ENS Cachan **Mathématiques**
Préparation à l'agrégation **Année 2015/2016**

Topologie

Arthur Leclaire

Références

[C] G. Choquet. *Cours de Topologie.* Masson, 1992.

[CCM] G. Christol, A. Cot, et C.M. Marle. *Topologie.* Ellipses, 1997.

[G-An] X. Gourdon. *Les Maths en Tête, Analyse.* Ellipses, 1994.

[Q] H. Queffélec. *Topologie.* Dunod, 2012.

[S] L. Schwartz. *Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle.* Hermann, 2008.

[SR] J. Saint-Raymond. *Topologie, Calcul Différentiel, et Variable Complexe.* C&M, 2008.

[W] C. Wagschal. *Topologie et Analyse Fonctionnelle.* Hermann, 2012.

[ZQ] C. Zuily et H. Queffélec. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2007.

Les livres [CCM], [Q] constituent une introduction très claire à la topologie générale, avec des exercices pertinents et accessibles. Les livres [C], [S] et [W] sont des traités détaillés sur la topologie générale et l'analyse fonctionnelle qui vont bien au-delà du programme de l'agrégation. Si l'on veut se limiter à la topologie des espaces métriques, le livre [G-An] propose un bon résumé de cours à ce sujet, qui sera utilement complété par le chapitre 5 de [ZQ] ; le livre [SR] donne aussi un exposé très clair de la topologie des espaces métriques (mais ne s'y limite pas). La liste complète des références utilisées dans ce polycopié est disponible sur la dernière page.

Table des matières

1 Construction de Topologies **2**

2 Complétude **9**

3 Compacité **15**
- 3.1 Compacité, Précompacité, et Complétude 15
- 3.2 Produits d'Espaces Compacts 18
- 3.3 Compacité et Espaces Vectoriels Normés 19

4 Connexité **21**

5 Espaces de Fonctions Continues **26**
- 5.1 Structure des Espaces de Fonctions Continues 26
- 5.2 Théorème d'Arzela-Ascoli 27
- 5.3 Théorème de Stone-Weierstrass 30

6 Théorèmes de Points Fixes **32**

1 Construction de Topologies

Les rappels de cours pourront être trouvés dans [CCM].

Définition 1. Une **topologie** sur un ensemble E est un ensemble $\mathcal{O}$ de parties de E qui contient $\varnothing$ et E, qui est stable par réunion quelconque, et par intersection finie. Les éléments de $\mathcal{O}$ seront appelés des **ouverts**. Les complémentaires des éléments de $\mathcal{O}$ seront appelés des **fermés**.

Autrement dit, dans un espace topologique $(E, \mathcal{O})$, $\varnothing$ et E sont des ouverts, une réunion d'ouverts est un ouvert, et une **I**ntersection **F**inie d'**O**uverts est un ouvert (**IFO**... s'en souvenir).

Définition 2. Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique.
Un **voisinage** d'un point $x \in E$ est une partie V de E contenant un ouvert contenant x. On notera $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x. Les familles des voisinages satisfont les propriétés suivantes.

(V1) $\forall x \in E, \quad (\mathcal{V}(x) \neq \varnothing \quad \text{et} \quad \forall V \in \mathcal{V}(x),\ x \in V)$.

(V2) Toute partie de E contenant un élément de $\mathcal{V}(x)$ est un élément de $\mathcal{V}(x)$.

(V3) L'intersection de deux éléments de $\mathcal{V}(x)$ est un élément de $\mathcal{V}(x)$.

(V4) Tout $V \in \mathcal{V}(x)$ contient un $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que pour tout $y \in W$, $V \in \mathcal{V}(y)$.

Un **système fondamental de voisinages** de x est un sous-ensemble $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}(x)$ tel que tout élément de $\mathcal{V}(x)$ contienne un élément de $\mathcal{W}$.
On dira que E est **séparé** si pour tous $x, y \in E$ distincts, il existe un voisinage V de x et un voisinage W de y tels que $V \cap W = \varnothing$.

On remarque qu'une partie d'un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ est ouverte si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points. Par conséquent, la topologie ne dépend que des voisinages qu'elle définit.

Exercice 1. Soit E un ensemble et supposons donnée pour tout $x \in E$ une collection $\mathcal{V}(x)$ de parties de E de telle sorte que les $\mathcal{V}(x)$ vérifient les conditions (V1) à (V4).
Montrer qu'il existe une unique topologie sur E pour laquelle les voisinages d'un élément $x \in E$ sont exactement les éléments de $\mathcal{V}(x)$.

Exemple 1. Soit (E, d) un espace métrique. Pour chaque $x \in E$, on pose

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset E \mid \exists r > 0\ ,\ B(x, r) \subset V\}\ .$$

La topologie sur E induite par la distance d est l'unique topologie telle que la famille des voisinages d'un $x \in E$ est $\mathcal{V}(x)$.

Définition 3. Soit E un ensemble muni de deux topologies $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$.
On dit que $\mathcal{O}_1$ est **moins fine** que $\mathcal{O}_2$ si tout ouvert de $\mathcal{O}_1$ est ouvert pour $\mathcal{O}_2$, *i.e.* si $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ ($\mathcal{O}_1$ a **moins** d'ouverts que $\mathcal{O}_2$).

Exemple 2. Soit un ensemble E.
On peut toujours définir la **topologie grossière** $\mathcal{O}_g = \{\varnothing, E\}$ et la **topologie discrète** $\mathcal{O}_d = \mathcal{P}(E)$. Toute topologie sur E est moins fine que $\mathcal{O}_d$ et plus fine que $\mathcal{O}_g$. La topologie discrète est induite par la distance discrète définie par $d(x,y) = \mathbf{1}_{x\neq y}$.

Proposition 1. *Soit E un ensemble et $\mathcal{A} = (A_k)_{k\in K}$ une famille non vide de parties de E. Il existe une unique topologie la moins fine pour laquelle tous les A_k, $k \in K$ sont ouverts. Elle est appelée **topologie engendrée** par la famille $\mathcal{A}$. Elle est constituée des réunions d'intersections finies d'éléments de la famille $\mathcal{A}$.*

Définition 4. Soit $(E,\mathcal{O})$ un espace topologique.
On dit que $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ est une **base d'ouverts** si tout ouvert est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Exemple 3. Exemples de bases d'ouverts.

- Dans un espace métrique, l'ensemble des boules ouvertes forme une base d'ouverts, de même que l'ensemble des boules ouvertes à rayon rationnel.
- Si (A_k) est une famille de parties de E, les intersections finies des A_k forment une base d'ouverts de la topologie engendrée par $(A_k)_{k\in K}$.

Proposition 2. ***[Fai]*** *Soit E un ensemble, et soit $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de E. Alors la topologie engendrée par $\mathcal{B}$ admet $\mathcal{B}$ pour base d'ouverts si et seulement si E est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$ et*

$$\forall\, U,V \in \mathcal{B},\ \forall\, x \in U \cap V,\ \exists\, W \in \mathcal{B}, \quad x \in W \subset U \cap V\ .$$

Exemple 4. Construction de topologies à partir d'une base d'ouverts.

- La topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ est celle qui admet pour base d'ouverts l'ensemble des intervalles de la forme $]a,b[$, $]a,+\infty]$, $[-\infty,b[$ pour $a,b \in \mathbb{R}$.
- Soit $E = \prod_{i\in I} E_i$ un produit d'espaces topologiques. On appelle pavé ouvert de E tout ensemble de la forme $\prod_{i\in I} A_i$ où pour tout $i \in I$, A_i est ouvert dans E_i et tel que $A_i = E_i$ sauf pour un nombre fini d'indices i. Alors la topologie produit sur E est celle qui admet pour base d'ouverts l'ensemble des pavés ouverts.

Définition 5. Un espace topologique est dit **séparable** s'il admet une partie dénombrable dense.

Exemple 5. Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est séparable.

On ne rappellera pas ici les notions classiques d'adhérence, d'intérieur, de limites, de valeurs d'adhérence, d'applications continues,... et leurs caractérisations. Insistons néanmoins sur le fait que les caractérisations séquentielles ne se généralisent pas à un espace topologique général. Mais elles restent vrai à partir du moment où chaque point admet un système fondamental dénombrable de voisinages (ce qui est le cas d'un espace métrique).

Exercice 2□. Vrai-Faux. Soit E un espace topologique

1. Si E est métrisable, alors tout espace homéomorphe à E l'est aussi.

2. Si une suite converge dans E, alors sa limite est unique.

3. Si $a \in E$ est la limite d'une sous-suite de (u_n), alors a est valeur d'adhérence de (u_n).

4. Si $a \in E$ est valeur d'adhérence d'une suite (u_n), alors il existe une sous-suite de (u_n) qui converge vers a.

5. $A \subset E$ est dense dans E si et seulement tout élément de E est limite d'une suite à valeurs dans A.

