ENS Cachan **Mathématiques**
Préparation à l'agrégation **Année 2017/2018**

Analyse Fonctionnelle

Arthur Leclaire

Références

[B] H. Brézis. *Analyse Fonctionnelle.* Dunod, 1999.

[CLF] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, et V. Maillot. *Exercices de Maths pour l'Agrégation.* Masson, 1997.

[GT] S. Gonnord et N. Tosel. *Topologie et Analyse Fonctionnelle.* Ellipses, 1996.

[HL] F. Hirsch et G. Lacombe. *Elements d'Analyse Fonctionnelle.* Dunod, 1999.

[LM] G. Lacombe et P. Massat. *Analyse Fonctionnelle, Exercices corrigés.* Dunod, 1999.

[M] B. Maury. *Analyse Fonctionnelle.* Ellipses, 2004.

[S] L. Schwartz. *Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle.* Hermann, 2008.

[Wa] C. Wagschal. *Topologie et Analyse Fonctionnelle.* Hermann, 2012.

[Wi] M. Willem. *Analyse Fonctionnelle Élémentaire.* Cassini, 2003.

Les premiers chapitres du livre [B] forment un bon condensé des grands théorèmes de l'analyse fonctionnelle (la version anglophone contient des exercices corrigés). Le livre [HL] est aussi très clair et contient des exercices pertinents qui sont pour la plupart corrigés dans [LM]. On pourra aussi consulter le très concis [Wi] qui adopte une présentation un peu moins abstraite (mais attention aux notations peu standards). Les livres [Wa],[S] présentent les grands théorèmes de l'analyse fonctionnelle mais dans un cadre plus général que celui abordé ici. Les livres [LM], [M], [GT], [CLF] contiennent de nombreux exercices (les deux derniers étant plus difficiles).

Table des matières

1 Quelques Espaces Fonctionnels Classiques

1.1 Espaces à Semi-Normes

Dans ce paragraphe E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On renvoie à [S] pour le contenu de ce paragraphe.

Définition 1. Une **semi-norme** sur E est une application $p : E \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tous vecteurs $x, y, z \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$p(0) = 0$,
$p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$,
$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Si p est une semi-norme sur E, si $x \in E$ et $r > 0$, on notera

$$B_p(x, r) = \{ \, y \in E \mid p(x - y) < r \, \}$$

la p-semi-boule ouverte centrée en x est de rayon r.

On considère une famille $(p_i)_{i \in I}$ de semi-normes sur E. On munit E de la topologie $\mathcal{O}$ engendrée par la famille des semi-boules ouvertes

$$\{ \, B_{p_i}(x, r) \; ; \; i \in I \, , \; x \in E \, , \; r > 0 \, \} \, .$$

Pour cette topologie, on a les propriétés suivantes.

1. Les intersections finies de semi-boules ouvertes forment une base d'ouverts.
2. Un système fondamental de voisinages de $x \in E$ est donné par
$$\left\{ \bigcap_{j \in J} B_{p_j}(x, r_j) \; ; \; J \subset I \text{ finie} \, , \; r_j > 0 \right\} .$$
3. Une suite (x_n) d'éléments de E converge vers x si et seulement si
$$\forall i \in I, \quad p_i(x_n - x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \, .$$
4. La topologie $\mathcal{O}$ est séparée si et seulement si $(p_i)_{i \in I}$ est séparante, c'est-à-dire
$$\forall x \neq 0, \; \exists i \in I, \quad p_i(x) \neq 0 \, .$$
5. Soit F un autre espace vectoriel muni de la topologie définie par une famille de semi-normes $(q_k)_{k \in K}$. Une application linéaire $T : E \to F$ est continue si et seulement si pour tout $k \in K$, il existe $J \subset I$ finie et $M > 0$ tels que
$$\forall x \in E, \quad q_k(T(x)) \leqslant M \sup_{j \in J} p_j(x) \, .$$
6. Si I est fini et si (p_i) est séparante, alors il existe une norme sur E qui induise la topologie $\mathcal{O}$.

7. On suppose ici $I = \mathbb{N}$ et (p_i) séparante. La distance

$$d(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \min\Big(p_k(x - y) \,,\, 1 \Big) \,. \tag{1}$$

induit la topologie $\mathcal{O}$. De plus, (x_n) est de Cauchy pour d si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sup_{m,n \geqslant N} p_k(x_m - x_n) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \,.$$

Exercice 1. Montrer les propriétés ci-dessus.

On notera aussi que la topologie associée à une famille de semi-normes sur E rend continues l'addition (de $E \times E$ dans E) ainsi que la multiplication scalaire (de $\mathbb{K} \times E$ dans E). De plus, les intersections finies de semi-boules ouvertes centrées en x forment un système fondamental de voisinages convexes de x. En utilisant la jauge d'un convexe (cf. TD de topologie), on peut montrer qu'une topologie rendant continues l'addition et la multiplication scalaire et attribuant à tout point un système fondamental de voisinages convexes est nécessairement définie par une famille de semi-normes [S].

Définition 2. Un **espace de Fréchet** est un espace vectoriel muni d'une famille séparante dénombrable de semi-normes $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et qui est complet pour la distance d définie par (1).

1.2 Suites Régularisantes

Définition 3. On appelle **approximation de l'unité** une suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^d$, d'intégrale 1 et telles que

$$\forall \delta > 0, \quad \int_{|x|>\delta} \alpha_n(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \,.$$

C'est la définition donnée dans [BP] limitée à des fonctions à valeurs positives.

Proposition 1. *Si $\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ est mesurable d'intégrale 1, alors*

$$\alpha_n(x) = n^d \alpha(nx)$$

définit une approximation de l'unité. Autrement dit, on obtient une approximation de l'unité en renormalisant n'importe quelle densité de probabilité.

Exercice 2$^\square$. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ et soit (α_n) une approximation de l'unité.

Lorsque cela a un sens, on posera

$$\alpha_n * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)\alpha_n(y)dy \,.$$

1. On suppose que f est continue bornée sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que $\alpha_n * f$ est bien définie et que $\alpha_n * f$ tend vers f uniformément sur les compacts.

2. On suppose f continue et qu'il existe un compact A tel que $\mathrm{Supp}(\alpha_n) \subset A$ pour tout n. Montrer que $\alpha_n * f$ est bien définie et que $\alpha_n * f$ tend vers f uniformément sur les compacts.

Définition 4. Une **suite régularisante** est une approximation de l'unité composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à supports compacts.

Exercice 3. Il existe des suites régularisantes. [BP, Chap. 13]
Il s'agit de construire $\alpha \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ à support compact non identiquement nulle.

1. Montrer que la fonction
$$\rho : t \longmapsto \exp\Big(-\frac{1}{t}\Big)\mathbf{1}_{t>0}$$
est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\alpha : x \mapsto \rho(1-|x|^2)$ répond à la question et que de plus $\mathrm{Supp}(\alpha) = \overline{B}(0,1)$.

3. Montrer que $\varphi : t \mapsto \rho(t)\rho(1-t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et de support $[0,1]$. En déduire que $\alpha : x \mapsto \varphi(|x|^2)$ répond à la question. Montrer aussi que
$$\begin{array}{rccc} \psi & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & \frac{1}{\int \varphi}\displaystyle\int_0^u \varphi(t)dt \end{array} .$$
est une fonction positive $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\{\psi = 0\} =]-\infty, 0]$ et $\{\psi = 1\} = [1, +\infty[$.

Théorème 1. *Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est localement intégrable, et si $\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ et à support compact, alors on peut poser*
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\alpha(y)dy$$
ce qui définit une fonction $\alpha * f$ de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}^d$. De plus, pour tout multi-indice j de poids $\leqslant k$,
$$\partial^j(\alpha * f) = (\partial^j \alpha) * f .$$
En particulier, si (α_n) est une suite régularisante, alors les fonctions $\alpha_n * f$ sont $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 4. Version lisse du lemme d'Urysohn [BP, Chap. 13]

Soient K un compact de $\mathbb{R}^d$ et ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ tels que $K \subset \omega$.

1. Rappeler pourquoi $\rho := d(K, \omega^c)$ est > 0.

2. Fixons $\eta < \frac{\rho}{2}$ et notons $L = \{\, u \in \mathbb{R}^d \mid d(u,K) \leqslant \eta \,\}$. Introduisons aussi $\beta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ de support $\overline{B}(0,\eta)$ et d'intégrale 1 (voir Exercice 3). Vérifier que la fonction
$$\chi(x) = \mathbf{1}_L * \beta(x) = \int_L \beta(x-y)dy$$
est $\mathscr{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}^d$, à valeurs dans $[0,1]$, qu'elle vaut 1 sur K et 0 sur ω^c.

1.3 Espaces de Fonctions de Classe $\mathscr{C}^k$

On renvoie à [ZQ] pour cette sous-section.

Dans la feuille de TD précédente, nous avons étudié l'espace $\mathscr{C}(E)$ des fonctions continues sur un espace topologique E à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On a vu que $\mathscr{C}(E)$ pouvait être muni d'une métrique induisant la convergence uniforme et le rendant complet. On a vu aussi que $\mathscr{C}_b(E)$ était un espace de Banach pour la norme uniforme ; en particulier, si K est un espace topologique compact, $\mathscr{C}(K)$ est un espace de Banach.

Dans cette sous-section, on va s'intéresser à des espaces de fonctions régulières sur $\mathbb{R}^d$. On désignera par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Nous aurons besoin de la suite exhaustive de compacts

$$K_j = \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; \|x\| \leqslant j \text{ et } d(x, \Omega^c) \geqslant \frac{1}{j} \right\} \quad , \quad (j \geqslant 1) . \tag{2}$$

On a ainsi $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ et $\Omega = \bigcup K_j$. Partant d'une telle suite exhaustive, on peut construire une suite (χ_j) de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $[0,1]$ telles que

$$\chi_j = 1 \text{ sur } K_j \qquad \text{et} \qquad \chi_j = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^d \setminus \mathring{K}_{j+1}$$

(remarquez que la deuxième condition assure que $\mathrm{Supp}(\chi_j)$ est inclus dans K_{j+1} (mais pas dans $\mathring{K}_{j+1}$)). L'existence de telles fonctions plateaux est donnée par l'Exercice 4.

