ENS Cachan — **Mathématiques**
Préparation à l'agrégation — **Année 2017/2018**

Distributions Tempérées

Arthur Leclaire

Références

[Bony] J.M. Bony. *Théorie des Distributions et Analyse de Fourier.* Éditions de l'École Polytechnique, 2006.

[GW] C. Gasquet et P. Witomski. *Analyse de Fourier et Applications.* Dunod, 2001.

[Zuily] C. Zuily. *Problèmes de distributions et d'équations aux dérivées partielles.* Cassini, 2010.

[DW] R. Dalmasso et P. Witomski. *Analyse de Fourier et Applications. Exercices corrigés.* Masson, 1996.

[S] L. Schwartz. *Théorie des distributions.* Hermann, 1997.

Table des matières

Notations

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On note $\mathcal{D}(\Omega) = \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ et $\mathcal{E}(\Omega) = \mathscr{C}^\infty(\Omega)$.
Si $K \subset \Omega$, on note $\mathcal{D}_K(\Omega)$ l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support compact inclus dans K.
On rappelle que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des fonctions f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ telles que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad N_p(f) := \sup_{|\alpha| \leqslant p, |\beta| \leqslant p} \ \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\beta \partial^\alpha f(x)| < \infty \ .$$

Cet espace est muni de la famille dénombrable de semi-normes $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et est donc métrisable.

1 Distributions et distributions tempérées

1.1 Définitions, opérations

Définition 1. Une distribution sur Ω est une forme linéaire T définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ et qui vérifie la condition de continuité suivante : pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $r \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leqslant c \sup_{|\alpha| \leqslant r} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty \; .$$

On notera $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω.

Définition 2. Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Autrement dit, une distribution tempérée est une forme linéaire T sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leqslant c \sup_{|\alpha| \leqslant p, |\beta| \leqslant p} \|x^\beta \partial^\alpha \varphi\|_\infty \; .$$

On notera $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions tempérées.

Exemple 1.

- Toute fontion localement intégrable sur Ω définit une distribution.
- Toute fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et majorée par un polynôme définit une distribution tempérée.
- Toute fonction $L^p(\mathbb{R}^d)$ définit une distribution tempérée.
- Toute mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$ définit une distribution tempérée.
- La fonction exponentielle ne définit pas une distribution tempérée.

Remarque 1. Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leqslant c \sup_{|\alpha| \leqslant p, |\beta| \leqslant p} \|x^\beta \partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

alors il existe une unique forme linéaire continue sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ qui prolonge T.

Les espaces $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ sont munis d'une addition et d'une multiplication scalaire.

Définition 3. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$, on définit la multiplication de f par T par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle \; .$$

Définition 4. On dit qu'une suite de distributions $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n \to \infty]{} \langle T, \varphi \rangle \; .$$

Exemple 2. Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $h \in \mathbb{R}^d$, on définit les distributions $\check{T}$ et $\tau_h T$ en posant

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad \langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T(x), \varphi(-x) \rangle \; , \quad \langle \tau_h T, \varphi \rangle = \langle T(x), \varphi(x+h) \rangle \; ,$$

On peut vérifier que $\tau_h T \to T$ quand $h \to 0$ au sens des distributions.

1.2 Dérivation

Définition 5. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on définit la dérivée partielle $\partial^\alpha T$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle \ .$$

Exemple 3. La fonction de Heaviside $H = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ admet pour dérivée au sens des distributions δ_0.

Théorème 1. *Soit I un intervalle ouvert.*

1. *Les distributions T sur I vérifiant $T' = 0$ sont les fonctions constantes.*
2. *Pour toute $U \in \mathcal{D}'(I)$, il existe $T \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $T' = U$.*

Remarque 2. Plus généralement, si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\frac{\partial T}{\partial x_d} = 0$, alors il existe une distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d-1})$ telle que $T(x_1, \dots, x_d) = S(x_1, \dots, x_{d-1})$ dans le sens suivant :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad \langle T, \varphi \rangle = \left\langle S(x_1, \dots, x_{d-1}), \int_{\mathbb{R}} \varphi(x_1, \dots, x_{d-1}, x_d) dx_d \right\rangle \ .$$

Théorème 2 (Formule des sauts)**.** *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $]a, b[$. On note $a_1 < \dots < a_n$ les points de discontinuité de f. Alors la dérivée de f au sens des distributions est donnée par*

$$f' = \{f'\} + \sum_{i=1}^{n} (f(a_i+) - f(a_i-)) \delta_{a_i} \ ,$$

où $\{f'\}$ désigne la fonction continue par morceaux égale à f' en dehors de points a_i (et prenant en les a_i une valeur arbitraire).