6. Si une suite admet une unique valeur d'adhérence l, alors cette suite converge vers l.

On suppose dans toute la suite que E est un espace métrique.

7. Une boule ne peut être incluse dans une boule de rayon strictement plus petit.

8. Une boule ouverte est ouverte, et une boule fermée fermée.

9. L'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée correspondante.

Exercice 3□.

Soient E un espace topologique séparé et $A \subset E$.

1. Rappeler les définitions de point adhérent, point isolé et point d'accumulation de A.

2. Soit (x_n) une suite d'éléments de E et soit $X = \{ x_n \ , \ n \in \mathbb{N} \}$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n).

a. Montrer que les points d'accumulation de X sont des valeurs d'adhérence de (x_n). Est-ce que la réciproque est vraie ?

b. Est-ce que $\overline{X} = \mathcal{A}$? Exprimer $\overline{X}$ en fonction de X et $\mathcal{A}$.

c. Montrer que

$$\mathcal{A} = \bigcap_{n \geqslant 0} \overline{\{ x_p \ , \ p \geqslant n \}} \ .$$

d. Est-ce que

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcap_{n \geqslant 0} \{ x_p \ , \ p \geqslant n \}} \ ?$$

3. Soit D une partie dense de E et $d \in D$. À quelle condition $D \setminus \{d\}$ est encore dense dans E ?

Exercice 4. [Q, Exo 2.26]

Soit E un espace métrique.

1. Montrer que E est séparable si et seulement s'il admet une base dénombrable d'ouverts.

2. On suppose E séparable et soit $F \subset E$. Montrer que F est séparable.

Exercice 5. Topologie définie par une famille de semi-distances [CCM, p.97]
Soit E un ensemble. Une semi-distance sur E est une application $d : E \times E \to [0, +\infty]$ telle que pour tous $x, y, z \in E$,

$$d(x,x) = 0,$$
$$d(x,y) = d(y,x),$$
$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z).$$

Si d est une distance, on introduira la semi-boule ouverte $B_d(x,r) = \{ y \in E \mid d(x,y) < r \}$.
Soit $(d_i)_{i\in I}$ une famille de semi-distances sur E. On munit E de la topologie $\mathcal{O}$ engendrée par la famille des semi-boules ouvertes

$$\{ B_{d_i}(x,r) \; ; \; i \in I \; , \; x \in E \; , \; r > 0 \} \; .$$

1. Montrer que les intersections finies de semi-boules ouvertes forment une base d'ouverts.

2. Soit $x \in E$. Monter que

$$\left\{ \bigcap_{j\in J} B_{d_j}(x, r_j) \; ; \; J \subset I \text{ finie} \; , \; r_j > 0 \right\}$$

est un système fondamental de voisinages de x.

3. Montrer qu'une suite (x_n) d'éléments de E converge vers x si et seulement si

$$\forall i \in I, \quad d_i(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \; .$$

4. Supposons qu'il existe $J \subset I$ telle que $\forall i \in I$, $\exists j \in J$, $\quad d_i \leqslant d_j$.
Montrer que les familles $(d_i)_{i\in I}$ et $(d_j)_{j\in J}$ induisent la même topologie sur E.

5. On suppose ici $I = \mathbb{N}$. On suppose de plus que

$$\forall \; x, y \in E, \quad (\forall i \in I, \; d_i(x,y) = 0) \implies (x = y) \; .$$

Pour $x, y \in E$, on note

$$d(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \min\Big(d_k(x,y) \; , \; 1\Big) \; .$$

Montrer que d est une distance sur E et que la topologie induite par d est égale à $\mathcal{O}$.

Exercice 6. Topologie initiale [CCM, p.49]
Soient E un ensemble, $(F_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour chaque $i \in I$ une application $f_i : E \to F_i$.

1. Montrer que la topologie engendrée par la famille $\{ f_i^{-1}(U_i) \; ; \; i \in I \; , \; U_i$ ouvert de $F_i \}$ est la topologie la moins fine qui rende les f_i continues.

Cette topologie est appelée la **topologie initiale** définie par la famille $(f_i)_{i\in I}$. Dans la suite, on munit E de cette topologie.

2. Soit $x \in E$. Montrer que $\left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(V_i) \ ; \ J \subset I \text{ finie }, \ V_i \text{ voisinage de } f_i(x) \text{ dans } E_i \right\}$ est un système fondamental de voisinages de x.

3. Montrer qu'une suite (x_n) d'éléments de E converge vers $x \in E$ si et seulement si pour tout $i \in I$, $(f_i(x_n))$ converge vers $f_i(x)$ dans F_i.

4. Montrer qu'une application g d'un espace topologique G dans E est continue si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i \circ g$ est continue.

5. Soit E un espace topologique et $F \subset E$. Montrer que la topologie induite sur F par E est la topologie initiale définie par l'injection canonique $i : F \to E$.

6. Montrer que la topologie produit sur $E = \prod_{i \in I} E_i$ est la topologie initiale définie par les projections canoniques $\pi_i : E \to E_i$.

7. Soit $(d_i)_{i \in I}$ une famille de semi-distances sur E (cf. Exercice 5). Montrer que la topologie définie par cette famille est la topologie initiale définie par les applications $x \mapsto d_i(x,a)$ pour $i \in I$ et $a \in E$.

Exercice 7. Distances Ultramétriques [Fai, Chap.IV, Pb 1], [Sk]
Soit (E,d) un espace métrique. On supposera que d est ultramétrique, c'est-à-dire que

$$\forall x,y,z \in E, \quad d(x,z) \leqslant \max(d(x,y), d(y,z)) \ .$$

1. Soient $x,y,z \in E$. Montrer que $d(x,y) \neq d(y,z) \implies d(x,z) = \max(d(x,y), d(y,z))$.
(Autrement dit, tout triangle est isocèle.)

2. Montrer que toute boule ouverte est fermée et que tout point d'une boule ouverte est centre de cette boule. En déduire que deux boules ouvertes non disjointes sont comparables pour l'inclusion.

3. Montrer que toute boule fermée est ouverte et que tout point d'une boule fermée est centre de cette boule.

4. Montrer qu'une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si $\lim_{n \to \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

5. Montrer que la distance discrète δ sur E est ultramétrique. En trouver les suites de Cauchy. Un tel espace est-il complet ?

Remarque 1. Si E est muni d'une structure d'anneau et d'une fonction $v : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (appelée valuation) telle que

- $\cdot\ \forall x \in E, \quad v(x) = +\infty \iff x = 0,$
- $\cdot\ \forall x \in E, \quad v(-x) = v(x),$
- $\cdot\ \forall x,y \in E, \quad v(x+y) \geqslant \min(v(x), v(y))$,

alors il est possible de construire une distance ultramétrique sur E en posant $d(x,y) = a^{-v(x-y)}$ où $a > 1$ est fixé. C'est ainsi que l'on construit la distance p-adique sur $\mathbb{Q}$ (cf. [Fai, Chap.IV, Pb 1]). Aussi, si A est un anneau commutatif intègre, la valuation polynômiale induit une distance ultramétrique sur $A[X]$; en utilisant le théorème de complétion d'un espace métrique de la Section 2 cela permet de voir l'ensemble des séries formelles comme complété de $A[X]$ pour cette distance ultramétrique.

Exercice 8. ► DEV ◄ **Théorème de Prolongement de Tietze-Urysohn [S]**
Plusieurs démonstrations de ce théorème sont disponibles dans la littérature. On trouvera dans le livre [G-An] une preuve assez directe. Le livre [ZQ] donne une preuve qui découle du théorème de l'application ouverte. L'exercice ci-dessous est en fait tiré de [S] (Théorème 2,XXII,2 ;2. page 347) ; comme on se limite au cadre des espaces métriques, on peut utiliser la remarque que Schwartz a écrite juste après la preuve du théorème (et qui constitue la première question du présent exercice).

Soit E un espace métrique, soit F un fermé de E, soit $[a,b]$ un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ et soit une fonction $f : F \to [a,b]$ continue. On veut montrer qu'il existe une $g : E \to [a,b]$ continue qui prolonge f.

1. Soient A, B deux fermés disjoints de E et soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $g : E \to [a,b]$ continue qui vaut a sur A et b sur B.

2. Prouvons le théorème en plusieurs étapes.

a. Montrer que l'on peut supposer $[a,b] = [-1,1]$

b. En utilisant la question 1, construire par récurrence une suite (g_n) de fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$ telles que

$$|g_n| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{et} \qquad \forall x \in F, \quad |f(x) - g_0(x) - \ldots - g_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} .$$

c. Conclure.