Théorème 2. *Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. L'espace $\mathscr{C}^k(\Omega)$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur Ω est muni de la famille dénombrable de semi-normes*

$$p_{j,\alpha}(f) = \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha f(x)| \quad (j \geqslant 1 \,,\ |\alpha| \leqslant k) \,,$$

qui induit la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de Ω de la fonction et de ses dérivées jusqu'à l'ordre k. Elle confère à $\mathscr{C}^k(\Omega)$ une structure d'espace de Fréchet. De plus, le sous-espace $\mathscr{C}^k_c(\Omega)$ des fonctions $\mathscr{C}^k$ sur Ω à support compact est dense dans $\mathscr{C}^k(\Omega)$. Mieux, $\mathscr{C}^\infty_c(\Omega)$ est dense dans $\mathscr{C}^k(\Omega)$. Enfin, si K est un compact inclus dans Ω, alors le sous-espace $\mathscr{C}^k_K(\Omega)$ des fonctions $\mathscr{C}^k$ sur Ω à support inclus dans K est un fermé de $\mathscr{C}^k(\Omega)$ (et donc est complet).

Exercice 5. Démonstration de ce théorème.

1. Montrer que (f_n) tend vers f dans $\mathscr{C}^k(\Omega)$ si et seulement si pour tout $|\alpha| \leqslant k$ et tout compact $K \subset \Omega$, $\partial^\alpha f_n \to \partial^\alpha f$ uniformément sur K.

2. Montrer que $\mathscr{C}^k(\Omega)$ est complet.

3. Montrer que $\mathscr{C}^k_c(\Omega)$ est dense dans $\mathscr{C}^k(\Omega)$.

4. Montrer que $\mathscr{C}^\infty_c(\Omega)$ est dense dans $\mathscr{C}^k(\Omega)$.

5. Montrer que $\mathscr{C}^k_K(\Omega)$ est fermé dans $\mathscr{C}^k(\Omega)$.

Remarque 1. Le théorème dit en particulier que $\mathscr{C}^k(\Omega)$ est complet pour une métrique associée à la famille dénombrable de semi-normes $(p_{j,\alpha})_{j\geqslant 1,|\alpha|\leqslant k}$ via la formule (1). On remarquera que cette définition suppose d'avoir choisi une énumération de la famille de semi-normes, et donc n'est pas canonique. En fait, le choix d'une telle métrique n'a pas vraiment d'importance, puisque toutes les métriques construites de cette manière induisent la même topologie, la même notion de convergence, et la même notion de suite de Cauchy. Cependant, dans la pratique, vous devez être capables d'écrire une telle distance. À titre d'exercice, on s'entraînera à le faire pour $\mathscr{C}(\Omega)$, $\mathscr{C}^k(\Omega)$ avec $k < \infty$, et $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$.

Théorème 3. *Pour $k < \infty$, l'espace $\mathscr{C}^k(\mathbb{T})$ des fonctions 2π-périodiques et de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ est un espace de Banach pour la norme*

$$\|f\|_{\mathscr{C}^k(\mathbb{T})} = \sup_{\substack{j\leqslant k\\ x\in[0,2\pi]}} |f^{(j)}(x)| .$$

Exercice 6$^\square$.

1. Est-ce que $\mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ est complet ?

2. Est-ce que $\mathscr{C}_c(\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme est complet ?

3. Est-ce que $\mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ est complet en tant que sous-espace de $\mathscr{C}(\mathbb{R})$?

4. Est-ce que $\mathscr{C}^1(]-1,1[)$ est complet en tant que sous-espace de $\mathscr{C}(]-1,1[)$?

Remarque 2. On notera bien que $\mathscr{C}_c^k(\Omega)$ n'est pas complet en tant que sous-espace de $\mathscr{C}^k(\Omega)$ (car il n'est pas fermé).

Exercice 7*. Caractérisation des compacts de $\mathscr{C}(\Omega)$ [HL, Chap.2, §1, Exo 12]

On va voir que $\mathcal{A} \subset \mathscr{C}(\Omega)$ est relativement compacte dans $\mathscr{C}(\Omega)$ si et seulement si

(i) $\mathcal{A}$ est équicontinue en tout point de Ω,

(ii) pour tout $x \in \Omega$, $\mathcal{A}(x) = \{ f(x) , f \in \mathcal{A} \}$ est borné.

1. Montrer que les conditions sont nécessaires.

2. On suppose (i) et (ii). Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

a. En utilisant le théorème d'Arzela-Ascoli sur chaque K_j, montrer que (f_n) admet une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction $f \in \mathscr{C}(\Omega)$.

b. Conclure.

Exercice 8*. ► DEV ◄ Caractérisation des compacts de $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ [ZQ]

On dit que $\mathcal{A} \subset \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ est bornée si pour tout voisinage V de zéro dans $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$, il existe $t_0 > 0$ tel que

$$\forall t \geqslant t_0, \quad \mathcal{A} \subset tV .$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est bornée si et seulement les dérivées des éléments de $\mathcal{A}$ sont uniformément bornées sur tout compact, c'est-à-dire que pour tout $j \geqslant 1$, et tout multi-indice α, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{A}, \quad \sup_{x\in K_j} |\partial^\alpha f(x)| \leqslant M .$$

2. On suppose que $\overline{\mathcal{A}}$ est compacte. Montrer que $\mathcal{A}$ est bornée.

3. On suppose que $\mathcal{A}$ est bornée. Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

a. En utilisant la caractérisation des compacts de $\mathscr{C}(\Omega)$ (cf. Exercice 7), montrer que l'on peut extraire de (f_n) une sous-suite $(f_{\psi(n)})$ telle que pour tout multi-indice α, $(\partial^\alpha f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction $f^\alpha \in \mathscr{C}(\Omega)$.

b. En déduire que $(f_{\psi(n)})$ converge vers une fonction f dans $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$.

c. En déduire que $\overline{\mathcal{A}}$ est compacte.

4. En déduire que $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ n'est pas normable.

Exercice 9. $\mathscr{C}^k(\Omega)$ n'est pas normable [ZQ]

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Supposons qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ qui induise la topologie de $\mathscr{C}^k(\Omega)$ (i.e. la topologie de la convergence localement uniforme des dérivées jusqu'à l'ordre k).

1. Montrer que $B = \{ f \in \mathscr{C}^k(\Omega) \mid \|f\| \leqslant 1 \}$ contient un ensemble de la forme

$$V = \left\{ f \in \mathscr{C}^k(\Omega) \mid \sup_{|\alpha|\leqslant l} p_{j,\alpha}(f) < \varepsilon \right\},$$

où $j \geqslant 1$ et $l \leqslant k$.

2. Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathscr{C}^k(\Omega)$ non identiquement nulle telle que $\forall \lambda > 0$, $\lambda\varphi \in B$.

3. Conclure.

Exercice 10. Espace $\mathscr{H}(\Omega)$, Théorème des familles normales [AM, §3.5]

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On note $\mathscr{H}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω qui est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

1. Montrer que $\mathscr{H}(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{C}(\Omega)$.

2. On dit que $\mathcal{A} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ est bornée si pour tout compact K,

$$\sup_{f\in\mathcal{A}} \sup_{x\in K} |f(x)| < \infty .$$

Montrer que $\overline{\mathcal{A}}$ est compacte dans $\mathscr{H}(\Omega)$ si et seulement si $\mathcal{A}$ est bornée.

Exercice 11$^{\square}$. Espace de Schwartz

On introduit l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ telles que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad N_p(f) := \sup_{\substack{|\alpha|\leqslant p \\ |\beta|\leqslant p}} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\beta \partial^\alpha f(x)| < \infty .$$

Cet espace est muni de la famille dénombrable de semi-normes $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est complet pour la distance

$$d(f,g) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^p} \min\Big(1 ,\ N_p(f-g) \Big) .$$

2. Montrer que l'injection canonique de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ est continue.

1.4 Espaces L^p

Le lecteur pourra trouver dans [BP] un exposé très détaillé sur les espaces L^p. Le livre [Far] donne quant à lui une présentation plus concise et plus accessible.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ équipé de sa tribu borélienne et de la restriction à Ω de la mesure de Lebesgue λ.

Soit $p \in [1, \infty]$. On note $q \in [1, \infty]$ l'exposant conjugué de p (qui vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Définition 5. Soit $f : E \to \mathbb{K}$ mesurable. Pour $p \in [1, \infty[$, on définit

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \inf \left\{ M > 0 \,\middle|\, |f| \leqslant M \ \mu\text{−p.p.} \right\} .$$

Théorème 4. ***Inégalité de Hölder***

Pour toutes fonctions $f, g : E \to \mathbb{K}$ mesurables,

$$\int_E |fg| d\mu \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

Remarque 3. Supposons $1 < p, q < \infty$, $\|f\|_p < \infty$ et $\|g\|_q < \infty$. Alors on a le cas d'égalité dans Hölder si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ μ-presque partout. N'oubliez pas les puissances, qui n'apparaissaient pas dans le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz. On renvoie à [BP] pour plus de détails sur ces cas d'égalité.

Corollaire 1. ***Inégalité de Minkowski***

Pour toutes fonctions $f, g : E \to \mathbb{K}$ mesurables,

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Proposition 2. ***Définition de L^p***

On note $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ (ou $L^p(E)$ ou simplement L^p lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité) l'ensemble des fonctions $f : E \to \mathbb{K}$ mesurables telles que $\|f\|_p < \infty$, quotienté par l'égalité μ-presque partout. Ainsi, L^p est un espace vectoriel, et la semi-norme $\|\cdot\|_p$ passe au quotient et définit une norme sur L^p.

Théorème 5. ***Théorème de Riesz-Fischer***

$L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Banach.

Corollaire 2. *$L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int_E f \bar{g} d\mu .$$

Exercice 12□. ► DEV ◄ Preuve du théorème de Riesz-Fischer [R], [Far]

1. Traiter le cas $p = \infty$.

2. On suppose maintenant $p < \infty$.

a. Soit $g_n : E \to \mathbb{R}$ mesurables positives. Montrer que

$$\Big\| \sum_{n=0}^{\infty} g_n \Big\|_p \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_p \ .$$

b. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^p. Montrer qu'on peut extraire (f_{n_k}) telle que

$$\sum_k \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \infty \ .$$

c. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ converge absolument μ-presque partout.

d. On pose

$$f(x) = f_{n_0}(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\Big(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\Big)$$

(qui existe pour presque tout x). Montrer que $f \in L^p$ et que $f_{n_k} \to f$ dans L^p.

e. Conclure.