Théorème 3. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.*

— *Si on définit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ avec f localement intégrable sur I, alors F est une distribution sur I dont la dérivée au sens des distributions est f.*

— *Réciproquement, si F est une distribution sur I dont la dérivée au sens des distributions est une fonction localement intégrable f, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $F(x) = c + \int_a^x f(t)dt$ p.p. $x \in I$.*

1.3 Support, distributions à support compact

On rappelle que $\mathcal{E}(\Omega) = \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ est muni des semi-normes $f \mapsto \sup_{K_j} \|\partial^\alpha f\|_\infty$ où (K_j) est une suite exhaustive de compacts de Ω, et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, qui lui confère une structure d'espace métrique.

Théorème-Définition 1 (Support)**.** *Soit T une distribution sur Ω. Il existe un plus grand ouvert sur lequel T s'annule. Son complémentaire est appelé support de la distribution T.*

Théorème 4. *Une distribution à support compact s'étend en une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}(\Omega)$, de manière unique. Réciproquement, une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}(\Omega)$ définit une distribution à support compact. On notera donc $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions à support compact.*

Remarque 3. Toute distribution à support compact est tempérée.

2 Transformée de Fourier

2.1 Construction

On rappelle que pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi x} f(x)dx$ par définition, et que

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\varphi(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{\varphi}(x)dx \ .$$

Cette formule va nous permettre de prolonger la transformée de Fourier à $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Définition 6. Pour $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, on définit $\hat{T} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ en posant

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle \ .$$

Ceci définit effectivement une distribution tempérée $\hat{T}$ appelée transformée de Fourier de T.

Exemple 4.

- On a $\widehat{\delta_0} = 1$.
- Cette définition prolonge bien les définitions de transformée de Fourier sur L^1 et L^2.
- Si μ est une mesure de probabilité, $\check{\hat{\mu}}$ est la fonction caractéristique de μ.

2.2 Propriétés

Théorème 5. *L'application $T \mapsto \hat{T}$ réalise un isomorphisme de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même, et*

$$\hat{\hat{T}} = (2\pi)^d \check{T} \ .$$

Théorème 6. *Pour toute $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,*

$$\widehat{\partial^\alpha T} = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{T} \ , \qquad \widehat{x^\alpha T} = i^{|\alpha|}\partial^\alpha \widehat{T} \ .$$

2.3 Espaces de Sobolev H^s

Soit $s \in \mathbb{R}$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^d$, on notera $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Définition 7. On définit $H^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \mid \langle \xi \rangle^s \hat{T}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}$.
C'est un espace de Hilbert pour la norme $\|T\|_{H^s} = \|\langle \xi \rangle^s \hat{T}(\xi)\|_2$.

Remarque 4.

- $(H^s(\mathbb{R}^d))_{s\in\mathbb{R}}$ est décroissante. En particulier, pour $s \geqslant 0$, on a $H^s(\mathbb{R}^d) \subset H^0(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^d)$.
- Lorsque $s = 1$, $H^1(\mathbb{R}^d)$ est bien l'espace des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ qui admettent une dérivée faible dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. La norme $\| \cdot \|_{H^s}$ est équivalente à $(\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$

Théorème 7. *Si $s > \frac{d}{2}$, $H^s(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$ avec injection continue.*

3 Convolution

3.1 Encore d'autres cadres de convolution

Théorème-Définition 2. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. On suppose que T ou φ est à support compact. On définit la convolution de T et φ en posant*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad T * \varphi(x) = \langle T(y), \varphi(x-y) \rangle \ .$$

Cela définit une fonction $T * \varphi$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\mathrm{Supp}(T * \varphi) \subset \mathrm{Supp}(T) + \mathrm{Supp}(\varphi)$.

Théorème-Définition 3. *Soient $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. On suppose que T ou S est à support compact. On définit la convolution de T et S en posant*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad \langle T * S, \varphi \rangle = \langle T(x), \langle S(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \ .$$

De façon équivalente,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad \langle T * S, \varphi \rangle = \big(T * (S * \check{\varphi})\big)(0) \ .$$

Théorème 8. *Soient $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ dont l'une est à support compact.*

(a) $T * S = S * T$.

(b) $\forall U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *à support compact,* $(T * S) * U = T * (S * U)$.

(c) $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), \quad \delta_0 * T = T$.

(d) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad \partial^\alpha (T * S) = T * (\partial^\alpha S) = (\partial^\alpha T) * S$.

(e) $\mathrm{Supp}(T * S) \subset \mathrm{Supp}(T) + \mathrm{Supp}(S)$.