Pour compléter (prolonger...) cet exercice, on pourra se demander si une fonction définie sur F à valeurs dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{C}^*$) admet toujours un prolongement par continuité à E tout entier à valeurs dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{C}^*$).

Exercice 9. Un exemple de topologie non métrisable [Fai, C]
Soit $E = [0,1]^{[0,1]}$ l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $[0,1]$ muni de la topologie produit.

1. Donner une base d'ouverts de E. Que signifie que (f_n) converge vers f dans E ?

2. On appelle fonction simple toute fonction de $[0,1]$ dans $[0,1]$ nulle en dehors d'un nombre fini de points. Montrer que l'ensemble des fonctions simples est dense dans E.

3. Montrer qu'une fonction non nulle sur une infinité non dénombrable de points n'est pas limite de fonctions simples.

4. En déduire que la topologie de la convergence simple sur E n'est pas métrisable.

Exercice 10*. Topologie et matrices

Cet exercice est tiré de [G-Alg, Chap.IV,§3], et de [FGN-Alg2]. Sur le thème "Topologie et Matrices", on pourra aussi consulter [BMP, Chap.4].

1. Soit $p \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que l'adhérence des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang p est l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p.

2. On va calculer l'adhérence des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire. Montrer que les racines de P sont toutes dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $\max\left(1, \sum_{0 \leqslant i \leqslant n-1} |a_i|\right)$.

c. En déduire que l'ensemble des polynômes de degré n unitaires et scindés sur $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.

d. Quelle est l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

3. Quel est l'intérieur des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ? (On pourra admettre que l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$ admettant n racines distinctes est un ouvert de $\mathbb{K}_n[X]$.)

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres.

a. Montrer qu'il existe une suite de matrices semblables à A qui tend vers $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

b. Montrer que A est nilpotente ssi 0 est adhérent à sa classe de similitude.

c. Montrer que A est scalaire ssi sa classe de similitude est bornée (on pourra utiliser le fait que A est scalaire ssi (u, Au) est liée pour tout $u \in \mathbb{C}^n$).

d. Montrer que A est diagonalisable ssi sa classe de similitude est fermée (on pourra remarquer que si A est diagonalisable, alors $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est "diagonalisable et a la même liste de valeurs propres comptées avec ordre de multiplicité" ssi B est semblable à A).

Remarque 2. Pour montrer que l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients réels et scindés sur $\mathbb{R}$ est fermé, on peut aussi montrer le lemme suivant [BMP, Lemme 4.70] : $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| \geqslant |\mathcal{I}m(z)|^n .$$

2 Complétude

Définition 6. [ZQ, V.I.1] Deux distances d_1 et d_2 sur un ensemble E sont dites

- **topologiquement équivalentes** si elles définissent la même topologie (c'est-à-dire que l'identité de (E, d_1) dans (E, d_2) est un homéomorphisme),
- **uniformément équivalentes** si l'identité de (E, d_1) dans (E, d_2) est uniformément continue et sa réciproque aussi,
- **Lipschitz-équivalentes** s'il existe $k, K > 0$ telles que $kd_1 \leqslant d_2 \leqslant Kd_1$ (c'est-à-dire que l'identité de (E, d_1) dans (E, d_2) est lipschitziennne et sa réciproque aussi).

Remarque 3. [ZQ, V.I.1]. Chaque propriété ci-dessus est strictement plus forte que la précédente. En effet, si l'on munit $\mathbb{R}$ des distances

$$d_1(x,y) = |x-y| \quad , \quad d_2(x,y) = |x^3 - y^3| \quad , \quad d_3(x,y) = \min(1, d_1(x,y))$$

On peut vérifier que d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes mais pas uniformément équivalentes, et que d_1 et d_3 sont uniformément équivalentes mais pas Lipschitz-équivalentes.

Exercice 11. Inspiré par [Fai, Chap.IV, Pb.3]
Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante. On suppose que pour tous $u, v \in \mathbb{R}_+$,

$$\varphi(u) = 0 \iff u = 0 \, ,$$
$$\varphi(u+v) \leqslant \varphi(u) + \varphi(v) \, .$$

De plus, pour $x, y \in \mathbb{R}$, on note $d(x,y) = |x-y|$ et $d'(x,y) = \varphi(d(x,y))$.

1. Montrer que d' est une distance sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\mathrm{Id} : (\mathbb{R}, d') \to (\mathbb{R}, d)$ est uniformément continue.

3. Montrer que $\mathrm{Id} : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d')$ est continue en zéro ssi φ est continue en 0.
Montrer que dans ce cas, $\mathrm{Id} : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d')$ est uniformément continue.

4. En déduire que d et d' sont topologiquement équivalentes ssi elles sont uniformément équivalentes. Montrer que d et d' sont Lipschitz-équivalentes si et seulement s'il existe deux constantes $k, K > 0$ telles que pour tout $t \geqslant 0$, $kt \leqslant \varphi(t) \leqslant Kt$.

5. Montrer que les fonctions $t \mapsto \min(1,t)$, $t \mapsto \frac{t}{1+t}$, $t \mapsto \log(1+t)$ et $t \mapsto \arctan(t)$ vérifient les hypothèses données sur φ.

Exercice 12. [CCM, Exo VI.4]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante.
Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $d(x,y) = |x-y|$ et $d_f(x,y) = |f(x) - f(y)|$.

1. Montrer que d et d_f sont topologiquement équivalentes si et seulement si f est continue.

2. Montrer que $(\mathbb{R}, d_f)$ est complet si et seulement si f est surjective.

3. Si deux espaces métriques sont homéomorphes, est-ce que la complétude de l'un implique la complétude de l'autre ?

Ainsi, les notions de complétude, de suites de Cauchy, et d'applications uniformément continues ne dépendent pas seulement de la topologie. En fait, ce sont des notions reliées à la "structure uniforme" de l'espace. Pour plus de détails à ce sujet, cf. [CCM, Chap.6, §5]. Cependant, la situation est plus simple dans le cas où la distance est induite par une norme, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 13$^\square$. Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.
1. Montrer que
$$\begin{aligned} & \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \ \text{(la topologie } \mathcal{O}_1 \text{ est moins fine que } \mathcal{O}_2\text{)} \\ \iff & \exists k > 0,\ \|\cdot\|_1 \leqslant k\|\cdot\|_2 \\ \iff & \exists k > 0,\ B_2(0,1) \subset B_1(0,k)\ . \end{aligned}$$
2. En déduire que les trois propositions de la Définition 6 sont équivalentes ici.

Ainsi deux normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sur un espace vectoriel E seront dites **équivalentes** si l'une des trois propositions de la Définition 6 est vraie ce qui revient à dire qu'il existe deux constantes $k, K > 0$ telles que $k\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant K\|\cdot\|_1$.

Exercice 14$^\square$. [G-An]
Montrer qu'un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.

Exercice 15$^\square$. Théorème des fermés emboîtés ou Théorème de Cantor [CCM]
Soit (E,d) un espace métrique.
1. On suppose E complet. Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés bornés non vides dont la suite des diamètres tend vers 0, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.
2. Montrer la réciproque.

Remarque 4. Le théorème n'est pas vrai si l'on n'impose pas de condition sur la suite des diamètres (construire un contre-exemple facile, ou voir [H], Chap. 16)

Proposition 3. *Si E est un espace métrique complet et si $F \subset E$, alors F est complet si et seulement s'il est fermé.*

Théorème 1. ***Prolongement des Applications Uniformément Continues***
Soit A une partie dense d'un espace métrique (E,d) et g une application uniformément continue de A dans un espace métrique complet (F,δ).
Alors l'application g se prolonge, de manière unique, en une application continue $f : E \to F$. De plus ce prolongement f est uniformément continu.

Ce théorème de prolongement a de nombreuses applications. Mentionnons par exemple la définition de la transformée de Fourier dans L^2 ou la construction de l'intégrale des fonctions réglées (on rappelle qu'une fonction est réglée si et seulement si elle est limite uniforme de fonctions en escalier ; cf. [G-An] pour une autre caractérisation). À propos de prolongement d'applications uniformément continues, on pourra aussi s'intéresser (comme le suggère le rapport de jury 2014) au prolongement d'applications lipschitziennes définies sur un sous-espace (pas nécessairement dense), voir [Ma] pour le cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Exercice 16. ► DEV ◄ **Complété d'un Espace Métrique [CCM, Ch.6, Th 3.11], [G-An]**
Soit (E,d) un espace métrique. On se propose de montrer qu'il existe un espace métrique complet qui admet un sous-espace dense s'identifiant isométriquement à E. Aussi, on va montrer que cet espace complet est unique à isométrie bijective près.