Proposition 3. *Toute suite de Cauchy de L^p admet une sous-suite qui converge μ-presque partout. En particulier, toute suite convergente de L^p admet une sous-suite qui converge μ-presque partout.*

Exercice 13□. Trouver des contre-exemples illustrant les deux assertions suivantes.

1. La convergence μ-presque partout n'entraîne pas la convergence L^p.

2. La convergence L^p n'entraîne pas la convergence μ-presque partout.

Théorème 6. *On suppose que $p < \infty$.*

1. *L'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(E)$.*
2. *L'ensemble des combinaisons linéaires d'indicatrices de pavés est dense dans $L^p(\Omega)$.*
3. *$\mathscr{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Corollaire 3. *Pour $p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.*

Théorème 7. *Soit (α_n) une approximation de l'unité et soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.*

On suppose que $p < \infty$. Alors

$$\alpha_n * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\alpha_n(y)dy$$

définit une fonction $\alpha_n * f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$\alpha_n * f \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_p} f \ .$$

Remarque 4. On prendra garde au fait que les preuves habituelles de ce résultat s'appuient sur la densité de $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}^d)$ (voir Exercice 20).

Théorème 8. *Si $p < \infty$, alors $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Proposition 4. *Rappelons la définition de la suite exhaustive de compacts (K_j) donnée par (2). Notons $L^p_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{K}$ vérifiant*

$$\forall j \geqslant 1, \quad f\mathbf{1}_{K_j} \in L^p(K_j)$$

quotienté par la relation d'égalité presque partout. La famille dénombrable de semi-normes

$$q_j(f) = \|f\mathbf{1}_{K_j}\|_p \,, \quad (j \geqslant 1)$$

confère à $L^p_{loc}(\Omega)$ une structure d'espace de Fréchet.

Proposition 5. *Notons $L^p(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ vérifiant*

$$f(x) = f(x + 2\pi) \quad p.p.$$

quotienté par la relation d'égalité presque partout. Alors $L^p(\mathbb{T})$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

et $L^2(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx \,.$$

Exercice 14$^\square$.

Montrer que $D = \{\ f \in \mathscr{C}^1([0,1]) \mid f(1) = 0\ \}$ est dense dans $L^1([0,1])$.

Exercice 15$^\square$. Liens entre les L^p

1. On suppose que $\mu(E) < \infty$. Montrer que $q > p \Rightarrow L^q \subset L^p$.

2. Donner un contre-exemple dans le cas où $\mu(E) = \infty$.

Exercice 16. Étude de $\ell^p(\mathbb{N})$ [M]

Pour $p \in [1, \infty[$, on note ℓ^p l'espace des suites (x_n) telles que $\|x\|_p := \left(\sum |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty$.

On note aussi ℓ^∞ l'espace des suites (x_n) telles que $\|x\|_\infty := \sup |x_n| < \infty$.

1. Montrer que ℓ^p est un espace de Banach.

2. Montrer que pour toute suite (x_n) et tous $q > p$, on a $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_q \leqslant \|x\|_p \leqslant \|x\|_1$.

3. On suppose $p < \infty$.

a. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\delta_n = (\mathbf{1}_{m=n})_{m\in\mathbb{N}}$. Montrer que pour tout $x \in \ell^p$,

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \delta_n \ , \quad \text{où la série converge dans } \ell^p.$$

b. En déduire que le sous-espace des suites presque nulles est dense dans ℓ^p.
c. En déduire que ℓ^p est séparable.

Exercice 17.

1. Montrer que si $p < \infty$ ou si μ est sigma-finie, alors $\forall f \in L^p, \quad \|f\|_p = \sup\limits_{\substack{g\in L^q \\ \|g\|_q \leqslant 1}} \displaystyle\int fgd\mu$.

2. Montrer que le résultat n'est plus vrai lorsque $p = \infty$ et μ non sigma-finie (on pourra constuire un contre-exemple dans le cas $E = \{a, b\}$, $\mu(\{a\}) = 1$, $\mu(\{b\}) = \infty$).

Exercice 18. [B, Lemme IV.2]

Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega), \quad \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0 \ .$$

On va voir que $f = 0$ presque partout.

1. Montrer que l'on peut supposer Ω borné et $f \in L^1(\Omega)$. On le fera dans la suite.

2. On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $g \in \mathscr{C}_c(\Omega)$ telle que $\|f - g\|_1 < \varepsilon$.

3. Montrer que

$$K_+ = \{ \ x \in \Omega \mid g(x) \geqslant \varepsilon \ \} \quad \text{et} \quad K_- = \{ \ x \in \Omega \mid g(x) \leqslant -\varepsilon \ \}$$

sont des compacts inclus dans Ω. On notera $K = K_+ \cup K_-$.

4. Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$, valant 1 sur K_+ et -1 sur K_-.

Indication : On pourra utiliser la version lisse du lemme d'Urysohn, cf. Exercice 4.

5. **a.** Montrer que $\left| \int_\Omega g\varphi \right| \leqslant \varepsilon$.
b. Montrer que $\int_K |g| \leqslant \varepsilon + \int_{\Omega\setminus K} |g|$.
c. En déduire que $\int_\Omega |g| \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon|\Omega|$.
d. En déduire que $\|f\|_1 \leqslant 2\varepsilon + 2\varepsilon|\Omega|$ et conclure.

Remarque 5. À propos de l'exercice précédent, on pourra donner une preuve bien plus courte en utilisant une approximation de l'unité. Mais dans son livre, Brézis utilise le résultat de l'exercice pour montrer la densité de $\mathscr{C}_c(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$, $p < \infty$ (et il ne peut donc pas utiliser le résultat d'approximation de l'unité qui en découle).

Exercice 19. $L^\infty(\Omega)$ **n'est pas séparable [B]**

1. Pour tout $a \in \Omega$, on note $r_a = \sup\{\, r > 0 \mid B(a,r) \subset \Omega \,\}$, de sorte que $B(a, r_a) \subset \Omega$.
On note O_a la boule de $L^\infty(\Omega)$ centrée en $\mathbf{1}_{B(a,r_a)}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
Montrer que $(O_a)_{a\in\Omega}$ est une famille d'ouverts non vides disjoints deux à deux.

2. Montrer que $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.

Exercice 20$^\square$. Continuité de l'opérateur de translation sur $L^p(\mathbb{R}^d)$ **et applications**

Une partie de l'exercice se trouve dans [BP, Chap.13].

Pour $h \in \mathbb{R}^d$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on note $\tau_h f(x) = f(x-h)$.

1. Montrer que $\tau_h : f \longmapsto \tau_h f$ est une isométrie de $L^p(\mathbb{R}^d)$.

2. **a.** On suppose que $p < \infty$. Montrer que pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0 \ , \quad \text{et} \quad \lim_{|h|\to+\infty} \|\tau_h f - f\|_p = 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \ .$$

b. Ces résultats persistent-ils lorsque $p = \infty$?

3. (Preuve du Théorème 7) Soit (α_n) une approximation de l'unité, et soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. On suppose d'abord $p < \infty$.

a. Montrer que

$$\alpha_n * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\alpha_n(y)dy$$

définit une fonction $\alpha_n * f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

b. Montrer que $\|\alpha_n * f - f\|_p^p \leqslant \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p^p \, \alpha_n(y)dy$.

c. En déduire que

$$\alpha_n * f \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_p} f \ .$$

d. Est-ce que ce résultat persiste pour $p = \infty$?

4. (Preuve du Théorème 8) Montrer que $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $p < \infty$.

5. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $f' \in L^2(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe des $f_n \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ telles que f_n tend vers f dans L^2 et f_n' tend vers f' dans L^2.

6. [KLR, §8.3] Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0 \ .$$

Indication : On pourra remarquer que pour $\xi \neq 0$, $\quad \hat{f}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi(x+\frac{\pi}{\xi})}dx$.

L'objet des deux exercices suivants est la caractérisation des compacts de L^p. La technique de preuve est la même dans le cas de $\mathbb{R}^d$ et d'un ouvert quelconque Ω. Mais de petites difficultés techniques apparaissent dans le second cas, et c'est pourquoi on le traite dans un exercice séparé.

Exercice 21. ► DEV ◄ **Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov sur $\mathbb{R}^d$ [HL]**

Soit $p < \infty$ et soit $\mathcal{A} \subset L^p(\mathbb{R}^d)$.

On va voir que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si

(i) $\mathcal{A}$ est bornée dans $L^p(\mathbb{R}^d)$,

(ii) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{|x|>R} |f(x)|^p dx = 0$ uniformément par rapport à $f \in \mathcal{A}$,

(iii) $\displaystyle\lim_{a\to 0} \tau_a f = f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, uniformément par rapport à $f \in \mathcal{A}$.

1. Montrer que la relative compacité de $\mathcal{A}$ équivaut à sa précompacité.

2. Supposons $\mathcal{A}$ relativement compacte dans L^p. Montrer les propriétés (i), (ii), (iii).

3. Supposons (i), (ii), et (iii). Fixons (ρ_n) une suite régularisante telle que $\mathrm{Supp}(\rho_n) \subset \overline{B}(0, \frac{1}{n})$.

Donnons-nous $\varepsilon > 0$, $R > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d), \quad \|f - f * \rho_n\|_p \leqslant \sup_{|y|\leqslant 1/n} \|f - \tau_y f\|_p \, .$$

b. Notons B la boule fermée de $\mathbb{R}^d$ de rayon R.

Montrer que

$$\{ \, (f * \rho_n)_{|B} \, , \; f \in \mathcal{A} \, \}$$

est relativement compacte dans $\mathscr{C}(B)$. En déduire qu'il existe $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{A}$ telles que pour toute fonction $f \in \mathcal{A}$, il existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tel que

$$\forall x \in B, \quad |(f * \rho_n)(x) - (f_j * \rho_n)(x)| \leqslant \varepsilon \lambda(B)^{-1/p} \, .$$

c. Conclure en écrivant

$$|f - f_j| \leqslant |f| \mathbf{1}_{B^c} + |f_j| \mathbf{1}_{B^c} + |f - f * \rho_n| + |f_j - f_j * \rho_n| + |f * \rho_n - f_j * \rho_n| \mathbf{1}_B$$

et en ajustant soigneusement R et n.