3.2 Lien avec la transformée de Fourier

Définition 8. On dit que $f \in \mathcal{O}_M$ si f est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ telle que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$, il existe $c > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\partial^\beta f(x)| \leqslant c(1 + |x|)^m \ .$$

Proposition 1. *Si $f \in \mathcal{O}_M$, alors $T \mapsto fT$ est définie et continue de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.*

Théorème 9. *Si T est une distribution sur $\mathbb{R}^d$ à support compact, et si U est une distribution tempérée, alors $T * U$ est tempérée, $\widehat{T} \in \mathcal{O}_M$, et l'on a*

$$\widehat{T * U} = \widehat{T}\widehat{U} \ .$$

3.3 Solutions élémentaires

Définition 9. Soit A une distribution à support compact sur $\mathbb{R}^d$.

On dit que $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est solution élémentaire de A si $A * E = \delta_0$.

Théorème 10. *Soit A une distribution sur $\mathbb{R}^d$ à support compact possédant une solution élémentaire E. Soit f une distribution à support compact sur $\mathbb{R}^d$.*

1. *L'équation $A * u = f$ admet au moins une solution donnée par $u = E * f$.*
2. *Il existe au plus une solution de $A * u = f$ qui soit à support compact.*

Exemple 5. Une solution élémentaire de $-\delta_0'' + \delta_0$ est une distribution E telle que $-E'' + E = \delta_0$. Une fois calculée une telle solution élémentaire, alors pour un second membre f, la convolution $E * f$ (pour peu qu'elle ait un sens) est un bon candidat de solution de $-E'' + E = f$. Le théorème précédent assure que cela vaut dès que f est est une distribution à support compact.

3.4 Équations d'évolution

Dans cette partie, on considérera des fonctions $u(t,x)$ à deux variables $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Définition 10. Si $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, on définit la transformée de Fourier partielle (en espace) par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \hat{\varphi}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi x} \varphi(t,x) dx \ .$$

Si $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, on définit la transformée de Fourier partielle par

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d+1}), \quad \langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle \ .$$

Remarque 5. Les propriétés vues au dessus vont s'étendre à la transformée de Fourier partielle. En particulier, les dérivées par rapport à la variable d'espace x vont être changées en mutiplication par des polynômes, alors que les dérivées par rapport au temps t passent à travers :

$$\widehat{\partial_x^\alpha u} = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{u} \ , \qquad \widehat{\partial_t^k u} = \partial_t^k \hat{u} \ .$$

Remarque 6. En pratique, on aura parfois besoin de ne pas considérer tous les temps $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, il est possible de définir les distributions partiellement tempérées en x comme étant les distributions $u \in \mathcal{D}'(I \times \mathbb{R}^d)$ telles que pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}(I)$, la distribution $\psi(t)u(t,x)$ (prolongée par zéro) est un élément de $\mathscr{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$.

Remarque 7. En pratique, on sera parfois face à des équations d'évolution du type

$$\partial_t u = P(\partial_x) u$$

où $P(\partial_x)$ est une combinaison linéaire de dérivées partielles par rapport aux variables d'espace. On retiendra essentiellement qu'on pourra prendre la transformée de Fourier par rapport à x, en considérant le paramètre de temps t comme fixé. Ainsi dans le domaine de Fourier l'opérateur $P(\partial_x)$ devient la multiplication par le polynôme $P(i\xi)$ de sorte qu'on obtient, "sur chaque fréquence ξ" une EDO linéaire que l'on résout aisément.

3.5 Distributions périodiques

Définition 11. Une distribution $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est dite a-périodique ($a > 0$) si $\tau_a U = U$.

Exemple 6. Soit $a > 0$, on définit le peigne de Dirac Π_a par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \Pi_a, \varphi \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(na) \ .$$

Ainsi, Π_a est une distribution a-périodique, qui est tempérée.

Définition 12. On dit qu'une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes est à croissance lente s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tels que $c_n = O(|n|^k)$.

Théorème 11. *Soit (c_n) une suite à croissance lente.*

1. *La série*
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{|n|\leqslant N} c_n \delta_n$$
converge au sens des distributions, et définit une distribution tempérée.
2. *La série*
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} := \lim_{N\to+\infty} \sum_{|n|\leqslant N} c_n e^{inx}$$
converge au sens des distributions, et définit une distribution 2π-périodique.

Théorème 12. *Soit U une distribution 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.*

1. *Il existe au moins une distribution u à support compact telle que $U = u * \Pi_{2\pi}$.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le nombre*
$$c_n(U) = \frac{1}{2\pi} \langle u(x), e^{-inx} \rangle$$
ne dépend pas du choix de u, et sera appelé n-ième coefficient de Fourier de U.
3. *On a*
$$U = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(U) e^{inx}$$
où la série désigne la limite quand $N \to +\infty$ de $\sum_{|n|\leqslant N}$ au sens des distributions.

Exemple 7. L'ingrédient essentiel des résultats précédents est la formule sommatoire de Poisson, qui au sens des distributions peut s'écrire

$$\Pi_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \widehat{\Pi_1} \qquad \text{i.e.} \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx} \ .$$

Ceci n'est autre que le développement en série de Fourier du peigne de Dirac Π_1.