1. Montrer d'abord l'unicité à isométrie bijective près.

2. Pour l'existence, notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites de Cauchy dans E que l'on munit de la relation d'équivalence suivante définie par

$$(x_n)\ \mathcal{R}\ (y_n) \quad \Longleftrightarrow \quad (d(x_n,y_n) \longrightarrow 0)\ .$$

On note $\hat{E}$ le quotient de $\mathcal{E}$ par $\mathcal{R}$.

a. Pour $x=(x_n)$ et $y=(y_n)$ dans $\mathcal{E}$, montrer que $\lim d(x_n,y_n)$ ne dépend que des classes d'équivalence $\hat{x},\hat{y}$ de x et de y. On peut donc poser $\hat{d}(\hat{x},\hat{y}) = \lim d(x_n,y_n)$.

b. Montrer que $\hat{d}$ est une distance sur $\hat{E}$.

c. Pour $x \in E$, on note $f(x)$ la classe de la suite constante égale à x. Montrer que $f : E \to \hat{E}$ est une isométrie et que $f(E)$ est dense dans $\hat{E}$.

d. Montrer que $\hat{E}$ est complet.

3. Quels sont les complétés des espaces métriques suivants ?
a. L'espace métrique $\mathbb{Q}$ des rationnels muni de la distance induite par la valeur absolue.
b. L'espace $\mathscr{C}_c(\mathbb{R})$ des fonctions à support compact dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme.
c. L'espace $\mathscr{C}([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme $f \mapsto \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$.

Théorème 2. ***Théorème de Baire***
Soit E un espace métrique complet et $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de E denses dans E. Alors

$$\Omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$$

est dense dans E.

Corollaire 1. *Soit E un espace métrique complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés de E d'intérieurs vides. Alors*

$$\Gamma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

est d'intérieur vide.

Ce corollaire est souvent utilisé dans sa version contraposée : si (F_n) est une suite de fermés dont la réunion est d'intérieur non vide, alors l'un de ces fermés a un intérieur non vide.

Plus généralement, un **espace de Baire** est un espace topologique qui vérifie la propriété de Baire : toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. Le théorème de Baire ci-dessus assure donc qu'un espace métrique complet est un espace de Baire. On trouvera dans [CCM, Chap. 7] quelques propriétés des espaces de Baire (par exemple, tout ouvert d'un espaire de Baire est de Baire). A noter aussi que les espaces localements compacts (c'est-à-dire les espaces topologiques séparés dont tout point admet un système fondamental de voisinages compacts) sont aussi des espaces de Baire.

Définition 7. Soit E un espace topologique et soit $A \subset E$.
On dit que A est un **$\mathcal{G}_\delta$-dense** si A est **égale** à une intersection dénombrable d'ouverts denses.
On dit que A est **maigre** au sens de Baire si A est contenue dans une union dénombrable de fermés d'intérieurs vides.
On dit qu'une propriété est vraie **presque partout au sens de Baire** si elle est vraie en dehors d'un ensemble maigre (et donc elle est vraie sur un G_δ-dense).

Remarque 5. Dans un espace de Baire...

- Un G_δ-dense est dense.
- Une partie maigre est d'intérieur vide (on dit parfois nulle-part dense).
- Toute intersection dénombrable de $\mathcal{G}_\delta$-denses est encore un $\mathcal{G}_\delta$-dense.
- Une réunion dénombrable de parties maigres est maigre.

Exercice 17. Démonstration du Théorème de Baire [B]
On reprend les notations du Théorème 2. Soit $B(x_0, r_0)$ une boule ouverte quelconque.
Il faut et il suffit de montrer qu'on a $B(x_0, r_0) \cap \Omega \neq \emptyset$.
1. Contruire une suite (x_n, r_n) à valeurs dans $E \times \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap O_n \\ 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2} \end{cases} .$$

2. Conclure.

Proposition 4. ***[Rud]*** *Dans un espace métrique complet sans point isolé, aucun ensemble dénombrable n'est un $\mathcal{G}_\delta$ dense.*

Les applications du théorème de Baire en analyse sont très nombreuses. On en donne quelques unes dans la fin de ce paragraphe. On en donnera d'autres très importantes dans le TD d'analyse fonctionnelle. Mentionnons immédiatement d'autres applications qui ne seront pas traitées ici (et qui pourraient constituer des développements, pour certains un peu ambitieux) :

- l'existence d'un $\mathcal{G}_\delta$-dense de fonctions continues qui ne sont pas somme de leur série de Fourier (cf. TD d'analyse fonctionnelle).

— l'étude des points de continuité d'une fonction de deux variables continues par rapport à chaque variable [W].
— la caractérisation suivante des polynômes, voir [G-An, Annexe A, Exo 5] ou [ZQ, Chap.6, Exo 17] : une fonction $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un polynôme si et seulement si pour tout $\forall x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(x) = 0$.
— le critère de Kitaï donnant l'hypercyclicité d'un opérateur (c'est-à-dire l'existence de point dont l'orbite sous l'action de l'opérateur est dense) ; voir à ce sujet [Q, 4e ed., exo 5.21], [GT1, Chap.II.2, Exo 14] et aussi l'écrit d'analyse et probabilités de 1999.
— l'existence de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ nulle part analytiques [D].

Exercice 18$^\square$. [G-An, Chap. I.5, Exo 8]
Montrer qu'un espace vectoriel normé admettant une base dénombrable n'est pas complet.

Exercice 19$^\square$. Fonctions continues nulle part monotones [CCM, Ch.7,Prop.4.1.]
Considérons l'ensemble F des fonctions $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ telles qu'il existe $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ non vide et non réduit à un point sur lequel f est monotone.

1. Soient $\alpha < \beta$ rationnels dans $[a,b]$. On note $F_{[\alpha,\beta]}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ qui sont monotones sur $[\alpha,\beta]$. Montrer que $F_{[\alpha,\beta]}$ est fermé d'intérieur vide.

2. En déduire que F est d'intérieur vide.

Exercice 20. [CCM, Exo VII.5] ou [G-An]
Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue telle que pour tout $x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(nx) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 21. ▸ DEV ◂ [ZQ, Chap. VIII.4] pour les questions 1,2 et 3, [H, p.136] pour la question 4. La question 3 est aussi traitée dans [G-An, Chap.II, Prob. 10].

1. Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas un espace de Baire. Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$.

2. En déduire qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de continuité soit exactement $\mathbb{Q}$.

3. On construit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la façon suivante. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = 0$ si x est irrationnel et $f(x) = \frac{1}{q}$ si x est rationnel et s'écrit sous forme irréductible $\frac{p}{q}$ avec $q > 0$. Montrer que l'ensemble des points de continuité de f est exactement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{M(n\,x)}{2^n} ,$$

où $M(y)$ désigne la mantisse de y, c'est-à-dire $M(y) = y - \lfloor y \rfloor$. Montrer que l'ensemble des points de continuité de f est exactement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 22. ► DEV ◄ **Densité des fonctions continues nulle part dérivables [G-An]**
On pose $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble

$$U_{\varepsilon,n} = \left\{ f \in E \mid \forall x \in [0,1],\, \exists y \in [0,1],\ 0 < |y-x| < \varepsilon, \quad \left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right| > n \right\}.$$

1. Montrer que $U_{\varepsilon,n}$ est un ouvert dense dans E.

2. En déduire que l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans E.

Remarque 6. On peut construire explicitement des fonctions continues nulle part dérivables, par exemple en considérant des séries de Fourier lacunaires (voir [ZQ, Chap.4, § VI.4] ou le TD d'analyse de Fourier).

Remarque 7. Les fonctions du type $x \mapsto x^\alpha \sin(x^\beta)$ et $x \mapsto \delta \sin(Nx)$ permettent d'obtenir des amplitudes d'ordre de grandeur différent pour une fonction et sa dérivée.

Exercice 23. Une fonction dérivée est continue sur un ensemble dense [G-An]

1. Soient E et F deux espaces métriques. On suppose E complet, et on considère une suite (f_n) d'applications continues de E dans F qui converge simplement vers f.

a. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_{n,\varepsilon} = \{x \in E \mid \forall p \geqslant n,\ d(f_n(x), f_p(x)) \leqslant \varepsilon\}.$$

Montrer que $\Omega_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ est un ouvert dense dans E.

b. Montrer que

$$\forall x_0 \in \Omega_\varepsilon,\, \exists V \text{ voisinage de } x_0,\, \forall x \in V, \quad d(f(x_0), f(x)) \leqslant 3\varepsilon.$$

En déduire que l'ensemble des points de continuité de f est dense dans E.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Que dire de l'ensemble des points de continuité de la fonction dérivée f' ?