Exercice 22*. ► DEV ◄ Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov sur Ω [B]

Soit $p < \infty$. On notera $\omega \subset\subset \Omega$ pour dire que $\overline{\omega}$ est compact et inclus dans Ω.

Soit (ρ_n) une suite régularisante telle que $\mathrm{Supp}(\rho_n) \subset \overline{B}(0, \frac{1}{n})$.

Soit $\mathcal{A} \subset L^p(\Omega)$. Pour $f \in L^p(\Omega)$, on note $\tilde{f}$ le prolongement de f par zéro sur $\mathbb{R}^d$.

1. On suppose que

(i) $\mathcal{A}$ est bornée dans $L^p(\Omega)$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \omega \subset\subset \Omega,\quad \sup\limits_{f \in \mathcal{A}} \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} \leqslant \varepsilon$,

(iii) $\forall \varepsilon > 0,\ \forall \omega \subset\subset \Omega,\ \exists \delta \in]0, d(\omega, \Omega^c)[,\quad \sup\limits_{|h|<\delta} \sup\limits_{f \in \mathcal{A}} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon.$

Fixons $\varepsilon > 0$ et $\omega \subset\subset \Omega$ vérifiant (ii).

a. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{A}_n = \{ (\tilde{f} * \rho_n)_{|\omega} \ ;\ f \in \mathcal{A} \}$ est relativement compacte dans $\mathscr{C}(\overline{\omega})$.

b. En déduire que $\mathcal{A}_\omega = \{ f_{|\omega} \ ;\ f \in \mathcal{A} \}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de $L^p(\omega)$ de rayon 2ε. En conclure que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$.

2. Montrer la réciproque.

Remarque 6. Si vous souhaitez proposer ce théorème en développement, vous devez savoir que le résultat est utilisé pour montrer une partie des injections de Sobolev. Dans ce cas, vous êtes vivement invités à travailler l'exercice suivant, ainsi que le Théorème VIII.7 de [B].

Exercice 23*. Espace de Sobolev en dimension 1 [B],[CLF2]

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $p \in [1, \infty]$. On définit $W^{1,p}(I)$ comme l'ensemble des fonctions $f \in L^p(I)$ telles qu'il existe $g \in L^p(I)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(I), \qquad \int_I \varphi'(x) f(x) dx = -\int_I \varphi(x) g(x) dx \ .$$

1. Montrer qu'une telle fonction g est nécessairement unique (on pourra penser à l'Exercice 18). Monter que si $f \in \mathscr{C}^1(I) \cap L^p(I)$, et si $f' \in L^p(I)$, alors $f \in W^{1,p}(I)$ avec $g = f'$.

Si $f \in W^{1,p}(I)$, on peut donc noter f' la fonction g apparaissant dans la définition.

2. On suppose ici $I =]0,1[$. Montrer que $f : x \mapsto |x| + x$ est dans $W^{1,p}(I)$ pour tout $p \in [1, \infty]$ et calculer f'. Est-ce que $f' \in W^{1,p}(I)$?

3. Montrer que $W^{1,p}(I)$ est un espace de Banach pour la norme $\|f\| = \|f\|_p + \|f'\|_p$.
Montrer que si $p < \infty$, $\mathscr{C}^1(I) \cap L^p$ est dense dans $W^{1,p}(I)$.

4. Soit $f \in W^{1,p}(I)$. Montrer qu'il existe une unique fonction $\tilde{f} \in \mathscr{C}(\bar{I})$ qui coïncide presque partout avec f et telle que

$$\forall x, y \in \bar{I}, \quad \tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) = \int_x^y f'(t) dt \ .$$

5. On suppose maintenant I borné. On note q l'exposant conjugué de p.
a. Montrer que si $p > 1$, la boule unité de $W^{1,p}(I)$ est relativement compacte dans $\mathscr{C}(\bar{I})$.
b. Montrer que si $q < \infty$, la boule unité de $W^{1,1}(I)$ est relativement compacte dans $L^q(I)$.

Indication : Pour b, on pourra utiliser le résultat de l'Exercice 22.

2 Opérateurs Linéaires Continus

Pour cette partie, on renvoie à [B] ou [HL].

2.1 Généralités

Définition 6. Soient E et F deux espaces vectoriels normés.
On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. On notera aussi $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$. On note $\mathrm{Isom}(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes bicontinus de E dans F. On note $\mathrm{GL}(E) = \mathrm{Isom}(E,E)$, qui est aussi l'ensemble des inversibles de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 6. *Soit L une application linéaire de E dans F. Alors $L \in \mathcal{L}(E,F)$ si et seulement si*

$$\exists C > 0,\ \forall x \in E, \quad \|L(x)\| \leq C\|x\| \ .$$

Dans ce cas, la meilleure constante est appelée la norme opérateur de L et notée

$$\|L\| = \|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|L(x)\| \ .$$

Proposition 7. $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ *est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.*
Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E,F)$ aussi.

Exercice 24$^\square$. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on définit la transformée de Fourier de f par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi.x} dx \ .$$

1. Montrer que l'on définit ainsi une application linéaire continue $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^d)$.
2. Montrer que pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}$ tend vers zéro à l'infini.

Exercice 25$^\square$. Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, on définit

$$Lx = (x_{n+1})_{n\geqslant 0} \quad \text{et} \quad Rx = (x_{n-1}\mathbf{1}_{n\geqslant 1})_{n\geqslant 0} \ .$$

Les applications L et R sont respectivement appelés shift à gauche et shift à droite.
1. Montrer que $L \in \mathcal{L}(\ell^p)$ et $R \in \mathcal{L}(\ell^p)$ et calculer leurs normes d'opérateur.
2. Montrer que L est surjectif mais pas injectif et que R est injectif mais pas surjectif.

Proposition 8. *Soient E et F deux espaces de Banach.*
Alors $\mathrm{Isom}(E,F)$ *est un ouvert de $\mathcal{L}(E,F)$. En particulier,* $\mathrm{GL}(E)$ *est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.*

Exercice 26$^\square$. Démonstration de la Proposition 8
1. Soit $H \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|H\| < 1$. Montrer que $I - H \in \mathrm{GL}(E)$ (expliciter l'inverse).
2. Montrer que $\mathrm{Isom}(E,F)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E,F)$.
3. Montrer que $L \mapsto L^{-1}$ est continue de $\mathrm{Isom}(E,F)$ dans $\mathrm{Isom}(F,E)$.

2.2 Le Théorème de Banach-Steinhaus...

Théorème 9. ***Théorème de Banach-Steinhaus***

Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'applications linéaires continues de E dans F. On suppose que

$$\forall x \in E, \quad \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < +\infty \,.$$

Alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty \,.$$

Plus précisément, si

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} = +\infty \,,$$

alors, il existe un $\mathcal{G}_\delta$-dense Ω de E tel que

$$\forall x \in \Omega, \quad \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| = +\infty \,.$$

Corollaire 4. *Soient E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé.*

Soit (T_n) une suite d'applications linéaires continues de E dans F telle que pour tout $x \in E$, la suite $(T_n(x))$ converge dans F vers une limite notée $T(x)$. Alors $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \,.$$

Remarque 7. Le théorème est faux si E n'est pas un espace de Banach. En effet, dans l'espace E des suites réelles nulles à partir d'un certain rang, muni de la norme sup, on obtient un contre-exemple en considérant les opérateurs $T_n : E \to \mathbb{R}$ définis par

$$\forall u \in E, \quad T_n(u) = \sum_{p=0}^{n} u_p \,.$$

Exercice 27. Démonstration du Théorème 9 [B]

1. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les ensembles $A_n = \{x \in E, \mid \forall i \in I, \ \|T_i(x)\| \leq n\}$.

Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que $\overset{\circ}{A}_{n_0} \neq \emptyset$.

2. En déduire l'existence d'une boule ouverte $B(x_0, r)$, telle que

$$\forall z \in B(x_0, r), \quad \|T_i(z)\| \leq n_0 \,.$$

3. Conclure.

2.3 ... et ses Spectaculaires Conséquences

Théorème 10. *Il existe un $\mathcal{G}_\delta$ dense $\Omega_0 \subset \mathscr{C}(\mathbb{T})$ tel que pour toute $f \in \Omega_0$, la série de Fourier de f diverge en 0.*

Exercice 28$^\square$. ► DEV ◄ **Démonstration du Théorème 10 [R]**

Les questions 1 à 3 de cet exercice suffisent à démontrer le théorème. La fin de l'exercice permet de montrer un résultat encore plus fort, à savoir : il existe un $\mathcal{G}_\delta$-dense de fonctions continues dont les séries de Fourier divergent sur un $\mathcal{G}_\delta$-dense de $\mathbb{R}$.

Pour $f \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$, on définit pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

et pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n f(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx} \qquad \text{et} \qquad \Lambda_n f = S_n f(0)\ .$$

Enfin, on note $s^*(f, x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n f(x)|$.

1. Montrer que Λ_n est une forme linéaire continue sur $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ de norme $\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n|$ où $D_n \in \mathscr{C}(\mathbb{T})^0$ est le noyau de Dirichlet défini par

$$\forall t \in]0, 2\pi[, \quad D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

2. Montrer que $\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$.

3. En déduire qu'il existe un $\mathcal{G}_\delta$-dense $\Omega_0 \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$ tel que $\forall f \in \Omega_0,\ s^*(f, 0) = +\infty$.

4. Généraliser cette propriété à tout $x \in \mathbb{R}$. On note Ω_x le $\mathcal{G}_\delta$-dense obtenu.

5. Soit $X \subset \mathbb{R}$ dénombrable. Montrer qu'il existe un $\mathcal{G}_\delta$-dense $\Omega_X \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$ tel que

$$\forall f \in \Omega_X,\ \forall x \in X, \quad s^*(f, x) = +\infty$$

6. Montrer que si X est dense dans $\mathbb{R}$, alors pour tout $f \in \Omega_X$,

$$A_f := \{\ x \in \mathbb{R}\ ,\ s^*(f, x) = +\infty\ \}$$

est un $\mathcal{G}_\delta$-dense dans $\mathbb{R}$.