4 Exercices prioritaires

4.1 Exercices sur le calcul de distributions

Exercice 1$^{\square}$. Calculs de distributions

1. Calculer les dérivées première et seconde de $x \mapsto |x|$.

2. Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, calculer $\partial^\alpha \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathcal{F}(x^\alpha) = (2\pi) i^\alpha \partial^\alpha \delta_0$. dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

4. Calculer $\widehat{\cos}$ et $\widehat{\sin}$.

Exercice 2$^{\square}$. ► DEV ◄ Valeur principale de $\frac{1}{x}$

1. Est-ce que $x \mapsto \frac{1}{x}$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$?

2. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{x} \mathbf{1}_{|x| \geqslant \varepsilon}$.
Vérifier que $f_\varepsilon \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ et montrer que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon$ existe au sens des distributions.

Ainsi, on définit la valeur principale de $\frac{1}{x}$ (souvent notée $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$) par

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad \langle V, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \ .$$

3. Montrer que ceci définit bien une distribution tempérée V sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que $xV = 1$.

5. Calculer la transformée de Fourier de V. (On pourra remarquer que V est impaire i.e. $\check{V} = -V$.)

6. En déduire $\widehat{H}$ et $\widehat{\mathrm{sgn}}$.

7. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on définit la convolution

$$V * \varphi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(x-y)}{y} dy \ .$$

Montrer que $\varphi \mapsto V * \varphi$ peut se prolonger en un opérateur linéaire continu sur $L^2(\mathbb{R})$.

8. (bonus) Montrer que $\log |x|$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 3. Équation $xT = 0$ [DW]

1. Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\theta(0) = 1$. Montrer que pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \varphi(0)\theta(x) + x\psi(x) \ .$$

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xT = 0$. Montrer que $T = c\delta_0$ où c est une constante.

3. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $xT = 1$. (On pourra s'inspirer de l'Exercice 2.)

Exercice 4. Transformée de Fourier de l'arctangente [DW]

1. On rappelle que $\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \pi e^{-|\xi|}$. Montrer que $\xi \cdot \widehat{\arctan}(\xi) = -i\pi e^{-|\xi|}$.

2. On définit $T(x) = \mathrm{vp}\left(\dfrac{e^{-|x|}}{x}\right)$ en posant $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \varphi \rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} e^{-|x|} dx$.

Montrer que T est une distribution tempérée qui vérifie $xT(x) = e^{-|x|}$.

3. En déduire la transformée de Fourier de l'arctangente.

4. En déduire la transformée de Fourier de $f(x) = \arctan(\frac{1}{x})$.

Exercice 5$^\square$. Équations de convolution

1. Considérons $A = \displaystyle\sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha \partial^\alpha \delta$. Calculer la convolution $A * u$.

2. Écrire l'équation $\Delta u = f$ sous forme $A * u = f$.

3. Écrire l'équation $u(x+h) - u(x) = f(x)$ sous forme $A * u = f$.

Exercice 6*. Transformée de Fourier des distributions à support compact

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ à support compact. On rappelle que T s'identifie à un élément de $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$, $F(z) = \langle T(x), e^{-izx} \rangle$ est bien définie.

2. Montrer que $F_{|\mathbb{R}}$ définit une distribution qui coïncide avec $\hat{T}$.

3. Montrer que la fonction F est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

4. En déduire que si T et $\hat{T}$ sont à supports compacts, alors $T = 0$.

Exercice 7*. Un cas de convolution

Soient $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. La convolution de T et φ est la fonction $\mathscr{C}^\infty$ définie par

$$T * \varphi(x) = \langle T(y), \varphi(x-y) \rangle \ .$$

Montrer que $T * \varphi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, puis que $\widehat{T * \varphi} = \hat{T}\hat{\varphi}$.

Exercice 8*. Distributions de support réduit à zéro

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Supp}(T) \subset \{0\}$.

1. On fixe $\theta \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ à support dans $]-1,1[$ et valant 1 sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Montrer que $T = \theta T$.

2. En déduire qu'il existe un compact $K \subset \mathbb{R}$, $c > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leqslant c \sup_{j \leqslant p} \sup_K |\varphi^{(j)}| \ .$$

3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi^{(j)}(0) = 0$ pour tout $j \leqslant p$. Montrer que $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

4. Montrer qu'il existe des constantes $a_0, \ldots, a_p$ telles que $T = \sum_{j=0}^{p} a_j \delta_0^{(j)}$.

4.2 Exercices sur les EDO et EDP linéaires

Exercice 9$^\square$. Équation $-u'' + u = f$ sur $\mathbb{R}$

1. En utilisant la transformée de Fourier, donner une solution élémentaire $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de $-\delta_0'' + \delta_0$.

