il existe une suite croissante (f_n) de fonctions étagées à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$.*

Définition 5. On définit l'intégrale d'une fonction étagée $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{1}_{A_k}$ (avec $\alpha_k \in \mathbb{R}$ et $A_k \in \mathcal{A}$) par
$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k) \quad \text{(qui ne dépend pas de la décomposition choisie).}$$

Définition 6. On définit l'intégrale d'une fonction mesurable $f : E \to [0, \infty]$ par
$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int \varphi d\mu \, , \ \varphi \text{ étagée t.q. } 0 \leqslant \varphi \leqslant f \right\} \, .$$

Exemple 3. Si μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ et $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$, alors $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$.

L'intégrale des fonctions positives ainsi construite satisfait un certain nombre de propriétés attendues (par exemple $f \leqslant g$ implique $\int f d\mu \leqslant \int g d\mu$), et aussi les deux théorèmes fondamentaux suivants.

Théorème 1 (Théorème de convergence monotone)**.**
Soit $f_n : E \to [0, \infty]$ une suite de fonctions mesurables telle que $f_n \leqslant f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et soit $f = \lim f_n$. Alors
$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu \, .$$

Théorème 2 (Lemme de Fatou)**.** *Soit $f_n : E \to [0, \infty]$ une suite de fonctions mesurables. Alors*
$$\int (\liminf_{n \to \infty} f_n) d\mu \leqslant \liminf_{n \to \infty} \int f_n d\mu \, .$$

Définition 7. Soient $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable et $f^+ = \max(0, f)$ et $f^- = \max(0, -f)$.

On dit que f est intégrable par rapport à μ si

$$\int |f| d\mu < \infty \quad \text{i.e.} \quad \int f^+ d\mu < \infty \text{ et } \int f^- d\mu < \infty.$$

Dans ce cas, on définit l'intégrale de f par

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \, .$$

Une fonction $f : E \to \mathbb{C}$ à valeurs complexes sera dite intégrable si $\mathfrak{R}(f)$ et $\mathfrak{I}(f)$ sont intégrables (ce qui équivaut à dire que $|f|$ est intégrable) et on pose

$$\int f d\mu = \int \mathfrak{R}(f) d\mu + i \int \mathfrak{I}(f) d\mu \, .$$

Là encore, cette définition de l'intégrale satisfait des propriétés attendues (croissance, linéarité, etc), ainsi que le théorème fondamental suivant.

Théorème 3 (Théorème de convergence dominée)**.** *Soit $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une suite de fonctions mesurables telles que*

1. *(f_n) converge μ-presque partout vers une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$*
2. *il existe une fonction intégrable $g : E \to [0, \infty]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $|f_n| \leqslant g$ μ-p.p.*

Alors f est intégrable et

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu \, .$$

Définition 8. Soit $f : E \to \mathbb{C}$ mesurable. Pour $p \in [1, \infty[$, on définit

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \inf \Big\{ M > 0 \, \Big| \, |f| \leqslant M \ \mu\text{–p.p.} \Big\} \, .$$

1.2 Exercices

Exercice 1.

Montrer qu'une fonction continue $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est mesurable pour les tribus boréliennes sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $x \in E$. On définit la mesure de Dirac en x par $\forall A \in \mathcal{A}, \ \delta_x(A) = \mathbf{1}_{x \in A}$. Montrer que δ_x est bien une mesure.

Exercice 3.

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et soit $f : E \to [0, +\infty]$. Montrer qu'il existe une suite croissante (f_n) de fonctions étagées positives qui converge simplement vers f.

Exercice 4.

Soit μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ et soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

1. Supposons $f \geqslant 0$. Comment s'exprime alors $\int f d\mu$?

2. À quelle condition une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est intégrable pour μ ? Que vaut $\int f d\mu$ dans ce cas ?

Exercice 5.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

1. On suppose (A_n) croissante (i.e. $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n). Montrer que $\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$.

2. On suppose (A_n) décroissante et $\mu(A_0) < \infty$. Montrer que $\mu\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$.

3. Est-ce toujours vrai si l'on enlève l'hypothèse $\mu(A_0) < \infty$?

Exercice 6.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \longrightarrow [0, \infty]$.

1. Montrer que $\int f d\mu = 0$ si et seulement si $f = 0$ μ-presque partout, i.e. $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$.

2. Supposons que $\int f d\mu < \infty$. Montrer qu'alors $f < \infty$ μ-presque partout.

Exercice 7.

1. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit une suite de fonctions intégrables $f_n : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$.

a. On suppose $f_n \geqslant 0$ pour tout n. Montrer qu'alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_E f_n d\mu = \int_E \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) d\mu$.

b. On suppose $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < \infty$. Montrer qu'alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_E f_n d\mu = \int_E \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) d\mu$.

2. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx$.

Exercice 8.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. On définit

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \nu(A) = \int_A f d\mu = \int_E f \mathbf{1}_A d\mu\ .$$

1. Montrer que ν est une mesure.

2. Montrer que pour toute fonction $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable, $\displaystyle\int \varphi d\nu = \int \varphi f d\mu$.

Exercice 9.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int |f| \mathbf{1}_{\{|f|>n\}} d\mu = 0$.

2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) < \delta \implies \int_A |f| d\mu < \varepsilon$.

Exercice 10.

Soit $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

1. On suppose que $\mu(E) < \infty$. Montrer que f est intégrable si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \mu(\{|f| \geqslant n\}) < \infty$.

2. Est-ce toujours vrai si $\mu(E) = \infty$?

Exercice 11.

Trouver la limite de la suite $I_n = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t^n} dt$.

Exercice 12.

Pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, calculer l'intégrale $J(a) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx$.

2 Intégrales à paramètres

2.1 Rappels de cours

$(E, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

Théorème 4 (Continuité sous le signe intégrale)**.**
Soient U un espace métrique, $f : U \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ et $u_0 \in U$. On suppose que

1. *pour tout $u \in U$, $x \mapsto f(u,x)$ est mesurable sur E,*
2. *pour μ-presque tout $x \in E$, $u \mapsto f(u,x)$ est continue en u_0 (resp. sur U),*
3. *il existe $g : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que pour tout $u \in E$, $\mu(dx)$-p.p. on ait $|f(u,x)| \leqslant g(x)$.*

Alors $F(u) = \displaystyle\int_E f(u,x)\mu(dx)$ est bien définie sur U et continue en u_0 (resp. sur U).

Théorème 5 (Dérivation en un point sous le signe intégrale)**.**
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ et $u_0 \in I$. On suppose que

1. *pour tout $u \in U$, $x \mapsto f(u,x)$ est intégrable sur E,*
2. *pour μ-presque tout $x \in E$, $u \mapsto f(u,x)$ est dérivable en u_0 de dérivée $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)$,*
3. *il existe $g : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que l'on ait*

$$\forall u \in I,\ \mu(dx) - p.p., \quad |f(u,x) - f(u_0,x)| \leqslant g(x)|u - u_0|\ .$$

Alors $F(u) = \displaystyle\int_E f(u,x)\mu(dx)$ est bien définie sur U, dérivable en u_0 et $F'(u_0) = \displaystyle\int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,x)\mu(dx)$.

Théorème 6 (Dérivation en un point sous le signe intégrale)**.**
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \times E \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose que

1. *pour tout $u \in I$, $x \mapsto f(u,x)$ est intégrable,*
2. *pour μ-presque tout $x \in E$, $u \mapsto f(u,x)$ est dérivable sur tout I de dérivée $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)$,*
3. *il existe $g : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que l'on ait*

$$\forall u \in I,\ \mu(dx) - p.p., \quad \left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leqslant g(x)\ .$$

Alors $F(u) = \displaystyle\int_E f(u,x)\mu(dx)$ est bien définie et dérivable sur I, et pour tout $u \in I$, $F'(u) = \displaystyle\int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\mu(dx)$.

Théorème 7 (Holomorphie sous le signe intégrale)**.** **[Amar-Matheron]**
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et $f : \Omega \times E \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose que

1. *pour tout $u \in \Omega$, $x \mapsto f(u,x)$ est mesurable sur E,*
2. *pour tout $x \in E$, $u \mapsto f(u,x)$ est holomorphe sur Ω,*
3. *pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $g_K : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable t.q. pour tout $(u,x) \in K \times E$, $|f(u,x)| \leqslant g_K(x)$.*

Alors $F(u) = \displaystyle\int_E f(u,x)\mu(dx)$ est bien définie et holomorphe sur Ω, et pour tout $u \in \Omega$, $F'(u) = \displaystyle\int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\mu(dx)$.