7. Conclure.

L'intérêt de la fin de l'exercice vient du résultat démontré dans l'exercice suivant.

Exercice 29. [R]
On va montrer que dans un espace métrique complet E sans point isolé, aucun ensemble dénombrable n'est un $\mathcal{G}_\delta$ dense.
Soit donc $X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ un $\mathcal{G}_\delta$-dense dénombrable.

1. Montrer que $O_n \backslash \{x_n\}$ est encore un ouvert dense.

2. Conclure.

Exercice 30$^\square$. [CLF3]
Soient $p \in [1, \infty]$ et q l'exposant conjugué ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall (b_n) \in \ell^q, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \text{ converge} .$$

Montrer que $(a_n) \in \ell^p$.

Exercice 31. Continuité des applications bilinéaires [G-An], [Wa, §3.12]

1. Soient E, F, G des espaces de Banach et soit $a : E \times F \to G$ une application bilinéaire. On suppose que a est séparément continue, c'est-à-dire

$$\begin{array}{lll} \forall x \in E, & y \mapsto a(x,y) & \text{est continue ,} \\ \forall y \in F, & x \mapsto a(x,y) & \text{est continue .} \end{array}$$

Montrer que a est continue.

2. On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme $\|P\|_1 = \int_0^1 |P(x)|dx$. Montrer que

$$\begin{array}{rcccl} a & : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (P,Q) & \longmapsto & \int_0^1 P(x)Q(x)dx \end{array}$$

est séparément continue, mais pas continue.

Avant de passer aux conséquences du théorème de Banach-Steinhaus en théorie des opérateurs, mentionnons deux autres applications pratiques :

- Non convergence de l'interpolation de Lagrange, Phénomène de Runge (cf. TD d'Interpolation et Approximation ou [CM] et [Wa, Exo 3.12.5]).
- Intégration numérique : Méthodes de Gauss, Théorème de Polya. [CM].

Théorème 11. ***Théorème de l'application ouverte***
Soient E, F des espaces de Banach, $T : E \to F$ linéaire continu.
Si T est surjectif, alors il existe $c > 0$ tel que

$$B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1)) .$$

Théorème 12. ***Théorème de Banach***

Soient E, F des espaces de Banach et $T : E \to F$ linéaire continu.

Si T est bijectif, alors son inverse est continu, et donc $T \in \mathrm{Isom}(E, F)$.

Remarque 8. Une application est dite ouverte lorsque l'image directe d'un ouvert est ouverte. On peut montrer (exercice !) que la conclusion du Théorème 11 revient à dire que T est une application ouverte, ce qui explique le nom du théorème.

Remarque 9. Si $T : E \to F$ est linéaire continu injectif, et si $T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \to E$ est continu, alors T est à image fermée. Cette propriété sert parfois pour montrer que l'inverse ne peut être continu.

Exercice 32$^{\square}$. Sur les hypothèses du Théorème de l'application ouverte.

1. Montrer qu'il existe une application linéaire continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas ouverte.

2. Montrer qu'il existe une application continue surjective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas ouverte.

3. On note E l'ensemble des suites réelles $(x_n)_{n \geqslant 1}$ presque nulles muni de la norme sup.
Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{L}(E)$ bijectif, dont l'inverse n'est pas continu.

Exercice 33$^{\square}$. [B]

Soit E un espace vectoriel normé muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, et complet pour ces deux normes. On suppose de plus que

$$\exists k > 0, \quad \|\cdot\|_1 \leq k\|\cdot\|_2 \ .$$

Montrer que les deux normes sont équivalentes.

Exercice 34. [R]

Notons $(\mathbb{C}^{\mathbb{Z}})_0$ l'ensemble des suites (c_n) qui tendent vers 0 quand $|n| \to 0$ muni de la norme sup. On rappelle que les coefficients de Fourier sont définis dans l'Exercice 28. En posant

$$\forall f \in L^1(\mathbb{T}), \quad c(f) := (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \ ,$$

on définit donc une application linéaire $c \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{T}), \mathbb{C}^{\mathbb{Z}})$.

1. Montrer que c est à valeurs dans $(\mathbb{C}^{\mathbb{Z}})_0$.

2. Montrer que $c \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{T}), (\mathbb{C}^{\mathbb{Z}})_0)$.

3. Montrer que c est injective.

4. Supposons par l'absurde que c est surjective.

a. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que,

$$\forall f \in L^1(\mathbb{T}), \quad \|c(f)\|_\infty \geqslant \delta \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \ .$$

b. Obtenir une contradiction en considérant les fonctions D_n définies dans l'Exercice 28.

c. Conclure.

Remarque 10. On peut construire explicitement une série trigonométrique convergente qui n'est pas la série de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{T})$ (voir le TD d'Analyse de Fourier ou [ZQ]).

Théorème 13. ***Théorème du graphe fermé.*** *Soient E, F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ linéaire. Le graphe de G est par définition l'ensemble*

$$G(T) = \{\ (x, Tx)\ ;\ x \in E\ \} \subset E \times F\ .$$

Si $G(T)$ est fermé dans $E \times F$, alors T est continu.

Remarque 11.
- On remarquera que la réciproque est beaucoup plus facile. En effet, à titre d'exercice, on montrera que le graphe d'une application continue entre deux espaces métriques est fermé.
- Expliquons l'intérêt pratique du théorème du graphe fermé. Pour montrer que T est continu, on doit en général montrer que

$$\Big(\ x_n \to x\ \Big) \implies \Big(\ T(x_n) \to T(x)\ \Big)\ .$$

D'après le théorème, pour une application linéaire T entre deux espaces de Banach, il suffit de vérifier que

$$\Big(\ x_n \to x \quad \text{et} \quad T(x_n) \to y\ \Big) \implies \Big(\ y = T(x)\ \Big)\ ,$$

autrement dit, on peut supposer *a priori* que $(T(x_n))$ converge aussi. En exploitant la linéarité de T, il suffit en fait de vérifier que

$$\Big(\ x_n \to 0 \quad \text{et} \quad T(x_n) \to y\ \Big) \implies \Big(\ y = 0\ \Big)\ .$$

Exercice 35*. Sous-espaces fermés de $\mathscr{C}([a,b])$ formé de fonctions régulières [GT].

Soit F un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{C}([0,1])$ muni de la convergence uniforme.

1. On suppose que tous les éléments de F sont dans $\mathscr{C}^1([0,1])$.

a. En utilisant le théorème du graphe fermé, montrer qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall f \in F, \quad \|f'\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty\ .$$

b. En déduire que la boule unité fermée B_F de F (pour la norme infini) est compacte.

c. Que peut-on en conclure ?

2. On suppose maintenant que les éléments de F sont des fonctions hölderiennes, i.e.

$$\forall f \in F,\ \exists \alpha > 0,\ \exists C > 0,\ \forall x, y \in [0,1], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^\alpha\ .$$

a. En utilisant le théorème de Baire, montrer qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que

$$\forall f \in F,\ \forall x, y \in [0,1], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant n|x - y|^{1/n}\|f\|_\infty\ .$$

b. Conclure en reprenant la méthode de la première question.

Exercice 36. [ZQ, Chap. VI, §2]

Soient E un espace de Banach et F un sous-espace fermé de E.

Montrer qu'il existe un projecteur linéaire continu de E sur F si et seulement s'il existe un sous-espace fermé G de E tel que

$$E = F \oplus G\ .$$

2.4 Opérateurs Compacts

Définition 7. Soient E, F deux espaces de Banach, et $T : E \to F$ linéaire.
On dit que T est un **opérateur compact** si l'image de la boule unité B_E de E par T est relativement compacte dans F, c'est-à-dire que $\overline{T(B_E)}$ est compact. On notera $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F, et $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Proposition 9. *Soient E, F, G trois espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S \in \mathcal{L}(F, G)$.*
Si T ou S est compact alors $S \circ T$ l'est aussi.

Exemple 1. [HL, Chap.1, Prop. 3.4]
Si $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ sont compacts et si $K \in \mathscr{C}(X \times Y)$, alors l'opérateur $T : \mathscr{C}(X) \to \mathscr{C}(Y)$ défini par

$$Tf(y) = \int_X K(x, y) f(x) dx$$

est compact.

Exercice 37. [B]

1. Montrer que $\mathcal{K}(E, F)$ est un fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.

2. En déduire que si on a $T_n \to T$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ avec $\mathrm{rg}(T_n) < \infty$, alors T est compact.

3. Supposons maintenant que F est un espace de Hilbert. Soient $T \in \mathcal{K}(E, F)$ et $\varepsilon > 0$.

En recouvrant $K = \overline{T(B_E)}$ par un nombre fini de boules de rayon ε, et en utilisant une projection orthogonale, montrer qu'il existe un opérateur de rang fini $T_\varepsilon \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que

$$\|T_\varepsilon - T\| < 2\varepsilon \ .$$

Remarque 12. En revanche, hors du cadre hilbertien, un opérateur compact peut ne pas être limite d'opérateurs de rangs finis. On renvoie aux références données dans [B].

Exercice 38.
Soit $(\alpha_n) \in \ell^\infty$. Montrer que $T : (x_n) \in \ell^2 \mapsto (\alpha_n x_n) \in \ell^2$ est compact ssi α_n tend vers 0.

D'autres exemples d'opérateurs compacts sont donnés par les opérateurs de Hilbert-Schmidt, voir par exemple [CLF3].