Remarque 8. Il existe aussi des fonctions partout dérivables à dérivée discontinue sur une partie dense (voir un exemple explicite construit comme la somme d'une série de fonctions dans [G-An, p.233]).

Pour approfondir les propriétés des fonctions dérivées, on pourra se référer à [CQ].

Exercice 24*. [CQ], [CLF1], [G-Alg]
Un nombre réel x est dit de Liouville si, pour tout entier n, il existe un rationnel $\frac{p}{q}$ $(q \geqslant 2)$ tel que

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$$

Montrer que l'ensemble des nombre de Liouville est un $\mathcal{G}_\delta$-dense de mesure de Lebesgue nulle.

Ainsi, les parties négligeables au sens de Baire ne sont pas les parties négligeables au sens de Lebesgue.

3 Compacité

3.1 Compacité, Précompacité, et Complétude

Pour cette partie, on pourra se référer à [CCM] ou [ZQ].

Définition 8. On dit qu'un espace topologique E est **compact** s'il est **séparé** et s'il vérifie la **propriété de Borel-Lebesgue**, c'est-à-dire que de pour tout recouvrement de E par des ouverts $(O_i)_{i\in I}$

$$E \subset \bigcup_{i\in I} O_i \ ,$$

on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Par passage au complémentaire, la propriété de Borel-Lebesgue revient à dire que de toute famille de fermés d'intersection vide, on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide.

Exercice 25. Soient E et F deux espaces topologiques homéomorphes. Est-ce que la compacité de l'un implique la compacité de l'autre ?

Remarque 9. Si K est un sous-espace d'un espace topologique E, alors K est compact si et seulement s'il est séparé et si de tout recouvrement fini de K par des ouverts **de E**, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Proposition 5.

— *Une partie compacte d'un espace topologique séparé est fermée.*

— *Un sous-espace fermé d'un compact est compact.*

— *Dans un espace topologique séparé, une union finie de compacts est compacte.*

— *Dans un espace compact, toute suite admet une valeur d'adhérence.*

— *Dans un espace compact, une suite admettant une unique valeur d'adhérence converge.*

Définition 9. Un espace métrique (E,d) est dit **précompact** si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, a_1, \dots a_n \in E, \quad E = \bigcup_{k=1}^{n} B(a_k, \varepsilon) \ .$$

Proposition 6. *[CCM, exo IV.9] Tout espace métrique précompact est séparable.*

Théorème 3. *Théorème de Bolzano-Weierstrass*
Un espace métrique (E,d) est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de E, on peut extraire une sous-suite convergente.

Exercice 26. Démonstration du Théorème de Bolzano-Weierstrass [G-An]

1. Supposons E compact et soit (x_n) une suite d'éléments de E.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{x_p \ ; \ p \geqslant n\}$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$ est non vide. En déduire que la condition est nécessaire.

2. Montrons la réciproque. On suppose que toute suite vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass.
Soit $E \subset \bigcup_{i\in I} O_i$ un recouvrement de E par des ouverts.

a. Par l'absurde, montrer que

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall a \in E,\ \exists i \in I, \quad B(a,\varepsilon) \subset O_i\ .$$

b. Montrer que E est précompact.

c. Conclure.

Cette démonstration nous invite à énoncer la propriété suivante.

Proposition 7. *Un espace métrique est compact si et seulement s'il est précompact et complet.*

Remarque 10. Munis de la distance usuelle,
· $\mathbb{R}$ est complet mais ni compact, ni précompact.
· $[0,1[$ est précompact mais ni compact, ni complet.

Exercice 27. Démonstration de la Proposition 7

La condition nécessaire est facile.
Soit (E,d) un espace métrique précompact et complet, et (x_n) une suite d'éléments de E.

1. Montrer qu'on peut en extraire une sous-suite de Cauchy.

2. Conclure.

Proposition 8. *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.*

Remarque 11. En effet, on voit facilement que tout segment est précompact et complet, donc compact. On pourrait déduire cette proposition du résultat suivant : **de toute suite réelle, on peut extraire une sous-suite monotone** (exercice) ; on peut aussi montrer que la liminf (resp. limsup) d'une suite bornée est sa plus petite (resp. plus grande) valeur d'adhérence. Il est aussi possible de montrer directement que les segments vérifient la propriété de Borel-Lebesgue en utilisant l'axiome de la borne supérieure [CCM].

Théorème 4. *Soient E,F deux espaces topologiques et $f : E \to F$ continue. On suppose que E est compact et que F est séparé.*
Alors $f(E)$ est compact. En particulier, f est une application fermée, c'est-à-dire que l'image de tout fermé de E est un fermé de F.

Corollaire 2. *Soient E,F deux espaces topologiques et $f : E \to F$. On suppose que E est compact, que F est séparé, et que f est continue et bijective.*
Alors f est un homéomorphisme de E sur F.

Théorème 5. ***Théorème de Heine***

Soient E, F des espaces métriques et $f : E \to F$ continue. On suppose E compact. Alors f est uniformément continue.

Exercice 28. Jauge [Rou]

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $N : E \to \mathbb{R}_+$ une application telle que

· $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \iff x = 0_E$,

· $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,

· la boule unité $B_N = \{x \in E \ , \ N(x) \leqslant 1\}$ est convexe.

Montrer que N est une norme.

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit K une partie de E. Montrer l'équivalence des assertions suivantes.

(i) K est compact, convexe, symétrique par rapport à 0 et 0 est intérieur à K.

(ii) Il existe une norme N sur E telle que K soit la boule unité fermée B_N associée à N.

Remarque 12. En poursuivant cet exercice, on peut montrer que tout convexe compact non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie n est homéomorphe à la boule unité fermée de $\mathbb{R}^p$ pour un certain $p \leqslant n$ (voir [CLF1, Exo sur le th. de Schauder]).

Exercice 29*. Distance de Hausdorff

Cet exercice est tiré de **[Q]** sauf la deuxième méthode de la question 5 qui est inspirée de **[G-An]** et **[Fal, Th.8.3]**. Il est traité un peu différemment dans [T] et [M].

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des parties compactes non vides d'un espace métrique E. Pour $A \in \mathcal{K}$, on note d_A la distance à A définie par $d_A(x) = \min_{a \in A} d(x, a)$. On pose

$$\forall A, B \in \mathcal{K}, \quad \delta(A, B) = \|d_A - d_B\|_\infty = \sup_{x \in E} |d(x, A) - d(x, B)| \ .$$

1. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{K}$, $\delta(A, B) = \max\left(\max_{a \in A} d(a, B), \max_{b \in B} d(b, A)\right)$.

2. Montrer que δ est une distance sur $\mathcal{K}$.

3. Pour $A \in \mathcal{K}$ et $\varepsilon \geqslant 0$, on note $V_\varepsilon(A) = \{x \in E \mid d(x, A) \leqslant \varepsilon\}$ le ε-voisinage fermé de A. Montrer que

$$\delta(A, B) = \min\{ \ \varepsilon \geqslant 0 \mid A \subset V_\varepsilon(B) \quad \text{et} \quad B \subset V_\varepsilon(A) \ \} \ .$$

4. Donner un exemple d'un espace métrique E et de deux compacts A, B de E pour lesquels $\delta(A, B) \neq d(A, B)$. (on rappelle que par définition $d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$).

5. On suppose E complet. Montrons que $\mathcal{K}$ est complet. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy dans $\mathcal{K}$.

Première méthode :

a. Montrer qu'il existe $\varphi : E \to \mathbb{R}$ continue telle que $\|d_{A_n} - \varphi\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

b. Montrer que $K := \overline{\bigcup A_n}$ est compact (on pourra utiliser la Proposition 7).

c. Montrer que $A := \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé non vide et que $\varphi \geqslant d_A$.

On pourra utiliser que si (f_n) converge uniformément vers f continue et (x_n) converge vers x, alors $(f_n(x_n))$ converge vers $f(x)$.

d. Montrer que $d_{A_n} \geqslant d_K$ puis que $A \subset K$. En déduire que $A \in \mathcal{K}$.
e. Montrer que $\varphi = d_A$ et conclure.