2.2 Exercices

Exercice 13.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ intégrable.
En notant λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, pour $x \in I$, on adopte la notation usuelle

$$\int_a^x f(t)dt = \begin{cases} \int_{[a,x]} f d\lambda & \text{si } x \geqslant a, \\ -\int_{[x,a]} f d\lambda & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $x \in I$, on pose alors $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

1. Montrer que F est continue sur I.

2. Supposons que $I = [a, b[$ avec $b \in]a, +\infty]$. Montrer que $\lim_{x\to b} F(x) = \int_I f d\lambda$.

3. Supposons que f est continue sur I. Montrer qu'alors F est dérivable sur I et $F' = f$.

4. Soit $g \in \mathscr{C}^1(I)$. Montrer que pour tout $x \in I$, $\int_a^x g'(t)dt = g(x) - g(a)$.

5. Généraliser la propriété de la question précédente au cas où g est dérivable sur I avec g' bornée.
Pour cela, on pourra considérer la suite de fonctions $h_n(t) = n(g(t+\frac{1}{n}) - g(t))\mathbf{1}_{t<x-\frac{1}{n}}$.

Exercice 14.

Pour $t > 0$, on pose $f(t) = \dfrac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}} \log^2(t)}$.
Est-ce que f est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$? et sur $[2, +\infty[$?

Exercice 15.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable. On définit la transformée de Fourier de f par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx \; .$$

1. Montrer que $\hat{f}$ est bien définie et que $|\hat{f}| \leqslant \|f\|_1$.

2. Montrer que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Supposons que $\int_{\mathbb{R}} |x||f(x)|dx < \infty$.
Montrer que $\hat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\hat{f}\,'$ est la transformée de Fourier de $x \mapsto -ixf(x)$.

4. Généraliser à un ordre supérieur en supposant que $\int_{\mathbb{R}} |x|^k |f(x)|dx < \infty$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

5. Dans cette question, on considère $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.
En utilisant la propriété précédente, montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \hat{f}(0) e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.
(On verra dans l'exercice 18 que $\hat{f}(0) = 1$.)

Exercice 16.

Pour $s > 0$, on pose

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx \; .$$

1. Montrer que Γ est bien définie et $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. En considérant la suite de fonctions

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1} \mathbf{1}_{0<x<n} \; ,$$

montrer que pour tout $s > 0$,

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)} \; .$$

3 Théorèmes de Fubini

3.1 Rappels de cours

Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $(F, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés.

Définition 9. On définit la tribu produit de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sur $E \times F$ par

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma\big(\{\, A \times B\,,\ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\,\}\big)\ .$$

Théorème 8. *On suppose que μ et ν sont σ-finies.*
Il existe une unique mesure sur $(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ notée $\mu \otimes \nu$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \forall B \in \mathcal{B}, \quad (\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)\ .$$

On l'appelle la mesure produit de μ et ν.

Exemple 4. La mesure de Lebesgue λ_n sur $\mathbb{R}^n$ est le produit n-fois de λ avec elle-même.
Par conséquent, si $P = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ est un pavé dans $\mathbb{R}^n$, on a $\lambda_n(P) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.
Dans les intégrales, la mesure $\lambda_n(dx)$ sera simplement notée dx, ou bien $dx_1 \dots dx_n$ si l'on veut préciser les variables réelles.

Théorème 9 (Théorème de Fubini-Tonelli)**.** *On suppose que μ et ν sont σ-finies.*
Soit $f : E \times F \longrightarrow [0, \infty]$ mesurable. Alors

- *$x \mapsto \int_F f(x, y)\nu(dy)$ est mesurable sur E,*
- *$y \mapsto \int_E f(x, y)\mu(dx)$ est mesurable sur F,*
- *et*
$$\int_{E\times F} f d(\mu \otimes \nu) = \int_E \left(\int_F f(x, y)\nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_F \left(\int_E f(x, y)\mu(dx) \right) \nu(dy)\ .$$

Théorème 10 (Théorème de Fubini-Lebesgue)**.** *On suppose que μ et ν sont σ-finies.*
Soit $f : E \times F \longrightarrow [0, \infty]$ intégrable pour $\mu \otimes \nu$. Alors

- *$\mu(dx)$-p.p., $y \mapsto f(x, y)$ est ν-intégrable,*
- *$\nu(dy)$-p.p., $x \mapsto f(x, y)$ est μ-intégrable,*
- *$x \mapsto \int_F f(x, y)\nu(dy)$ est définie μ-p.p. et μ-intégrable,*
- *$y \mapsto \int_E f(x, y)\mu(dx)$ est définie ν-p.p. et ν-intégrable,*
- *et*
$$\int_{E\times F} f d(\mu \otimes \nu) = \int_E \left(\int_F f(x, y)\nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_F \left(\int_E f(x, y)\mu(dx) \right) \nu(dy)\ .$$

Théorème 11 (Changement de variable dans $\mathbb{R}^d$)**.**
Soient U, V des ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi : U \longrightarrow V$ un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.
Pour toute fonction $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable positive, ou bien λ_d-intégrable, on a

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\varphi(x))|J\varphi(x)|dx$$

où $|J\varphi(x)|$ désigne le déterminant de la matrice jacobienne $J\varphi(x)$ de φ en x, (et où les deux membres existent simultanément lorsque f est de signe quelconque).