2.5 Le Théorème de Riesz-Fredholm

Théorème 14. ***Alternative de Fredholm, version light***
Soient E un espace vectoriel normé et T un opérateur compact de E. Alors

1. $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - T)$ *est de dimension finie.*
2. $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)$ *est fermé.*
3. $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - T) = \{0\} \iff \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T) = E.$

Remarque 13.
- Le point 3. exprime le fait que les perturbations compactes de l'identité sont injectives si et seulement si elles sont surjectives. Propriété bien connue en dimension finie (où un endomorphisme est bijectif si et seulement s'il est injectif ou surjectif), elle est remarquable en dimension infinie.
- On renvoie à [B] pour une version précisée de ce résultat. Le point délicat est de définir l'adjoint d'un endomorphisme dans le cadre général des espaces de Banach. On notera cependant que les espaces de Hilbert forment un cadre relativement léger pour énoncer et démontrer le résultat précisé (car alors on peut définir l'adjoint grâce au théorème de représentation de Riesz).
- On prendra garde au fait que la preuve du point 3 donnée dans [B] utilise la notion d'opérateur adjoint. Cependant, comme signalé dans le polycopié de M1 de L. Desvillettes, on peut aussi donner une preuve directe. En effet, supposons $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-T) = E$. Si on avait $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-T) \neq 0$, alors $\mathrm{Ker}((\mathrm{Id}-T)^n)$ serait une suite strictement croissante de sous-espaces fermés de E. On pourrait alors construire une suite u_n telle que

$$u_n \in \mathrm{Ker}((\mathrm{Id}-T)^n) \quad , \quad \|u_n\| = 1 \quad , \quad d\Big(u_n \, , \, \mathrm{Ker}\Big((\mathrm{Id}-T)^{n-1}\Big)\Big) > \frac{1}{2}$$

et alors on peut montrer que

$$\|Tu_n - Tu_m\| > \frac{1}{2}$$

ce qui contredit la compacité de l'opérateur T.
- Si vous souhaitez présenter ce résultat en développement, tâchez d'en avoir une application convaincante (vous en trouverez une dans le polycopié de M1 de Laurent Desvillettes).

3 Dualité

Dans cette partie, E désignera un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Dans les sous-sections 3.3 et 3.4, E sera muni d'une norme.

Lorsque E est normé, on notera notera B_E la boule unité fermée de E.

Définition 8. L'ensemble des formes linéaires continues sur un espace vectoriel normé E est appelé **dual topologique** de E et noté E'. On a donc $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et E' est un espace de Banach pour la norme duale

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leqslant 1}} |f(x)| \ . \tag{3}$$

Exercice 39$^{\square}$. [B], [M]

On supposera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Un hyperplan affine de E est un ensemble de la forme

$$\{ \, x \in E \, , \, f(x) = \alpha \, \}$$

où f est une forme linéaire sur E, non identiquement nulle et où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'un hyperplan de E est soit fermé, soit dense.

3.1 Le Théorème de Hahn-Banach

Théorème 15. ***Théorème de Hahn-Banach, version analytique***

Soient p une semi-norme sur E, F un sous-espace vectoriel de E et enfin f une forme linéaire sur F vérifiant

$$\forall x \in F, \quad |f(x)| \leq p(x) .$$

Alors f admet un prolongement linéaire à E encore noté f et vérifiant

$$\forall x \in E, \quad |f(x)| \leq p(x) .$$

Remarque 14. Dans le cadre des espaces vectoriels réels, le théorème est encore vrai sans les valeurs absolues si l'on suppose seulement que p est une **sous-norme**, c'est-à-dire une application $p : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\begin{aligned} &\forall x \in E,\ \forall \lambda > 0, \quad p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \text{(homogénéité positive)} , \\ &\forall x, y \in E, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{(sous-additivité)} . \end{aligned}$$

On remarquera que la version analytique donnée dans [B] est limitée au cas d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ (et commence par le cas des sous-normes). Pour le cas complexe, on pourra trouver une preuve dans [S].

Corollaire 5. *Soit E un espace vectoriel normé réel, et F un sous-espace vectoriel.*

Si $f \in F'$, alors f admet un prolongement $g \in E'$ tel que $\|g\| = \|f\|$.

Corollaire 6. *Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe $f \in E'$ de norme 1 telle que*

$$f(x) = \|x\| .$$

Autrement dit, pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leqslant 1}} |f(x)| = \max_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leqslant 1}} |f(x)| . \tag{4}$$

Remarque 15.

- Pour tout $x \in E$, notons $\mathrm{ev}_x : f \mapsto f(x)$ l'application d'évaluation des formes linéaires en x. On remarque que $\mathrm{ev}_x \in (E')'$ et que $\|\mathrm{ev}_x\| \leqslant 1$. Le corollaire donne qu'on a précisément $\|\mathrm{ev}_x\| = 1$. Autrement dit, l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E'' \\ x & \longmapsto & \mathrm{ev}_x \end{array}$$

est une injection isométrique. Lorsqu'elle est bijective, on dira que E est réflexif.

- Il est remarquable que le sup de l'expression (4) est toujours atteint. En revanche, il existe des cas où le sup de la Définition (3) n'est pas atteint.

- Il n'y a pas nécessairement unicité de l'élément f réalisant le max de l'équation (4).

Théorème 16. ***Théorème de Hahn-Banach, version géométrique, cas réel***

NB : *On suppose ici que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Soient A et B deux convexes disjoints de E.

(i) On suppose A ouvert. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large, c'est-à-dire qu'il existe $f \in E' \setminus \{0\}$ telle que

$$\sup_{a \in A} f(a) \leqslant \inf_{b \in B} f(b) .$$

(ii) On suppose A compact et B fermé. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict, c'est-à-dire qu'il existe $f \in E' \setminus \{0\}$ telle que

$$\sup_{a \in A} f(a) < \inf_{b \in B} f(b) .$$

Remarque 16. On rappelle qu'un hyperplan affine d'équation $f = \alpha$ sépare strictement deux parties de E s'il existe $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ tels que l'une des parties est incluse dans le demi-espace fermé $\{f \leq \alpha_1\}$ et l'autre dans le demi-espace $\{f \geq \alpha_2\}$.

Corollaire 7. *Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et F un sous-espace vectoriel de E. Pour tout $x \in E$,*

$$x \in \overline{F} \;\Leftrightarrow\; \left(\forall g \in E',\ g_{|F} = 0 \;\Rightarrow\; g(x) = 0 \right) .$$

Par conséquent, F est dense si et seulement

$$\forall f \in E', \quad f_{|F} = 0 \implies f = 0 .$$

Remarque 17. On notera que dans un grand nombre de cas pratiques, ce critère de densité peut être prouvé sans utiliser le théorème de Hahn-Banach. À titre d'exercice, on le montrera dans le cas où E est un espace de Hilbert.

Exercice 40*. [GT]

Pour $a > 1$, on définit $f_a \in \mathscr{C}([0,1])$ par $f_a(x) = \frac{1}{x-a}$. Montrer que si (a_n) est une suite de réels $\geqslant 1$ qui tend vers l'infini, alors

$$V = \text{Vect}\{\ f_{a_n}\ ,\ n \in \mathbb{N}\ \}$$

est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$.

Exercice 41*. [B, Th. III.23]

On suppose que E est un espace de Banach tel que E' est séparable.

Montrer que E est séparable.

3.2 Duaux d'Espaces Fonctionnels Classiques

Pour cette sous-section, on renvoie à [BP] ou à [R].

Dans cette sous-section, on notera $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré.

On rappelle que μ est dite σ-finie s'il existe une suite croissante $X_n \in \mathcal{X}$ telle que

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu(X_n) < +\infty .$$

Théorème 17. ***Dualité*** *L^p-L^q*

Supposons que μ est sigma-finie et que $p \in [1, \infty[$. Notons q l'exposant conjugué de p.

Pour $g \in L^q$, on note Φ_g l'application linéaire sur L^p définie par

$$\Phi_g(f) = \int_X f g \, d\mu \ .$$

Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} L^q & \longrightarrow & (L^p)' \\ g & \longmapsto & \Phi_g \end{array}$$

est une isométrie bijective. Autrement dit, toute forme linéaire continue sur L^p s'identifie à une fonction de L^q.

Exercice 42$^\square$. Cas particulier du Théorème 17 [M]

Montrer que si $p < \infty$, $(\ell^p)' = \ell^q$.

Exercice 43. $(\ell^\infty)' \neq \ell^1$ **[M]**

Construire à l'aide du théorème de Hahn-Banach une forme linéaire continue sur ℓ^∞ qui ne peut être représentée par un élément de ℓ^1.

Exercice 44*.

On suppose que μ est une mesure sigma-finie sur X.

Soit $g : X \to \mathbb{R}$ mesurable telle que pour toute $f \in L^p$, on ait $fg \in L^1$.

On veut montrer que $g \in L^q$. On reprend la notation Φ_g du Théorème 17.

1. Évacuer le cas $p = \infty$. Dans la suite, on supposera $p < \infty$.

2. On suppose que $\Phi_g \equiv 0$. Montrer que $g = 0$ μ-presque partout.

3. Notons (X_n) une suite croissante de mesurables de mesures finies et de réunion X. Pour $n \geqslant 1$, on pose $A_n = X_n \cap \{|g| \leqslant n\}$ puis

$$\forall f \in L^p, \quad \Phi_g^n(f) = \int_{A_n} f g d\mu \ .$$

Montrer que $\Phi_g^n \in (L^p)'$, et que (Φ_g^n) converge simplement vers Φ_g. En déduire que $\Phi_g \in (L^p)'$.

4. Conclure.

Exercice 45. Soient $X = \{a, b\}$ muni de la tribu discrète et soit μ la mesure sur X attribuant la masse 1 à a et la masse $+\infty$ à b. Est-ce que $(L^1(X))' = L^\infty(X)$ dans ce cas ?

Remarque 18. Une très belle utilisation de la dualité $L^p - L^q$ est donnée par le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin (pour les curieux, voir [SW]).

NB : Jusqu'à la fin de cette sous-section, on supposera que X est un espace métrique localement compact (c'est-à-dire tel que tout point admet un système fondamental de voisinages compacts) et séparable. L'espace X sera muni de sa tribu borélienne.

Rappelons que $\mathscr{C}_0(X)$ désigne l'espace des fonctions continues sur X qui tendent vers 0 à l'infini et qu'il est muni de la norme uniforme.

Il est possible de définir des mesures d'ensembles sur X à valeurs réelles ou complexes. On renvoie à [R, Chap.6] qui détaille les propriétés de ces mesures réelles ou complexes. Pour les mesures à valeurs réelles, on parle parfois de mesures signées. En particulier, on retiendra qu'une mesure signée sur X s'écrit $\mu = \mu^+ - \mu^-$ où μ^+ et μ^- sont des mesures positives finies sur X portées par des ensembles mesurables disjoints et de réunion X. On notera bien qu'une différence cruciale par rapport aux mesures positives est que l'on a automatiquement $\mu(X) < \infty$: cette contrainte provient de la propriété d'additivité dénombrable (qui implique des séries commutativement et donc absolument convergentes).