2. Remarquer que les restrictions de E à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont solutions de $y'' = y$.
Retrouver ainsi le résultat de la question précédente en adaptant les conditions initiales en 0.

3. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$.

a. Résoudre $-u'' + u = f$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

b. Écrire la solution comme une convolution de f par une fonction à expliciter.

c. Analyser la régularité de u en fonction de celle de f. (On pourra utiliser les espaces $H^s(\mathbb{R})$)

Exercice 10$^\square$. ► DEV ◄ **Équation $-u'' + u = f$ sur $\mathbb{T}$**

Soit $f \in L^2(0, 2\pi)$. On considère l'équation différentielle avec conditions de bord périodiques

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = u(2\pi) \end{cases} .$$

On cherche des solutions au sens faible, c'est-à-dire qu'on cherche $u \in H^1(\mathbb{T})$ telle que

$$\forall \varphi \in H^1(\mathbb{T}), \quad \int_0^{2\pi} (u'\varphi' + u\varphi) = \int_0^{2\pi} f\varphi \, .$$

On notera $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier de la fonction f.

1. Soit $u \in H^1(\mathbb{T})$. Montrer que u est solution faible si et seulement si $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(u) = \dfrac{c_n(f)}{1+n^2}$.

2. On note Tf la solution faible associée au second membre $f \in L^2(\mathbb{T})$.
Montrer que $T : L^2(\mathbb{T}) \to H^1(\mathbb{T})$ est une application linéaire continue.

3. Montrer que $T : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ est un opérateur compact (c'est-à-dire que l'image par T de la boule unité fermée B de $L^2(\mathbb{T})$ est relativement compacte dans $L^2(\mathbb{T})$).

4. Montrer que T est un opérateur de convolution par un noyau (périodique) qu'on explicitera.

Exercice 11. Équation $-u'' = f$

1. Calculer les solutions élémentaires de $-\delta_0''$.

2. Soit $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $-u'' = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 12*. Équation de Poisson - $\Delta u = f$

Soit $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. On cherche les solutions faibles de l'équation $-\Delta u = f$.

1. On suppose que $\hat{f}$ s'annule au voisinage de 0, c'est-à-dire qu'il existe $r > 0$ tel que $\hat{f}$ s'annule sur $B(0, r)$. Montrer que l'équation $-\Delta u = f$ admet une solution $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.
Que se passe-t-il si l'on enlève l'hypothèse sur $\hat{f}$?

2. Résoudre dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'équation $\Delta u = 0$. (On pourra remarquer que $\mathrm{Supp}(\hat{u}) \subset \{0\}$).

En déduire aussi qu'une fonction harmonique qui tend vers zéro à l'infini est nulle.

3. Soit E l'ensemble des $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ pour lesquelles $-\Delta u = f$ admet une solution dans $L^2(\mathbb{R})$, nécessairement unique, notée $(-\Delta)^{-1} f$.

Montrer que $(-\Delta)^{-1} : E \longrightarrow L^2$ n'est pas continue pour la norme L^2.

4. Soit $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in L^\infty$. On suppose que $d \geqslant 3$.

Montrer que $-\Delta u = f$ admet une solution $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 13. ► DEV ◄ **[Zuily], [Bony, p.182]**

On définit la fonction $f : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{1}{|x|^s}$ pour $s \in (0, d)$.

1. Montrer que f est une distribution tempérée.

2. Calculer la transformée de Fourier de f. Indication : pour $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on pourra utiliser

$$\forall \lambda > 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda |x|^2} \hat{\varphi}(x) dx = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\lambda}} \varphi(\xi) d\xi \ ,$$

puis multiplier par $\lambda^{\frac{s}{2}-1}$ et intégrer sur $\lambda \in]0, \infty[$.

3. En déduire que $E : x \longmapsto \frac{-1}{4\pi |x|}$ est une solution élémentaire du laplacien dans $\mathbb{R}^3$.

Remarque : Les deux exercices précédents montrent qu'en dimension $\geqslant 3$, lorsqu'elle existe, une solution raisonnable de $-\Delta u = f$ sera la convolution de f par la fonction $E(x) = \frac{c}{|x|^{d-2}}$ (où c est une constante dépendant de la dimension). L'étude de ces opérateurs de convolution (appelés potentiels de Riesz) fait l'objet de l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev, qui exprime leur continuité de L^p dans L^q pour p, q bien choisis, et dont la preuve repose sur une technique d'interpolation réelle.

Exercice 14. Autour de l'équation de Poisson [Bony]

Soit $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ (ou alors $f \in L^2(\mathbb{R})$, à votre guise).

1. On rappelle que Δ admet une solution élémentaire E de classe $\mathscr{C}^\infty$ en dehors de l'origine. Montrer que $u = E * f$ est solution de $\Delta u = f$, et que u est $\mathscr{C}^\infty$ en dehors du support de f. Les autres solutions diffèrent d'une fonction harmonique.