Théorème 12 (Théorème du changement de variables polaires dans $\mathbb{R}^d$)**.** **[Faraut]**
On note ω la mesure de surface sur la sphère S de $\mathbb{R}^d$. Alors pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_0^\infty \int_S f(r\theta)\omega(d\theta)r^{d-1}dr\ .$$

Cette égalité est valable aussi si $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est λ_d-intégrable, avec existence simultanée des deux membres.

3.2 Exercices

Exercice 17.

1. Calculer de deux manières $I = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dxdy$.

2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2-1} dx$.

Exercice 18.

On pose $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$.

1. Montrer que $I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$.

2. En déduire que $I = \sqrt{\pi}$.

3. Calculer $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\boldsymbol{x}\|^2} d\boldsymbol{x}$.

4. En déduire la superficie $\omega(S)$ de la sphère unité S de $\mathbb{R}^n$ (en fonction de $\Gamma(\frac{n}{2})$).

Exercice 19.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, et $f : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Montrer que

$$\int_E f d\mu = \int_0^{\infty} \mu(\{f > t\}) dt \ .$$

Exercice 20.

On va étudier pour $t \geqslant 0$ l'intégrale

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx \ .$$

1. **a.** Montrer que $F(t)$ existe pour tout $t > 0$.
b. En calculant $\int_0^1 \cos(xy) dy$, montrer que $F(t) = \arctan(\frac{1}{t})$ pour tout $t > 0$.

2. On définit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx := \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx$ (intégrale semi-convergente).
a. Montrer que I est bien semi-convergente, c'est-à-dire que la limite existe.
b. Pour $x \geqslant 0$, on pose

$$G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \ .$$

Montrer que G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et que G tend vers zéro en $+\infty$.
c. Montrer que

$$\forall t > 0, \quad F(t) = G(0) - t \int_0^{+\infty} G(x) e^{-tx} dx \ .$$

d. Montrer que $\lim_{t \to 0}(F(t) - G(0)) = 0$ et en déduire la valeur de I.

3. Montrer que $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable (au sens de Lebesgue) sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 21. [Faraut]

Pour $x, y \geqslant 0$, on pose $f(x,y) = e^{-xy} \sin x$.

1. Montrer que pour tout $A > 0$, f est intégrable sur $[0, A] \times [0, +\infty[$.

2. Montrer que $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 22. Intégration par parties généralisée [Briane-Pagès]

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrables sur tout intervalle borné.
Soit $x \geqslant 0$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_0^x g(t)dt$.
En appliquant le théorème de Fubini à $(t, s) \mapsto \mathbf{1}_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant x} f(t)g(s)$, montrer que

$$\int_0^x f(t)G(t)dt = F(x)G(x) - \int_0^x F(t)g(t)dt \ .$$

Exercice 23. Formule du changement de variables en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ [Faraut]

Posons $U = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ et pour $(r, \theta) \in U$, définissons

$$\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \ .$$

1. Montrer que φ réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de U sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^2$ que l'on déterminera.
2. En déduire que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dxdy = \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta \ rdr \ .$$

3. En déduire aussi que cette formule est vraie pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ intégrable, avec existence simultanée des deux membres.

Exercice 24. Formule du changement de variables en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$ [Faraut]

Posons $U = \mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[\times]-\pi, \pi[$ et pour $(r, \theta, \varphi) \in U$, définissons

$$h(r, \theta, \varphi) = (\ r\sin\theta\sin\varphi\ ,\ r\sin\theta\sin\varphi\ ,\ r\cos\theta\ ) \ .$$

1. Montrer que h réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de U sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^3$ que l'on déterminera.
2. En déduire que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)dxdydz = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr \ .$$

3. En déduire aussi que cette formule est vraie pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ intégrable, avec existence simultanée des deux membres.