Théorème 18. ***Théorème de Représentation de Riesz [R], [BP]***

Soit X un espace métrique localement compact et séparable.

Si T est une forme linéaire continue sur $(\mathscr{C}_0(X), \|\cdot\|_\infty)$, alors il existe une unique mesure μ à valeurs réelles ou complexes telle que

$$\forall f \in \mathscr{C}_0(X), \quad T(f) = \int_X f \, d\mu \, .$$

En particulier, si K est un espace métrique compact, alors le dual topologique de $\mathscr{C}(K)$ est exactement l'espace des mesures sur K (à valeurs réelles ou complexes).

Remarque 19.

- Dans le théorème précédent, on peut remplacer $(\mathscr{C}_0(X), \|\cdot\|_\infty)$ par $(\mathscr{C}_c(X), \|\cdot\|_\infty)$ car les deux espaces duaux s'identifient immédiatement. En effet, comme $\mathscr{C}_c(X)$ est dense dans $\mathscr{C}_0(X)$, une forme linéaire continue sur $\mathscr{C}_c(X)$ se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur $\mathscr{C}_0(X)$.
- En revanche, le résultat ne s'étend pas au cas de l'espace $(\mathscr{C}_b(X), \|\cdot\|_\infty)$.
- Il existe d'autres versions du théorème de représentation de Riesz qui concernent les formes linéaires positives, c'est-à-dire qui vérifient

$$f \geqslant 0 \implies Tf \geqslant 0 \, .$$

Cette contrainte de positivité permet de se restreindre aux mesures positives (finies ou non), et nous affranchit de l'hypothèse de continuité. Précisément, on a aussi qu'une forme linéaire positive T sur $\mathscr{C}_0(X)$ (resp. $\mathscr{C}_c(X)$) peut être représentée par une mesure positive finie (resp. par une mesure positive finie sur les compacts). On renvoie à [BP], [HL] ou [R] pour un énoncé précis de ces résultats.

3.3 Topologies Faibles, Convergence Faible

On se contentera ici d'un bref exposé sur les topologies faibles, et l'on renvoie à [B] pour un exposé beaucoup plus détaillé sur le sujet.

Dans cette sous-section, E désignera un espace de Banach.

Pour $f \in E'$ et $x \in E$, on notera $\langle f, x \rangle = f(x)$.

Définition 9. La **topologie faible** $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie initiale définie par les éléments de E', c'est-à-dire que c'est la topologie la moins fine sur E qui rende continues les applications $f \in E'$.

Dans la suite, la convergence en norme dans E sera appelée convergence forte. Autrement dit, (x_n) converge vers x fortement dans E si $\|x_n - x\| \to 0$.

Proposition 10. *La topologie faible $\sigma(E, E')$ vérifie les propriétés suivantes.*

(i) Elle a moins d'ouverts que la topologie forte sur E.

(ii) C'est la topologie définie par la famille de semi-normes $(p_f)_{f \in E'}$ donnée par

$$p_f(x) = |\langle f, x \rangle| \ .$$

(iii) La topologie faible $\sigma(E, E')$ est séparée.

(iv) La suite (x_n) converge vers x pour $\sigma(E, E')$ si et seulement si

$$\forall f \in E', \quad \langle f, x_n \rangle \xrightarrow[n \to \infty]{} \langle f, x \rangle \ .$$

(v) Si (x_n) converge fortement vers x, alors (x_n) converge vers x pour $\sigma(E, E')$.

(vi) Si (x_n) converge vers x pour $\sigma(E, E')$, alors (x_n) est bornée et on a

$$\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\| \ .$$

(vii) Si (x_n) converge vers x pour $\sigma(E, E')$ et si (f_n) converge fortement vers f dans E', alors

$$\langle f_n, x_n \rangle \xrightarrow[n \to \infty]{} \langle f, x \rangle \ .$$

Remarque 20.
- On prendra bien garde au fait que la convergence forte implique la convergence faible, mais qu'en revanche, un ouvert (resp. fermé) fort n'est pas forcément un ouvert (resp. fermé) faible.
- Remarquez que la séparation de la topologie faible $\sigma(E, E')$ fait appel au théorème de Hahn-Banach.
- En dimension finie, on peut montrer que la topologie faible $\sigma(E, E')$ coïncide avec la topologie forte.
- En dimension infinie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ n'est jamais égale à la topologie forte (cf. Exercice 47).
- En dimension infinie, on peut montrer que la topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E n'est pas métrisable (on notera qu'elle est définie par une famille non-dénombrable de semi-normes).

Exercice 46. Montrer les propriétés de la topologie $\sigma(E, E')$ énoncées dans la Proposition 10.

Exercice 47*. Topologies faible et forte en dimension infinie [B]
Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie dont on note S (resp. B) la sphère unité (resp. la boule unité fermée).

1. Montrer que l'adhérence de S pour la topologie faible est incluse dans B.

2. Soit $x \in B$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ un n-uplet de formes linéaires continues. Montrer qu'il existe $y \in S$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f_i(x) = f_i(y)$. En déduire que x est dans l'adhérence de S pour la topologie faible.

3. Qu'a-t-on démontré ?

Exercice 48*. Caractérisation des convexes fermés [B]

1. Montrer que tout convexe fermé de E est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

2. En déduire qu'un convexe est fortement fermé si et seulement s'il est faiblement fermé.

Exercice 49. [B]
Soient E, F deux espaces de Banach et T un opérateur compact de E dans F.
Montrer que si (x_n) converge faiblement vers x, alors Tx_n converge fortement vers Tx.

Définition 10. On rappelle que pour $x \in E$, on a noté ev_x l'application d'évaluation des formes linéaires en x donnée par

$$\forall f \in E', \quad \mathrm{ev}_x(f) = f(x) .$$

La **topologie faible-étoile** sur E', notée $\sigma(E', E)$ est la topologie initiale définie par la famille $(\mathrm{ev}_x)_{x \in E}$, c'est-à-dire que c'est la topologie la moins fine qui rende continues les applications d'évaluation.

On peut voir que la topologie faible-étoile $\sigma(E', E)$ sur E' a moins d'ouverts que la topologie faible $\sigma(E', E'')$ (qui elle-même a moins d'ouverts que la topologie forte sur E').

Proposition 11. *La topologie faible-étoile sur E' vérifie les propriétés suivantes.*

(i) C'est la topologie définie par la famille de semi-normes $(|\mathrm{ev}_x|)_{x \in E}$.

(ii) La topologie faible-étoile est séparée.

(iii) La suite (f_n) converge vers f pour $\sigma(E', E)$ si et seulement si

$$\forall x \in E, \quad \langle f_n, x \rangle \xrightarrow[n \to \infty]{} \langle f, x \rangle .$$

(iv) Si (f_n) converge fortement vers f, alors (f_n) converge vers f pour $\sigma(E', E)$.

(v) Si (f_n) converge vers f pour $\sigma(E', E)$, alors (f_n) est bornée et on a

$$\|f\| \leqslant \liminf \|f_n\| .$$

(vi) Si (f_n) converge vers f pour $\sigma(E', E)$ et si (x_n) converge fortement vers x dans E, alors

$$\langle f_n, x_n \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle f, x \rangle \, .$$

Exercice 50. Montrer les propriétés de la topologie $\sigma(E', E)$ énoncées dans la Proposition 11.

Remarque 21. Dans les espaces L^p pour $1 < p < \infty$, les topologies faible et faible-étoile coïncident.

Exercice 51. Questions de convergence faible et faible-étoile.

1. Soit E un espace de Banach.

a. Soient D une partie dense de E et (f_n) une suite dans E'. Montrer que (f_n) converge vers f pour la topologie faible-étoile si et seulement si (f_n) est bornée et

$$\forall x \in D, \quad \langle f_n, x \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle \, .$$

b. Donner une propriété similaire pour la convergence faible dans E.

2. Soient H un espace de Hilbert séparable et $(e_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H.

a. Montrer que $x_n \to x$ faiblement dans H si et seulement si (x_n) est bornée et

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \langle x_n, e_p \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle x, e_p \rangle \, .$$

b. Quelle est la limite faible de la suite (e_p) ?

c. Est-ce que la condition suffisante persiste si l'on enlève (x_n) bornée ?

3. Soit $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

a. Montrer que $\mathbf{1}_{[n,n+1]}$ converge faiblement vers 0 dans L^p pour $1 < p < \infty$.
Est-ce vrai pour $p = 1$? Est-ce qu'elle converge faible-étoile dans L^∞ ?

b. Montrer que $x \mapsto \sqrt{n}\varphi(n\,\cdot)$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$.

c. Montrer que dans $L^1(0,1)$, $x \mapsto e^{inx}$ converge faiblement vers 0.

Exercice 52*. Séparabilité et Topologie Faible-Étoile [B]

Soit E un espace de Banach. On note $B_{E'}$ la boule unité fermée de E', qui hérite de la topologie induite par la topologie faible-étoile sur E'. On va voir que $B_{E'}$ est métrisable pour la topologie faible-étoile si et seulement si E est séparable.

1. Supposons que E soit séparable. Cela implique que B_E est aussi séparable, et donc on peut fixer une suite (x_n) dense dans B_E. Pour $f, g \in B_{E'}$, définissons

$$d(f, g) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n} \, |\langle f - g, x_n \rangle| \, .$$

a. Montrer qu'une boule ouverte $B_d(f_0, r)$ contient un voisinage de f_0 pour la topologie faible-étoile.

b. Soit V un voisinage de $f_0 \in E'$ pour la topologie faible-étoile.

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $y_1, \ldots, y_k \in B_E$ tels que V contienne

$$V' := \left\{ f \in B_{E'} \,\middle|\, \forall i = 1, \ldots, k,\ |\langle f - f_0, y_i \rangle| < \varepsilon \right\} .$$

En déduire que V contient une boule ouverte $B_d(f_0, r)$.

c. Conclure.