2. Montrer que si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifie $\Delta u = 0$, alors $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$.

Exercice 15. Solution élémentaire du laplacien dans $\mathbb{R}^2$

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose $f(x, y) = \log r$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

On rappelle l'expression du laplacien en coordonnées polaires $\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \neq (0,0)$, $\Delta f(x, y) = 0$.

2. Montrer que $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

3. Montrer que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \quad \langle \Delta f, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r \geqslant \varepsilon} f \Delta\varphi dx dy \ .$$

4. Montrer que $\Delta f = 2\pi\delta_0$

Exercice 16. ► DEV ◄ **Équation de transport**

On va chercher des solutions faibles $u(t, x)$ de l'équation de transport

$$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) = f & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

pour différents types de conditions initiales f. Le paramètre de vitesse est une constante $c \neq 0$. La première équation doit se comprendre à l'aide des dérivées faibles ∂_t, ∂_x. La deuxième équation doit être interprétée comme $\lim_{t \to 0} u(t, \cdot) = f$ à condition de pouvoir lui donner un sens.

1. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ partiellement tempérée en espace qui vérifie $\partial_t u + c\partial_x u = 0$.

a. En utilisant la transformée de Fourier partielle, montrer qu'il existe $u_0 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ telle que

$$\hat{u}(t, \xi) = \widehat{u_0}(\xi) e^{-ict\xi} \quad \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ .$$

b. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on peut donner un sens à $u(t, \cdot)$, plus précisément

$$u(t, \cdot) = \tau_{ct} u_0 \ .$$

c. Montrer que $\tau_{ct} u_0 \longrightarrow u_0$ au sens des distributions quand $t \longrightarrow 0$.

2. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on définit pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(t, x) = f(x - ct) \ .$$

a. Montrer que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $u(t, \cdot)$ est une fonction $L^p(\mathbb{R})$.

b. Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, calculer la transformée de Fourier de $u(t, \cdot)$.

c. Montrer que u est une distribution tempérée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

d. Montrer que u vérifie $\partial_t u + c\partial_x u = 0$ au sens faible.

e. Montrer que pour $p < \infty$, on a $u(t, \cdot) \longrightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{R})$.

3. Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On définit la distribution $u(t,x) = f(x-ct)$ en posant

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}), \quad \langle u, \varphi \rangle = \left\langle f(x), \int_{\mathbb{R}} \varphi(t, x+ct)dt \right\rangle .$$

a. Montrer que l'on définit bien ainsi $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

b. Montrer que $\partial_t u + c\partial_x u = 0$.

c. En interprétant $u(t,\cdot)$ comme $\tau_{ct} f$, montrer que $\lim_{t\to 0} u(t,\cdot) \to f$ au sens des distributions.

Exercice 17. ► DEV ◄ **Équation de la chaleur**

On va chercher des solutions faibles $u(t,x)$ de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \\ u(0,\cdot) = f & \text{sur } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

pour différents types de conditions initiales f. La première équation doit se comprendre à l'aide des dérivées faibles ∂_t, Δ. La deuxième équation doit être interprétée comme $\lim_{t\to 0} u(t,\cdot) = f$ à condition de pouvoir donner un sens.

1. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ partiellement tempérée en espace qui vérifie $\partial_t u = \Delta u$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$.

En utilisant la transformée de Fourier partielle, montrer qu'il existe $u_0 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\hat{u}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi) e^{-t|\xi|^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d .$$

2. Pour $t > 0$, on introduit $k_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. On rappelle que $\widehat{k_t}(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$.

a. On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Montrer que la formule

$$u(t,x) = k_t * f(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy$$

définit une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$ qui vérifie $\partial_t u = \Delta u$.
Montrer de plus que $u(t,\cdot)$ tend vers f dans L^1 quand $t \to 0$.

b. Adapter la question précédente pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

c. On suppose que $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Montrer que

$$u(t,x) = \langle f(x-y), k_t(y) \rangle$$

définit une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$ qui vérifie $\partial_t u = \Delta u$.
(On peut montrer que $u(t,\cdot) \to f$ au sens des distributions quand $t \to 0$.)

4.3 Exercices sur l'échantillonnage de signaux

Exercice 18. Autour de la formule sommatoire de Poisson

Pour $a > 0$, on rappelle que le peigne de Dirac Π_a a été introduit dans l'Exemple 6.

1. Montrer que $\Pi_a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

2. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Calculer $f\Pi_a$.

3. Soit T une distribution à support compact sur $\mathbb{R}$. Calculer $T * \Pi_a$.

4. On rappelle que

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) \, .$$

En déduire que $\widehat{\Pi_a} = \dfrac{2\pi}{a}\Pi_{\frac{2\pi}{a}}$.