Exercice 25. [Faraut]

Soient f, g deux fonctions de carré intégrable sur $]0, +\infty[$. On note $D =]0, +\infty[^2$.
1. Montrer que

$$\int_D \frac{f(x)\overline{g(y)}}{x+y}dxdy = \int_0^\infty \frac{1}{1+t}\left(\int_0^\infty f(ty)\overline{g(y)}dy\right)dt,$$

(On prendra soin de montrer que toutes les intégrales existent.)
2. En déduire qu'il existe $A > 0$ ne dépendant pas de f, g telle que

$$\left|\int_D \frac{f(x)\overline{g(y)}}{x+y}dxdy\right| \leqslant A\|f\|_2\|g\|_2 \ .$$

4 Espaces L^p

4.1 Rappels de cours

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ équipé de sa tribu borélienne et de la restriction à Ω de la mesure de Lebesgue λ.
Soit $p \in [1, \infty]$. On note $q \in [1, \infty]$ l'exposant conjugué de p (défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Théorème 13. ***Inégalité de Jensen***
Supposons que μ est une mesure de probabilité, et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction convexe.
Pour toute fonction μ-intégrable $f : E \to \mathbb{R}$, on a

$$\varphi\left(\int f d\mu\right) \leqslant \int \varphi \circ f d\mu \,.$$

Théorème 14. ***Inégalité de Hölder***
Pour toutes fonctions $f, g : E \to \mathbb{K}$ mesurables,

$$\int_E |fg| d\mu \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \,.$$

Remarque 1. Supposons $1 < p, q < \infty$, $\|f\|_p < \infty$ et $\|g\|_q < \infty$. Alors on a le cas d'égalité dans Hölder si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ μ-presque partout. **[Briane-Pagès]**

Corollaire 1. ***Inégalité de Minkowski***
Pour toutes fonctions $f, g : E \to \mathbb{K}$ mesurables,

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \,.$$

Proposition 3. ***Définition de L^p***
On note $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ (ou $L^p(E)$ ou simplement L^p lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité) l'ensemble des fonctions $f : E \to \mathbb{K}$ mesurables telles que $\|f\|_p < \infty$, quotienté par l'égalité μ-presque partout. Ainsi, L^p est un espace vectoriel, et l'application $\|\cdot\|_p$ passe au quotient et définit une norme sur L^p.

Théorème 15. ***Théorème de Riesz-Fischer***
$L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Banach.

Corollaire 2. *$L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int_E f \bar{g} d\mu \,.$$

Proposition 4. *Toute suite de Cauchy de L^p admet une sous-suite qui converge μ-presque partout. En particulier, toute suite convergente de L^p admet une sous-suite qui converge μ-presque partout.*

Exemple 5.

- Sur $\mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage, pour $p < \infty$, l'espace $L^p(\mathbb{N})$ s'identifie à l'ensemble des suites $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum |u_n|^p < \infty$. Cet espace est souvent noté $\ell^p(\mathbb{N})$.
- Sur $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue, pour $p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{K}$ telles que $\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$, quotienté par l'égalité presque partout.

Théorème 16. *On suppose que $p < \infty$.*

1. *L'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(E)$.*
2. *L'ensemble des combinaisons linéaires d'indicatrices de pavés est dense dans $L^p(\Omega)$.*
3. *$\mathscr{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Remarque 2. Vous aurez régulièrement besoin de travailler avec des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques. Ces fonctions s'identifient à des fonctions définies sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On peut munir $\mathbb{T}$ d'une tribu borélienne et d'une mesure de Lebesgue normalisée μ. Ainsi les éléments de $L^p(\mathbb{T})$ sont des classes de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurables, 2π-périodiques, et la norme associée est

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \quad (p < \infty) \quad , \quad \|f\|_\infty = \inf\{\, M > 0 \mid |f| \leqslant M \text{ p.p. } \} \,.$$

4.2 Exercices

Exercice 26.

1. Est-ce que la suite de fonctions $f_n(x) = n\cos(nx)\mathbf{1}_{[2\pi, 2\pi+\frac{1}{n^2}]}(x)$ converge dans $L^1(\mathbb{R})$?

2. Est-ce que la suite de fonctions $n\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$ converge dans $L^1(\mathbb{R})$?

3. Est-ce que la suite de fonctions $\mathbf{1}_{[n,n+1]}$ converge dans $L^1(\mathbb{R})$?

Exercice 27.

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que $f(\lambda x) \longrightarrow 0$ dans L^2 quand $\lambda \longrightarrow +\infty$.

Exercice 28.

1. Est-ce que la convergence L^1 entraîne la convergence presque partout ?

2. Est-ce que la convergence presque partout entraîne la convergence L^1 ?

Exercice 29.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $p \in [1, +\infty[$.
Montrer que l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(E)$.

Exercice 30.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soient $1 \leqslant p \leqslant r \leqslant q \leqslant \infty$ et soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable.
Montrer que $\|f\|_r \leqslant \|f\|_p^{\alpha}\|f\|_q^{1-\alpha}$ avec $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$.