Deuxième méthode : On montre directement que (A_n) converge vers $A := \bigcap_{l \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k \geqslant l} A_k}$.

a. Montrer que $K := \overline{\bigcup A_n}$ est compact (on pourra utiliser la Proposition 7).
En déduire que $A \in \mathcal{K}$.

b. Montrer que pour tout n, $\delta(A_n, A) = \delta\Big(A_n\,, \bigcap_{l \geqslant n} \overline{\bigcup_{k \geqslant l} A_k}\Big)$.

c. Soit $\varepsilon > 0$ et n_0 tel que $p, q \geqslant n_0$ implique $\delta(A_p, A_q) \leqslant \varepsilon$. Soit $n \geqslant n_0$.
Montrer que $\bigcap_{l \geqslant n} \overline{\bigcup_{k \geqslant l} A_k} \subset V_\varepsilon(A_n)$, puis que $A_n \subset V_\varepsilon\Big(\bigcap_{l \geqslant n} \overline{\bigcup_{k \geqslant l} A_k}\Big)$.
(Pour la deuxième inclusion, on pourra utiliser la compacité de K.)

d. Conclure.

6. On suppose E compact. Montrer que $\mathcal{K}$ est compact.

Indication : Soit $\varepsilon > 0$ et $F \subset E$ fini tel que les $\overline{B}(x, \varepsilon)$, $x \in F$ recouvrent E.
Montrer que les boules $\overline{B}(G, \varepsilon)$, $G \subset F$ recouvrent $\mathcal{K}$.

Remarque 13.
· On remarquera bien que la "distance" entre deux fermés définie par $d(F, G) = \inf_{\substack{x \in F \\ y \in G}} d(x, y)$ n'est en fait pas une distance car $d(F, G) = 0$ n'implique pas $F = G$.
· La distance de Hausdorff apparaît dans l'étude d'ensemble fractals, notamment la courbe (ou le flocon) de Von Koch et ses variantes. À ce sujet, voir [Q, Chap.5, Th. II.8], [T] ainsi que [Fal, Theorem 8.3].

3.2 Produits d'Espaces Compacts

Théorème 6. ***Théorème de Tychonoff***
Un produit d'espaces topologiques non vides muni de la topologie produit est compact si et seulement si chacun des espaces du produit est compact.

Cette version très générale du théorème de Tychonoff est difficile et utilise l'axiome du choix. Une démonstration agréable passe par l'utilisation des notions de filtres et d'ultrafiltres qui pallie au défaut de caractérisations séquentielles de certaines propriétés dans les espaces topologiques généraux (pour les curieux, voir [S, Chap.VI] et [CCM]). Néanmoins, si l'on s'en tient aux espaces métriques, le cas d'un produit fini peut être traité par la méthode des extractions successives ; et le cas d'un produit dénombrable par la méthode d'extraction diagonale, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 30$^{\square}$. ► DEV ◄ Tychonoff dénombrable [ZQ]
Soit $(E_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques non vides et $E = \prod E_n$ muni de la topologie produit $\mathcal{O}$. On introduit sur E la distance d définie par

$$\forall x, y \in E, \quad d(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \, \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} \, .$$

1. Montrer que $\delta_n = \frac{d_n}{1+d_n}$ est une distance topologiquement équivalente à d_n, et que la topologie associée à d est bien la topologie produit.

2. Montrer que (E, d) est complet si et seulement pour tout n, (E_n, d_n) est complet.

3. Montrer que (E, d) est compact si et seulement pour tout n, (E_n, d_n) est compact.

Remarque 14. Pour montrer qu'une distance induit une topologie, il ne suffit pas de montrer les deux topologies ont les mêmes suites convergentes. En revanche, c'est suffisant pour montrer que deux distances sont topologiquement équivalentes (caractérisation des fermés par les suites).

Remarque 15. La technique utilisée dans la dernière question est l'**extraction diagonale**. On la retrouvera notamment dans la démonstration du théorème d'Ascoli.

Remarque 16. Ainsi, d'après le théorème de Tychonoff, l'espace $[0,1]^{[0,1]}$ rencontré dans l'Exercice 9 est compact. Ainsi, toute suite de fonctions $f_n : [0,1] \to [0,1]$ admet une valeur d'adhérence pour la convergence simple. Cependant, puisque $[0,1]^{[0,1]}$ n'est pas métrisable, on prendra garde qu'une telle suite (f_n) n'admet pas nécessairement de sous-suite convergente. On peut en effet montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = \sin(nx)$ n'admet pas de sous-suite qui converge simplement.

3.3 Compacité et Espaces Vectoriels Normés

Proposition 9. *Les compacts de $\mathbb{R}^d$ (muni de $\|\cdot\|_\infty$) sont les fermés bornés.*

Théorème 7. *Soit E un espace vectoriel normé réel. Alors E est de dimension finie si et seulement si toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Exercice 31$^{\square}$. Démonstration du Théorème 7
La question 3 fait l'objet de l'exercice "Équivalence des normes : une réciproque" de [Rou].

1. Supposons E de dimension finie et donnons-nous une base $e_1, \dots, e_n$ de E. Soit N une norme sur E. Montrons qu'elle est équivalente à la norme $\|\cdot\|$ sur E définie par $\|x\| = \max |x_i|$ où $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ est la décomposition de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Dans le raisonnement qui suit, E est muni de la topologie associée à la norme $\|\cdot\|$. La sphère $S = \{ x \in E \mid \|x\| = 1 \}$ hérite de la topologie induite.

a. Montrer que S est compacte.

b. En déduire que N atteint son minimum sur S et conclure.

2. Trouver un contre-exemple en dimension infinie.

3. On suppose maintenant que toutes les normes sur E sont équivalentes.

  a. Montrer qu'alors toutes les formes linéaires sont continues.

  b. Montrer qu'en dimension infinie, il existe toujours une forme linéaire non continue.

  c. Conclure.

Exemple 6. L'espace $O(n)$ (resp. $U(n)$) des matrices orthogonales (resp. unitaires) est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

Remarque 17. Ainsi, tout espace vectoriel normé réel de dimension finie n est égal à $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie produit à isomorphisme bicontinu près.

Définition 10. On dit qu'une partie A d'un espace topologique séparé est **relativement compacte** si son adhérence est compacte.

Théorème 8. ***Théorème de Riesz***
Soit E un espace vectoriel normé réel. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) E est de dimension finie.

(ii) Toute partie bornée de E est relativement compacte.

(iii) La boule unité fermée de E est compacte.

Lemme 9 (Riesz [B]).
Soit E un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel fermé, et $\varepsilon \in]0,1[$.
Si $F \neq E$, *alors il existe* $u \in E$ *tel que* $\|u\| = 1$ *et* $d(u,F) \geqslant 1-\varepsilon$.

Exercice 32. Démonstration du Théorème 8 [B]

1. Montrer que (ii), et (iii) sont équivalentes.

2. Démontrer le lemme 9.

3. Conclure.

Remarque 18. Le Théorème 8 s'applique aussi aux espaces vectoriels normés complexes puisqu'ils sont des espaces vectoriels normés réels par oubli de structure. Cependant,
· $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-evn de dimension infinie, mais sa boule unité fermée est compacte.
· $\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Q}$-evn de dimension 1, mais sa boule unité fermée n'est pas compacte.
De même, l'équivalence des normes en dimension infinie peut tomber en défaut pour des espaces vectoriels normés sur des corps non complets, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 33. Deux normes non équivalentes sur $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
Sur le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{\, a + b\sqrt{2}\ ;\ a,b \in \mathbb{Q}\,\}$, on introduit les normes

$$N_0(a+b\sqrt{2}) = |a+b\sqrt{2}| \quad , \quad N_1(a+b\sqrt{2}) = \max(|a|,|b|)\ .$$

1. On pose $x = \sqrt{2}-1$. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) de rationnels telles que

$$\forall n \geqslant 1, \quad x^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad , \quad a_n(-1)^n > 0 \quad , \quad b_n(-1)^n < 0\ .$$

En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $(\sqrt{2}+1)^n = |a_n| + |b_n|\sqrt{2}$.
2. Montrer que N_0 et N_1 ne sont pas équivalentes.

Comme le montre le théorème de Riesz, dans un espace de dimension infinie, la boule unité n'est jamais relativement compacte. Dans un tel espace se pose donc la question de la caractérisation des parties compactes. La Sous-section 5.2 donne une réponse pour le cas de l'espace des fonctions continues sur un compact muni de la topologie de la convergence uniforme.

4 Connexité

Pour cette partie, on renvoie à [CCM] et [S].
Soit E un espace topologique.

Définition 11. L'espace E est dit **connexe** s'il n'admet pas de partition en deux ouverts disjoints. Autrement dit, E est connexe s'il n'existe pas de partie à la fois ouverte et fermée autre que $\varnothing$ et E.