5. Soit $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une suite N-périodique. On considère $U = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n)\delta_n$.

Exprimer $\widehat{U}$ en fonction de la transformée de Fourier discrète de u définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{Z}, \quad \hat{u}(\xi) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-2i\pi \frac{\xi n}{N}} \, .$$

Exercice 19. Toutes les séries de Fourier convergent... au sens des distributions [GW]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et intégrable sur $[0, 2\pi]$. On pose $g = f\mathbf{1}_{[0,2\pi]}$.

1. Montrer que $f = g * \Pi_{2\pi}$.

2. En déduire que f est une distribution tempérée et que $\hat{f} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{g}(n)\delta_n$.

3. Déduire de ce qui précède que

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \, , \quad \text{où} \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \, ,$$

où la série désigne la limite quand $N \to +\infty$ de $\sum_{|n|\leqslant N}$ au sens des distributions.

Exercice 20. Formule sommatoire de Poisson, généralisation [Rapport 2017]

Soit u une distribution à support compact sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la distribution $u * \Pi_{2\pi}$.

2. En utilisant la formule sommatoire de Poisson $\widehat{\Pi_{2\pi}} = \Pi_1$, montrer que

$$u * \Pi_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}(n) e^{inx} \, .$$

Exercice 21. Autour de l'échantillonnage [Rapport 2017]

Posons $\sin_c(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$. On rappelle que $\widehat{\sin_c} = \mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}$. Le théorème d'échantillonnage de Shannon affirme que si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est telle que $\mathrm{Supp}(\hat{f}) \subset [-\pi, \pi]$, alors

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \sin_c(x - n) \,,$$

avec convergence $L^2(\mathbb{R})$ et convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

1. Expliquer la forme de cette formule en exploitant la transformée de Fourier du peigne de Dirac (voir Exercice 18).

2. Que se passe-t-il si on lève l'hypothèse $\mathrm{Supp}(\hat{f}) \subset [-\pi, \pi]$?

Examiner le cas de $g(x) = \cos(\omega x)$ avec $\omega > 0$ fixé.

Examiner le cas de $f + g$ avec $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Supp}(\hat{f}) \subset [-\pi, \pi]$.

5 Exercices complémentaires

Exercice 22. Montrer que la fonction exponentielle n'est pas dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.
Indication : on pourra fixer $\varphi \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R})$, puis majorer les semi-normes des translatées de φ.

Exercice 23. Distributions et équations différentielles d'ordre 1 et 2 [Zuily]

1. Soient $f \in \mathscr{C}^\infty(I)$ et $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ où $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Résoudre dans $\mathcal{D}'(I)$ l'équation différentielle $T' + fT = g$.

2. Soit $k \in \mathbb{R}$.

a. Calculer les solutions élémentaires de l'opérateur différentiel $\frac{d}{dx} + k$.

b. On note f_k l'unique solution élémentaire à support dans $\mathbb{R}_+$.

Soit $g \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ à support dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que $f_k * g$ est bien définie et est solution de

$$T' + kT = g \,.$$

3. Calculer les solutions élémentaires de $\frac{d^2}{dx^2} + 2\alpha\frac{d}{dx} + \beta^2$.

Exercice 24. Distributions et EDO linéaires à coefficients constants

On considère $\mathcal{D}'_+ = \{\ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Supp}(u) \subset [0, \infty[\ \}$. On admettra que la convolution définit une structure d'algèbre commutative et associative sur $\mathcal{D}'_+$ dont l'élément neutre est δ.

1. Montrer que pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \geqslant 1$, $(\delta' - \lambda\delta)^n$ est inversible d'inverse $= H(t)\dfrac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}$.

2. En déduire qu'une équation différentielle linéaire à coefficients constants (non tous nuls) possède toujours une solution élémentaire appartenant à $\mathcal{D}'_+$.

Exercice 25. Questions en lien avec le traitement de signal [Rapport 2017]

La résolution de cet exercice repose sur la bonne interprétation des questions.

1. Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$, $T > 0$, et $f_T = f\mathbf{1}_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}$. Vers quoi et en quel sens converge la série de Fourier associée à f_T quand $T \to \infty$?

2. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et 2π-périodique. On note $w_t(x) = e^{-\frac{x^2}{2t}}$ avec $t > 0$.
Vers quoi et en quel sens converge le produit $w_t h$ quand $t \to \infty$?

3. Soient $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, et $T_1, T_2 > 0$. On considère la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi(x - nT_1)\sin\left(\frac{2\pi x}{T_2}\right)$.

a. Montrer que f est bien définie et que $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

b. Calculer la transformée de Fourier de f.

Exercice 26. Transformée de Fourier d'un signal à temps discret [Rapport 2017]

Soit $x = (x_n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Pour $T > 0$, on définit $\hat{x}(\theta) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{2i\pi n\frac{\theta}{T}}$.