2. Supposons qu'il existe une distance d sur $B_{E'}$ qui induise la topologie faible-étoile.

a. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe $\varepsilon_n > 0$ et une partie finie $D_n \subset E$ tels que la boule ouverte $B_d(0, \frac{1}{n})$ contienne l'ensemble

$$\left\{ f \in B_{E'} \,\middle|\, \forall x \in D_n,\ |\langle f, x \rangle| < \varepsilon_n \right\} .$$

b. En utilisant le critère de densité découlant du théorème de Hahn-Banach, montrer que $D = \cup D_n$ est dense dans E.

c. Conclure.

Remarque 22. Il est aussi vrai que la métrisabilité de B_E pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ est équivalente à la séparabilité de E'. Si E' est séparable, en adaptant l'exercice ci-dessus, on peut construire une distance sur B_E qui induise la topologie faible. Par contre la réciproque est plus difficile (on renvoie aux références données dans [B]).

Exercice 53*. ℓ^1 a la propriété de Schur [GT]

En général, on a vu que la convergence faible n'impliquait pas la convergence forte. L'objet de l'exercice est de montrer que ℓ^1 est un cas très particulier dans lequel les deux notions de convergence coïncident. Soient donc (α^n) une suite dans ℓ^1 qui converge vers 0 pour la topologie faible $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$. On écrit $\alpha^n = (\alpha_p^n)_{p \in \mathbb{N}}$.

1. Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \alpha_p^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$$

2. On munit la boule unité fermée B de ℓ^∞ de la topologie de la convergence simple.

a. Rappeler pourquoi B muni de cette topologie est un espace métrique compact.

b. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n = \left\{ x \in B \,\middle|\, \forall k \geqslant n,\ |\langle x, \alpha^k \rangle| \leqslant \varepsilon \right\} .$$

Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que F_n est d'intérieur non vide.

c. Conclure.

Remarque 23. Ainsi, dans ℓ^1, les topologies faible et forte sont distinctes, mais curieusement, elles ont les mêmes suites convergentes. Ce contre-exemple montre que deux topologies ayant les mêmes suites convergentes ne sont pas nécessairement égales.

Pour terminer ce paragraphe, mentionnons un cas de convergence faible-étoile très utile en probabilités. On a vu que le dual topologique de $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ des mesures signées sur $\mathbb{R}^d$. Ainsi, une suite (μ_n) dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ converge vers μ pour la topologie faible-étoile si et seulement si

$$\forall f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d), \quad \int f d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f d\mu \ .$$

De manière plus élémentaire, une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$ induit des formes linéaires continues sur $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}^d)$, $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$, et $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}^d)$ (munis de la norme uniforme). Par conséquent, on dispose de trois notions de convergence faible-étoile pour une suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. Le Théorème 19 ci-dessous montre que, pour des mesures de probabilité, les trois notions de convergence sont équivalentes. Mais avant de l'énoncer, rappelons la

Définition 11. Soient (μ_n), μ des mesures sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs réelles ou complexes.
On dit que μ_n **converge étroitement** vers μ si

$$\forall f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^d), \quad \int f d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f d\mu \ .$$

Notons P_X la loi de la variable aléatoire X sur $\mathbb{R}^d$ (P_X est donc une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$). Par définition, une suite (X_n) de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ **converge en loi** vers X si et seulement si la suite P_{X_n} converge étroitement vers P_X. C'est pourquoi cette notion de convergence étroite joue un grand rôle en probabilités.

Théorème 19. *Soient (μ_n), μ des* ***mesures de probabilité*** *sur $\mathbb{R}^d$.*
Soit H un sous-espace de $(\mathscr{C}_b(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$ dont l'adhérence contient $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}^d)$.
Alors μ_n converge étroitement vers μ si et seulement si

$$\forall f \in H, \quad \int f d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f d\mu \ .$$

Pour la preuve de ce résultat et une discussion détaillée sur les liens entre les trois topologies faible-étoile mentionnées au-dessus, on renvoie à [Ouv, Chap.14]. On trouvera aussi une preuve plus élémentaire de ce théorème dans le polycopié d'intégration et probabilités de J.F. Le Gall (cette preuve peut constituer un développement).

Mentionnons une autre caractérisation pratique de la convergence étroite des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ en termes de fonctions de répartition.

Théorème 20. *Soient (μ_n), μ des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$.*
La suite (μ_n) converge étroitement vers μ ssi pour tout x tel que $\mu(\{x\}) = 0$,

$$\mu_n(\,]-\infty, x]\,) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(\,]-\infty, x]\,) \ .$$

Exercice 54.

Soient $(\mu_n), \mu$ des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$.

On suppose qu'il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ tel que $\mathrm{Supp}(\mu_n) \subset K$ pour tout n.

Montrer que μ_n converge étroitement vers μ si et seulement si

$$\forall f \in \mathscr{C}(K), \quad \int f d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f d\mu \, .$$

Indication : On pourra utiliser le théorème de prolongement de Tietze-Urysohn, cf. TD de topologie.

Exercice 55. Critère de Weyl pour l'équirépartition

On dit qu'une suite $(x_k) \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$ est équirépartie si pour tous $0 \leqslant a < b \leqslant 1$,

$$\frac{1}{n}\,\mathrm{Card}\Big(\Big\{ k \in \{1,\dots,n\} \,\Big|\, x_k \in [a,b] \Big\} \Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} b-a \, .$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on introduit la mesure de probabilité

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{x_k} \, .$$

1. Montrer que (x_k) est équirépartie si et seulement si μ_n converge étroitement vers la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

2. Montrer que (x_k) est équirépartie si et seulement si

$$\forall p \neq 0, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2ip\pi x_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \, .$$

3. Soient $x, \alpha \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que $(x_k) = (x + \alpha k)$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

b. En déduire que si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $\alpha\mathbb{N} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3.4 Compacité Faible

Théorème 21. ***Théorème de Banach-Alaoglu [B]***

La boule unité fermée de E' est compacte pour la topologie faible-étoile.

La preuve de ce résultat repose sur le théorème de Tychonoff sur les produits (non-dénombrables) d'espaces compacts et donc dépasse le programme de l'agrégation. On notera de plus que, tant que l'on ne sait pas que la boule unité de E' est métrisable pour la topologie faible-étoile, on n'a pas de caractérisation séquentielle de la compacité et donc on ne peut pas utiliser ce théorème pour extraire des sous-suites, ce qui est très gênant en pratique. Pour ces deux raisons, on donne maintenant une version simplifiée (et bien plus accessible) du résultat dans le cas où E est séparable.

Théorème 22. ***Théorème de Banach-Alaoglu [HL]***

On suppose que E est un espace de Banach séparable. Soit (f_n) une suite dans $B_{E'}$. Alors il existe une sous-suite (f_{n_k}) et $f \in E'$ telles que

$$\forall x \in E, \quad \langle f_{n_k}, x\rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle f, x\rangle \ .$$

Exercice 56. ► DEV ◄ **Preuve du Théorème 22 [HL]**

On fixe une suite (x_p) dense dans E.

1. En utilisant le procédé d'extraction diagonale, montrer qu'il existe une sous-suite (f_{n_k}) telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(f_{n_k}(x_p))_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

2. Soit $x \in E$. Montrer que $(f_{n_k}(x))$ est de Cauchy.

3. Conclure.

Exercice 57*. ► DEV ◄ **Existence de Mesures Invariantes [ZQ]**

Soit K un espace métrique compact et $T : K \to K$ continu. Notons $E = \mathscr{C}(K)$.

L'objectif de l'exercice est de montrer l'existence d'une mesure de probabilité sur K qui est T-invariante, c'est-à-dire telle que

$$\forall f \in E, \quad \int_K f \circ T \, d\mu = \int_K f \, d\mu \ .$$

1. Montrer que si une suite (μ_n) de mesures de probabilité sur K converge étroitement vers une mesure signée $\mu \in E'$, alors μ est une mesure de probabilité.

2. Fixons $x \in K$. Pour tout $n \geqslant 1$, on considère

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \delta_{T^k(x)} \ .$$

Montrer que

$$\forall f \in E, \quad \langle \mu_n, f\circ T\rangle - \langle \mu_n, f\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ .$$

3. En déduire qu'il existe une mesure de probabilité T-invariante.

Références

[AM] E. Amar et E. Matheron. *Analyse Complexe.* Cassini, 2004.

[B] H. Brézis. *Analyse Fonctionnelle.* Dunod, 1999.

[BP] M. Briane et G. Pagès. *Théorie de l'Intégration.* Vuibert, 2007.

[CLF2] A. Chambert-Loir et S. Fermigier. *Exercices de Mathématiques pour l'Agrégation : Analyse 2.* Masson, 1995.

[CLF3] A. Chambert-Loir et S. Fermigier. *Exercices de Mathématiques pour l'Agrégation : Analyse 3.* Masson, 1996.

[CM] M. Crouzeix et A.L. Mignot. *Exercices d'Analyse Numérique des Équations Différentielles.* Masson, 1982.

[Far] J. Faraut *Calcul Intégral.* EDP Sciences, 2006.

[G-An] X. Gourdon. *Les Maths en Tête, Analyse.* Ellipses, 1994.

[GT] S. Gonnord et N. Tosel. *Topologie et Analyse Fonctionnelle.* Ellipses, 1996.

[HL] F. Hirsch et G. Lacombe. *Elements d'Analyse Fonctionnelle.* Dunod, 1999.

[KLR] J.P. Kahane et P.G. Lemarié-Rieusset. *Séries de Fourier et Ondelettes* Cassini, 1998.

[LM] G. Lacombe et P. Massat. *Analyse Fonctionnelle, Exercices corrigés.* Dunod, 1999.

[M] B. Maury. *Analyse Fonctionnelle.* Ellipses, 2004.

[Ouv] J.Y. Ouvrard. *Probabilités 2.* Cassini, 2000.

[R] W. Rudin. *Analyse Réelle et Complexe.* Masson, 1975.

[S] L. Schwartz. *Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle.* Hermann, 2008.

[SW] E.M. Stein et G. Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* 1990.

[Wa] C. Wagschal. *Topologie et Analyse Fonctionnelle.* Hermann, 2012.

[Wi] M. Willem. *Analyse Fonctionnelle Élémentaire.* Cassini, 2003.

[ZQ] C. Zuily et H. Queffélec. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2007.