Exercice 31.

1. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) < \infty$. Montrer que $L^p(E, \mathcal{A}, \mu) \subset L^q(E, \mathcal{A}, \mu)$ si $p \geqslant q$.

2. Soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$. Montrer que

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_q \leqslant \|x\|_p \leqslant \|x\|_1 \ .$$

Exercice 32.

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de f par $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx$.

1. Montrer que l'on définit ainsi une application linéaire continue $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$.

2. Montrer que pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ tend vers zéro à l'infini.

Exercice 33.

Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on notera ℓ^p l'espace L^p sur $\mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage.
Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, on définit

$$Lx = (x_{n+1})_{n\geqslant 0} \quad \text{et} \quad Rx = (x_{n-1}\mathbf{1}_{n\geqslant 1})_{n\geqslant 0} \ .$$

Les applications L et R sont respectivement appelés shift à gauche et shift à droite.

1. Montrer que $L \in \mathcal{L}(\ell^p)$ et $R \in \mathcal{L}(\ell^p)$ et calculer leurs normes d'opérateur.

2. Montrer que L est surjectif mais pas injectif et que R est injectif mais pas surjectif.

Exercice 34.

Soit $p \in]1, \infty[$. Pour $f \in L^p(0, \infty)$, on pose $Tf(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt\ , \quad (x > 0)$.

1. Montrer que Tf est une fonction continue dans $L^p(0, \infty)$ qui tend vers 0 en $+\infty$.

2. Montrer que $\|Tf\| \leqslant q\|f\|_p$ où q est l'exposant conjugué de p.
(On pourra commencer par supposer $f \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R})$ et utiliser une intégration par parties.)

3. Montrer que $\|T\| = q$. (On pourra considérer $f_n(x) = x^{-1/p}\mathbf{1}_{1\leqslant x\leqslant n}$.)

Exercice 35. Preuve du théorème de Riesz-Fischer [Rudin], [Faraut]

1. On suppose d'abord $p < \infty$.

a. Soit (g_n) une suite de fonctions mesurables positives. Montrer que

$$\Big\| \sum_{n=0}^{\infty} g_n \Big\|_p \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_p \,.$$

b. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^p. Montrer qu'on peut extraire (f_{n_k}) telle que $\sum_k \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \infty$.

c. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ converge absolument μ-presque partout.

d. On pose

$$f(x) = f_{n_0}(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\Big(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\Big)$$

(qui existe pour presque tout x). Montrer que $f \in L^p$ et que $f_{n_k} \longrightarrow f$ dans L^p.

e. Conclure.

2. Traiter maintenant le cas $p = \infty$.

Exercice 36. Continuité de l'opérateur de translation sur $L^p(\mathbb{R}^d)$ et applications [Hirsch-Lacombe]

Soit $p \in [1, \infty[$. Pour $h \in \mathbb{R}^d$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on note $\tau_h f(x) = f(x-h)$.

1. Montrer que $\tau_h : f \longmapsto \tau_h f$ est une isométrie de $L^p(\mathbb{R}^d)$.

2. **a.** Montrer que pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0 \,, \quad \text{et} \quad \lim_{|h| \to +\infty} \|\tau_h f - f\|_p = 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \,.$$

b. Ces résultats persistent-ils lorsque $p = \infty$?

3. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx \xrightarrow[|\xi| \to \infty]{} 0 \,.$$

Indication : On pourra remarquer que pour $\xi \neq 0$, $\hat{f}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi(x+\frac{\pi}{\xi})} dx$.

Exercice 37. [Faraut]

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f \in L^q(E)$ pour un certain $q \in [1, \infty[$.

1. Montrer que pour tout $p \geqslant 1$ et tout $\alpha > 0$,

$$\mu(\{x \in E \mid |f(x)| \geqslant \alpha\})^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{\alpha} \|f\|_p \,.$$

En déduire que $\liminf\limits_{p \to \infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty$.

2. On suppose que $f \in L^\infty(E)$. Montrer que pour tout $p > q$,

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty^{1-\frac{q}{p}} \|f\|_q^{\frac{q}{p}} \,.$$

3. En conclure que $\lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

5 Convolution

5.1 Rappels de cours

Définition 10. Soient $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ deux fonctions mesurables. Lorsque cela a un sens, on définit la **convolution** $f * g$ de f et g par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy \,.$$

Si cette intégrale existe, on a immédiatement

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy = g * f(x) \,.$$

Théorème 17. *Soient $p, q \in [1, \infty]$ des exposants conjugués (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).*

1. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g(x)$ existe pour presque tout x et définit $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie*
$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1 \,.$$
2. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g(x)$ existe pour presque tout x et définit $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie*
$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p \,.$$
3. *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g(x)$ existe pour tout x et définit $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie*
$$\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \,.$$
De plus, $f * g$ est uniformément continue. Enfin, si $1 < p < \infty$, alors $\lim_{|x| \to \infty} f * g(x) = 0$.