1. Comment retrouver (x_n) à partir de $\hat{x}$?

2. Faire le lien avec la transformée de Fourier au sens des distributions.

3. Comment interpréter le paramètre T en termes de cadence d'échantillonnage ?
(À titre indicatif, on rappelle que la plupart des signaux sonores sont échantillonnés à 44,1 kHz.)

4. Examiner les propriétés de l'application $x \mapsto \hat{x}$.

5. Examiner le cas de la gaussienne discrétisée $x_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}$, avec $\sigma > 0$.

Exercice 27*. ► DEV ◄ Fonctions croissantes et convexes [Rapport 2017], [S]

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On fixe $a \in I$ arbitrairement

1. On suppose que f est croissante.

a. Montrer que f n'a qu'une infinité dénombrable de discontinuités.

b. Montrer que f est égale presque partout à une fonction continue à droite et admettant des limites à gauche en tout point.

c. En déduire qu'il existe une mesure positive μ sur I telle que $f(x) = f(a) + \int_a^x d\mu(t)$.

2. Montrer que f s'identifie presque partout à une fonction croissante si et seulement si sa dérivée au sens des distributions est une mesure positive.

3. On suppose f convexe.

a. Montrer que f est continue.

b. Montrer que f admet en tout point $x \in I$ des dérivées à gauche et à droite, $f'_g(x)$ et $f'_d(x)$. Montrer de plus que f'_g et f'_d sont croissantes et que $f'_g \leqslant f'_d$.

c. Montrer qu'il existe $g : I \to \mathbb{R}$ croissante telle que $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$ p.p.

4. Montrer que f est convexe si et seulement si sa dérivée seconde au sens des distributions est une mesure positive.

Exemples d'utilisation des distributions dans les leçons

Le contenu de cette feuille de TD fournit des thèmes d'étude qui pourront servir dans la préparation des leçons, notament en fournissant des exemples pertinents, et certains pourront faire l'objet de développements. À titre indicatif, on propose une correspondance ci-dessous.

À ce sujet voir l'Annexe A du rapport du jury 2017.

Théorème 1 : $T' = 0 \implies T$ constante
Leçon 228

Transformée de Fourier des mesures de probabilité
Leçons 239, 250, 261

Exercice 1. Calculs de distributions
Leçons 228, 250

Exercice 2. Valeur principale de $\frac{1}{x}$
Leçons 201, 207, 208, 234, 250

Exercice 3. Équation $xT = 0$
Leçon 218

Exercice 4. Transformée de Fourier de l'arctangente
Leçon 250

Exercice 5. Équations de convolution

Exercice 6. Transformée de Fourier des distributions à support compact
Leçons 201, 207, 235, 239, 245, 250

Exercice 7. Convolution $\mathscr{S}' * \mathscr{S}$
Leçons 201, 239, 250

Exercice 8. Distributions de support réduit à zéro
Leçons 207, 218

Exercice 9. Équation $-u'' + u = f$ sur $\mathbb{R}$
Leçons 201, 208, 220, 221, 228, 250

Exercice 10. Équation $-u'' + u = f$ sur $\mathbb{T}$
Leçons 201, 203, 208, 213, 220, 221, 228, 246

Exercice 11. Équation $-u'' = f$
Leçons 220, 221, 228, 250

Exercice 12. Équation de Poisson - $\Delta u = f$
Leçons 222, 250

Exercice 13. Transformée de Fourier de $|x|^{-s}$ avec $s \in (0, d)$
Leçons 201, 222, 239, 250

Exercice 14. Autour de l'équation de Poisson
Leçons 222, 250

Exercice 15. Solution élémentaire du laplacien dans $\mathbb{R}^2$
Leçons 215, 222

Exercice 16. Équation de transport
Leçons 222, 234, 250

Exercice 17. Équation de la chaleur
Leçons 201, 208, 222, 234, 239, 250

Exercice 18. Autour de la formule sommatoire de Poisson
Leçons 241, 246, 250

Exercice 19. Toutes les séries de Fourier convergent... au sens des distributions
Leçons 241, 246, 250

Exercice 20. Formule sommatoire de Poisson, généralisation
Leçons 235, 241, 246, 250

Exercice 21. Autour de l'échantillonnage
Leçons 213, 246, 250

Exercice 22. La fonction exponentielle n'est pas tempérée

Exercice 23. Distributions et équations différentielles d'ordre 1 et 2
Leçon 221

Exercice 24. Distributions et EDO linéaires à coefficients constants
Leçon 221

Exercice 25. Questions en lien avec le traitement de signal
Leçons 201 ? , 234 ? , 241, 246, 250

Exercice 26. Transformée de Fourier d'un signal à temps discret
Leçonn 246, 250

Exercice 27. Fonctions croissantes et convexes
Leçon 229