Théorème 18. *Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est localement intégrable (c'est-à-dire, intégrable sur tout compact), et si $\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ et à support compact, alors $\alpha * f$ est définie partout et de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}^d$. De plus, pour tout multi-indice j de poids $\leqslant k$, on a*

$$\partial^j (\alpha * f) = (\partial^j \alpha) * f \,.$$

En particulier, si α est $\mathscr{C}^\infty$, alors les fonctions $\alpha * f$ sont $\mathscr{C}^\infty$.

Définition 11. On appelle **approximation de l'unité** une suite (α_n) de fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^d$, d'intégrale 1 et telles que

$$\forall \delta > 0, \quad \int_{|x| > \delta} \alpha_n(x) dx \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \,.$$

Cette définition est la même que celle donnée dans **[Hirsch-Lacombe]**. En revanche, la définition donnée dans **[Briane-Pagès]** n'impose pas $\alpha_n \geqslant 0$.

Proposition 5. *Si $\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ est mesurable d'intégrale 1, alors*

$$\alpha_n(x) = n^d \alpha(nx)$$

définit une approximation de l'unité. Autrement dit, on obtient une approximation de l'unité en renormalisant n'importe quelle densité de probabilité.

Théorème 19. *Soit (α_n) une approximation de l'unité.*

1. *Si $f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^d)$, alors $\alpha_n * f$ converge vers f uniformément sur les compacts.*
2. *Si $p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors $\alpha_n * f$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Remarque 3. On prendra garde au fait que les preuves habituelles du point 2 s'appuient sur la densité de $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}^d)$ (voir Exercices 36 et 41).

Définition 12. Une **suite régularisante** est une approximation de l'unité composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à supports compacts.

Théorème 20. *Si $p < \infty$, alors $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Convolution périodique

Théorème-Définition 21. *Si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, alors on définit la convolution périodique de f et g par*

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y)g(x-y)dy$$

qui existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, et définit une fonction $f * g \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$.

Si de plus $f \in L^p(\mathbb{T})$, alors $f * g \in L^p(\mathbb{T})$ et $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1$.

Définition 13. On appelle approximation de l'unité périodique une suite (α_n) de fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, telles que pour tout n, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha_n(x)dx = 1$ et qui vérifient

$$\forall \delta > 0, \quad \int_{\delta < |x| < \pi} \alpha_n(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ .$$

Théorème 22. *Soit (α_n) une approximation de l'unité périodique.*

1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue. Alors $\alpha_n * f$ converge uniformément vers f.*
2. *Si $p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{T})$, alors $\alpha_n * f$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{T})$.*

Remarque 4. Cette notion de convolution périodique permet d'obtenir efficacement les premiers résultats de convergence relatifs aux séries de Fourier, voir l'explication dans l'Exercice 48.

5.2 Exercices

Exercice 38. Preuve du Théorème 17 (cas $p < \infty$)

Soit $p \in [1, \infty[$, soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

On suppose que $\|g\|_1 \neq 0$ et on pose $h = \frac{|g|}{\|g\|_1}$.

1. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)h(x-y)|dy \right)^p dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p h(x-y)dydx \ .$$

2. En déduire que $f * g(x)$ existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

3. Montrer que $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1$.

4. Montrer que le résultat est trivial lorsque $\|g\|_1 = 0$.

Exercice 39. Preuve du Théorème 18 en dimension 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable sur les compacts, et $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ à support compact.

1. Montrer que $\alpha * f(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que $\alpha * f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\alpha * f)' = \alpha' * f$.

Exercice 40. Preuve du Théorème 19, cas $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}^d)$

Soit (α_n) une approximation de l'unité et soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$.

1. On suppose que f est continue bornée sur $\mathbb{R}^d$.
Montrer que $\alpha_n * f$ est bien définie et que $\alpha_n * f$ tend vers f uniformément sur les compacts.

2. On suppose f continue et qu'il existe un compact A tel que $\mathrm{Supp}(\alpha_n) \subset A$ pour tout n.
Montrer que $\alpha_n * f$ est bien définie et que $\alpha_n * f$ tend vers f uniformément sur les compacts.

Exercice 41. Preuve du Théorème 19, cas L^p

1. Soit (α_n) une approximation de l'unité, et soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. On suppose $p < \infty$.
a. Montrer que

$$\alpha_n * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\alpha_n(y)dy$$

définit une fonction $\alpha_n * f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

b. Montrer que $\|\alpha_n * f - f\|_p^p \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p^p \, \alpha_n(y)dy$.

c. En déduire que

$$\alpha_n * f \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_p} f \ .$$

d. Est-ce que ce résultat persiste pour $p = \infty$?

2. (Preuve du Théorème 20) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert.
Montrer que $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $p < \infty$.

Exercice 42. Il existe des suites régularisantes. [Briane-Pagès]

Il s'agit de construire $\alpha \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ à support compact non identiquement nulle.

1. Montrer que la fonction $\rho : t \longmapsto \exp(-\frac{1}{t})\mathbf{1}_{t>0}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\alpha : x \mapsto \rho(1-|x|^2)$ répond à la question et que de plus $\mathrm{Supp}(\alpha) = \overline{B}(0,1)$.

Exercice 43. Fonctions B-splines

1. Soient $f = \mathbf{1}_{[-1,1]}$ et $g = \mathbf{1}_{[-a,a]}$ avec $a \geqslant 1$. Calculer $f * g$ et tracer son graphe.
Construire des fonctions $\chi_n \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}, [0,1])$ telles que $\chi_n = 1$ sur $[-n,n]$ et $\chi_n = 0$ sur $[-n-1, n+1]^c$.

2. Posons $B_0 = \mathbf{1}_{[0,1]}$ puis par récurrence $B_{n+1} = B_n * \mathbf{1}_{[0,1]}$.
Montrer que pour $n \geqslant 1$, B_n est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$. Quel est le support de B_n ?

Exercice 44.

Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

1. Montrer que $f * g(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

2. Montrer que $(f,g) \mapsto f * g$ est continue de $L^2 \times L^2$ dans L^∞.

3. En déduire que $f * g \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 45.

Montrer que $D = \{\, f \in \mathscr{C}^1([0,1]) \mid f(1) = 0 \,\}$ est dense dans $L^1([0,1])$.

Exercice 46. Théorème de Weierstrass par convolution

On définit $Q_n(t) = c_n(1-t^2)^n$ sur $[-1,1]$ où c_n est choisi de telle sorte que $\int_{-1}^1 Q_n = 1$.

1. Vérifier que

$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt \geqslant \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-nt^2)dt$$

et en déduire que $c_n < \sqrt{n}$.

2. Soit $f \in \mathscr{C}([0,1])$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. On prolonge à $\mathbb{R}$ les fonctions f et Q_n par 0.
Vérifier que $f * Q_n$ coïncide sur $[0,1]$ avec une fonction polynômiale P_n.
Montrer que $P_n \to f$ uniformément sur $[0,1]$.

3. Montrer que les fonctions polynômiales sont denses dans $\mathscr{C}([0,1])$.

Exercice 47. Version lisse du lemme d'Urysohn

Soient K un compact de $\mathbb{R}^n$ et ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tels que $K \subset \omega$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni d'une distance d.

1. Montrer que $\rho := d(K, \omega^c) > 0$.

2. Fixons $\eta < \frac{\rho}{2}$ et notons $L = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,K) \leqslant \eta \}$.
Introduisons aussi $\beta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ de support $\overline{B}(0,\eta)$ et d'intégrale 1.
Vérifier que la fonction $\chi = \mathbf{1}_L * \beta$ est $\mathscr{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $[0,1]$, qu'elle vaut 1 sur K et 0 sur ω^c.

Exercice 48. Noyaux de Dirichlet et Fejér

Pour $N \geqslant 1$, on définit respectivement les noyaux de Dirichlet et Fejér par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$D_N(x) = \sum_{|n| \leqslant N} e^{inx} \quad \text{et} \quad K_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) \ .$$

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f * D_N(x) = \sum_{|n| \leqslant N} c_n(f) e^{inx} \quad \text{où} \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \ .$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$D_N(x) = \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})\,x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \ , \quad \text{et} \quad K_N(x) = \sum_{|n| \leqslant N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{inx} = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin\frac{Nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 \ .$$

3. Montrer que (K_N) est une approximation de l'unité périodique.

4. En déduire que les polynômes trigonométriques sont denses dans l'espace $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme.

5. En déduire aussi que les polynômes trigonométriques sont denses dans $L^p(\mathbb{T})$ pour $p < \infty$.
Est-ce vrai pour $p = \infty$?