Théorème 10. *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$ sont les intervalles.*

Théorème 11. *L'image d'un connexe par une application continue est un connexe.*

En corollaire des deux derniers théorèmes, on obtient le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 12. *L'espace E est connexe si et seulement si toute application continue de E dans $\{0,1\}$ est constante.*

Théorème 13. ***Théorème de l'Arbre et de l'Écorce***
Si A est une partie connexe de E, alors toute partie B telle que $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe. En particulier, l'adhérence d'une partie connexe est connexe.

Théorème 14. ***Théorème du Passage des Douanes***
Soient $A, B \subset E$. Si A est connexe et rencontre à la fois l'intérieur $\mathring{B}$ et l'extérieur $\overset{\circ}{\overbrace{B^c}}$ de B, alors A rencontre la frontière de B.

Théorème 15. *Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties connexes de E ayant deux à deux des intersections non vides, alors leur réunion est connexe.*

Définition 12. On dit que deux éléments $x, y \in E$ sont **connectés** s'ils appartiennent à une même partie connexe de E. La relation de connexion est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence pour la relation de connexion sont appelées les **composantes connexes** de E.

Exercice 34$^{\square}$. [CCM, Exo V.1]
Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties connexes de E telle que pour tous $i, j \in I$, il existe une famille finie $i_0 = i, i_1, \ldots, i_{p-1}, i_p = j$ d'éléments de I telle que $A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k} \neq \varnothing$ pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$. Montrer que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.

Proposition 10.

- *La composante connexe d'un point $a \in E$ est la réunion des connexes contenant a.*
- *Les composantes connexes sont fermées.*

Remarque 19. Les composantes connexes ne sont pas ouvertes en général. Par exemple, dans $\mathbb{Q}$ les composantes connexes sont les singletons.

Définition 13. On dit que E est **totalement discontinu** si les composantes connexes de E sont réduites à un point.

Théorème 16. *Soit $E = \prod_{i \in I} E_i$ un produit d'espaces topologiques.*

- *Si E_i est connexe pour tout $i \in I$, alors E est connexe.*
- *Si E est non vide et connexe, alors E_i est connexe pour tout $i \in I$.*
- *La composante connexe du point $a = (a_i) \in E$ est $\prod_{i \in I} A_i$ où A_i est la composante connexe de a_i dans E_i.*
- *Si E_i est totalement discontinu pour tout $i \in I$, alors E est totalement discontinu.*

Exemple 7. [S]

- L'espace $\mathbb{Q}$ muni de la distance usuelle est totalement discontinu
- L'espace produit $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est totalement discontinu. On notera qu'il n'est pas discret (car tous les ouverts sont infinis), et donc un produit infini d'espaces discrets n'est pas nécessairement discret.

Remarque 20. [S]

L'application

$$f: \begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} & \longrightarrow & [0,1] \\ (x_n)_{n \geqslant 1} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{x_n}{2^n} \end{array}$$

est continue (car 1-lipschitzienne lorsque l'on munit $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ de la distance

$$d(x,y) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

qui induit bien la topologie produit), et surjective en raison de l'existence du développement dyadique d'un nombre $x \in [0,1]$. Comme $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ est compact et $[0,1]$ séparé, on obtient par le Corollaire 2 que si f était injective, ce serait un homéomorphisme entre $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ et $[0,1]$. Mais ceci ne peut être car $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ est totalement discontinu alors que $[0,1]$ ne l'est pas. Cela explique topologiquement la nécessaire non-unicité du développement dyadique.

Définition 14. On dit que E est connexe par arcs si pour tous $a, b \in E$, il existe une application continue $f : [0,1] \to E$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

Proposition 11. *Un espace topologique connexe par arcs est connexe.*

Définition 15. On dit que E est localement connexe si tout point admet un système fondamental de voisinages connexes.

Proposition 12. *Dans un espace localement connexe, les composantes connexes sont ouvertes et fermées.*

Remarque 21. Bien que très riche, la notion de **simple connexité** ne sera pas abordée ici. De même, nous n'aborderons pas les applications de la connexité à la théorie de l'indice. Pour cela, on renvoie le lecteur au TD d'analyse complexe, ou à **[AM]**. Mentionnons tout de même le célèbre théorème suivant, dont la preuve est difficile malgré l'apparente simplicité de l'énoncé.

Théorème 17. ***Théorème de Jordan [AM], [Q], [GT1]***
Soit Γ une courbe de Jordan fermée de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire que Γ est l'image d'une application continue $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ($a < b$ dans $\mathbb{R}$) telle que $\gamma(a) = \gamma(b)$ et telle que $\gamma_{|[a,b[}$ est injective.
Alors $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ a exactement deux composantes connexes qui ont Γ pour frontière commune.

Remarque 22. Lorsque dans un espace topologique connexe E, l'on veut montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(x)$ dépendant du point x est vraie partout, on peut montrer que

$$\{ \ x \in E \mid \mathcal{P}(x) \text{ est vraie } \}$$

est ouvert, fermé et non vide.

Exercice 35$^{\square}$. [CCM, Exo V.3]
Montrer qu'un ouvert non vide connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

Exercice 36$^{\square}$. [CCM, Chap. V, §6.1]
Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 37*. Sur un ensemble D, est-ce que deux topologies engendrant les mêmes parties connexes sont égales ?

Exercice 38. Exemples d'espaces connexes non connexes par arcs
1. [CCM, Chap V.,§4.3]
Posons

$$\begin{aligned} E_1 &= \{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \mid x > 0 \text{ et } y = \sin(1/x) \ \} \ , \\ E_2 &= \{0\} \times [-1,1] \ . \end{aligned}$$

Montrer que $E = E_1 \cup E_2$ est connexe, non connexe par arcs.
2. [G-An, Chap I.4, Exo 4]
Montrer que

$$\Gamma = \left[\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} (\{x\} \times [0,+\infty[\,) \right] \cup \left[\bigcup_{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} (\{x\} \times]-\infty, 0[\,) \right]$$

est connexe mais pas connexe par arcs.

Remarque 23. On pourra poursuivre la question 1 en montrant que $E_1 \cap E_2$ n'est pas localement connexe [Q].

Exercice 39*. Ensemble triadique de Cantor [BP] et [W, Exo B60]

Définissons par récurrence $A_0 = [0,1]$ puis

$$\forall n \geqslant 0, \quad A_{n+1} = \left(\frac{A_n}{3}\right) \cup \left(\frac{2 + A_n}{3}\right) .$$

Définissons alors l'ensemble de Cantor

$$K = \bigcap_{n \geq 0} A_n .$$

1. Montrer que K est compact.

2. On va montrer que K est négligeable pour la mesure de Lebesgue.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$A_n = \bigsqcup_{x_1,\ldots,x_n \in \{0,1\}} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{3^k} , \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{3^k} + \frac{1}{3^n} \right] ,$$

et que

$$\partial A_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{3^k} + \frac{\varepsilon_n}{3^n} \; ; \; x_1, \ldots, x_n \in \{0,2\} \; ; \; \varepsilon_n \in \{0,1\} \right\} .$$

b. Montrer que $A_{n+1} \subset A_n$, que $\partial A_n \subset \partial A_{n+1}$.

c. En déduire que $\lambda(K) = 0$ où λ est la mesure de Lebesgue.

d. En déduire que $\mathring{K} = \varnothing$ puis que $K = \partial K$.

3. On va montrer que K est égal à

$$\tilde{K} := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} \; ; \; (x_k) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}^*} \right\}$$

(on notera bien que le développement triadique peut être impropre, c'est-à-dire ne contenir que des 2 à partir d'un certain rang).

a. Remarquer que pour tous $n,p \in \mathbb{N}$, $\partial A_n \subset A_{n+p}$.
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\partial A_n \subset K$.
Déduire des questions précédentes que $\tilde{K} \subset K$.

b. Réciproquement, soit $x \in K$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} \in \{0,2\}$ tels que

$$\text{le nombre} \quad x^{(n)} := \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{(n)}}{3^k} \quad \text{vérifie} \quad |x - x^{(n)}| \leqslant \frac{1}{2} 3^{-n} .$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|x^{(n+1)} - x^{(n)}| < \frac{1}{3^n}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1^{(n+1)}, \ldots, x_n^{(n+1)}) = (x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)})$.

Indication : On pourra raisonner par l'absurde et considérer $k_0 = \min\left(\{1 \leqslant k \leqslant n \mid x_k^{(n)} \neq x_k^{(n+1)}\}\right)$.

En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(x_k^{(n)})_{n \geqslant k}$ est constante. On notera x_k sa valeur.

Déduire des questions précédentes que $x = \displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{x_k}{3^k}$. Conclure.

4. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \{0,2\}^{\mathbb{N}^*} & \longrightarrow & K \\ & (x_k)_{k \geqslant 1} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{x_k}{3^k} \end{array}$$

est un homéomorphisme. En déduire que K est non dénombrable, totalement discontinu et sans point isolé.

Remarque 24. On peut poursuivre l'étude de l'ensemble de Cantor plus loin que cet exercice. Il est en effet possible de montrer **[W, Problème D4]** :

- que tout espace métrique compact non vide totalement discontinu et sans point isolé est homéomorphe à K,
- qu'un espace métrique compact est totalement discontinu si et seulement s'il est homéomorphe à un sous-espace fermé de K.

Mentionnons aussi qu'en partant de l'exercice ci-dessus, on peut construire très élégamment la fonction de Lebesgue (aussi appelée escalier du diable) **[BP]** : celle-ci est la limite uniforme des fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_0^x \mathbf{1}_{A_n}(t)\, dt\ .$$

Cette fonction est continue croissante, dérivable presque partout avec $f' = 0$ presque partout, mais $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$!

Mentionnons aussi qu'à partir de l'ensemble de Cantor, on peut construire le "tipi de Cantor" qui est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ contenu dans le triangle de sommets $(0,0)$, $(1/2,1/2)$, $(1,0)$. Cet ensemble est connexe mais devient totalement discontinu lorsqu'on retire son sommet $(1/2,1/2)$. Pour les curieux, cf. **[StS]**.

5 Espaces de Fonctions Continues

Pour le cours relatif à cette partie, on pourra se référer à **[CCM, Chap. VIII]** ou **[ZQ, Chap.V]** qui se restreint au cas d'un espace de départ compact. Aussi, on pourra trouver dans les chapitres XV et XX de **[S]** des remarques, exemples et contre-exemples particulièrement pertinents.

5.1 Structure des Espaces de Fonctions Continues

Soit E un espace topologique et F un espace métrique. On munit $\mathscr{C}(E,F)$ de la topologie induite par la semi-distance (cf. Exercice 5) définie par

$$\forall f,g \in \mathscr{C}(E,F), \quad d(f,g) = \sup_{x\in E} d_F(f(x),g(x)) \ .$$

On notera que l'on autorise la valeur ∞ pour $d(f,g)$ et c'est pourquoi on dit seulement que d est une semi-distance. On remarquera qu'une suite (f_n) de $\mathscr{C}(E,F)$ converge vers f pour cette topologie si et seulement si

$$\sup_{x\in E} d_F(f_n(x),f(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ ,$$

de sorte que cette topologie est appelée la **topologie de la convergence uniforme**. Lorsque E est un compact, on remarquera que d est toujours finie et donc est une distance. Si E n'est pas compact, alors comme on l'a vu dans la Section 2, on peut toujours remplacer d_F par une distance bornée qui lui est uniformément équivalente et ainsi $\mathscr{C}(E,F)$ sera toujours muni d'une topologie métrisable. Si F est un espace complet, alors $\mathscr{C}(E,F)$ est complet car une **limite uniforme de fonctions continues est continue**.

Supposons dans ce paragraphe que F est un espace vectoriel normé. Alors l'espace vectoriel $\mathscr{C}_b(E,F)$ des fonctions continues bornées de E dans F est muni de la norme uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in E} \|f(x)\|_F \ .$$

Si de plus F est complet, alors $\mathscr{C}_b(E,F)$ est un espace de Banach. En particulier, $\mathscr{C}_b(E) := \mathscr{C}_b(E,\mathbb{R})$ est un espace de Banach. Si E est compact, alors toutes les fonctions continues sur E sont bornées. Ainsi, si K est un compact et F un espace vectoriel normé, $\mathscr{C}(K,F) = \mathscr{C}_b(K,F)$ est un espace vectoriel normé, complet si F est complet. En particulier, $\mathscr{C}(K) = \mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ est un espace de Banach.

On notera que $\mathscr{C}(E,F)$, en tant que sous-espace de F^E, hérite de la topologie produit, qui induit la convergence simple. Il est donc tentant de tisser des liens entre ces deux topologies, notamment pour profiter, lorsque F est compact, de la compacité de l'espace produit donnée par le théorème de Tychonoff.

Un premier lien est donné par les théorèmes de Dini qui font l'objet de l'exercice suivant (et qui peuvent constituer un développement convenable à condition de coupler avec une application convaincante, par exemple l'approximation uniforme de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$ par des polynômes (cf. Exercice 44), ou le théorème de Glivenko-Cantelli **[N]**).

Exercice 40□. Théorèmes de Dini, [CCM] (pour 1), [G-An], [N] (pour 2)

1. Soit K un espace compact et soit (f_n) une suite de fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$.
On suppose que (f_n) est croissante ($f_n \leqslant f_{n+1}$) et que (f_n) converge simplement vers une fonction continue f. Montrer qu'alors (f_n) converge uniformément sur K.

2. Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions croissantes.
On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction continue f.
Montrer qu'alors (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$.

Ainsi, sous certaines hypothèses de monotonie et de continuité, la convergence uniforme équivaut à la convergence simple. En général, pour pouvoir passer de la convergence simple à la convergence uniforme, il faudra une hypothèse de régularité sur les fonctions composant la suite, qui est matérialisée par la notion d'équicontinuité (cf. [CCM, Chap.VIII, Th. 3.5]). Cette hypothèse joue donc un rôle crucial dans la caractérisation des compacts de $\mathscr{C}(E,F)$ donnée par le théorème d'Arzela-Ascoli présenté dans la prochaine sous-section.

Remarquons pour finir que dans beaucoup de situations, la notion de convergence naturelle n'est pas la convergence uniforme, mais la convergence localement uniforme. La topologie correspondante, dite **topologie de la convergence uniforme sur les compacts** est induite par la famille de semi-distances d_K définies par

$$\forall f,g \in \mathscr{C}(E,F), \quad d_K(f,g) = \sup_{x\in K} d_F(f(x),g(x)) \ ,$$

où K est un compact de E. On reverra cette topologie dans le TD d'analyse fonctionnelle.

Remarque 25. On a étudié dans cette sous-section la structure topologique des espaces de fonctions continues. On peut aussi mener l'étude de la structure algébrique de ces espaces. En particulier, l'étude des idéaux maximaux, ou des automorphismes de l'algèbre $\mathscr{C}(K)$ constituent des exercices intéressants [GT1] (et le premier est un classique).

5.2 Théorème d'Arzela-Ascoli

Soient E un espace topologique, et F un espace métrique.

Définition 16. On dit que $\mathcal{A} \subset \mathscr{C}(E,F)$ est **équicontinue** en $a \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}(a),\ \forall y \in V,\ \forall f \in \mathcal{A}, \quad d_F(f(a),f(y)) < \varepsilon \ .$$

Définition 17. Supposons que E est métrique.
On dit que $\mathcal{A} \subset \mathscr{C}(E,F)$ est **uniformément équicontinue** si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x,y \in E, \quad (\ d_E(x,y) < \eta \implies \forall f \in \mathcal{A},\ d_F(f(x),f(y)) < \varepsilon\ ) \ .$$

Remarque 26. Toute famille uniformément équicontinue est équicontinue en tout point de l'espace de départ.

Exemple 8.

- Toute famille finie d'applications continues au point $a \in E$ (resp. uniformément continues) est équicontinue au point $a \in E$ (resp. uniformément équicontinue).
- Toute famille d'applications $k-$lipschitziennes est uniformément équicontinue (et a fortiori équicontinue en tout point).
- Si E est un espace vectoriel normé, la famille des translatés ($\tau_a f = f(\cdot - a)$) d'une fonction uniformément continue f est uniformément équicontinue.

Proposition 13. *Si K est métrique compact, une famille équicontinue en tout point de K est uniformément équicontinue.*

Remarque 27. Cette proposition rappelle bien évidemment le théorème de Heine. On laisse la démonstration en exercice.

Proposition 14. *Une partie A d'un espace métrique X est relativement compacte si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite qui converge dans X (exercice).*

Théorème 18. ***(Ascoli)*** *Soient K et F deux espaces métriques.*
On suppose K compact et F complet.
Alors $\mathcal{A} \subset \mathscr{C}(K, F)$ est relativement compacte dans $\mathscr{C}(K, F)$ si et seulement si

- *$\mathcal{A}$ est équicontinue en tout point de K,*
- *pour tout $x \in K$, $\mathcal{A}(x) = \{ f(x) \ ; \ f \in \mathcal{A} \}$ est relativement compacte dans F.*

Remarque 28. Il existe de très nombreuses versions du théorème d'Ascoli (voir par exemple [ZQ]) Nous en citons une plus forte ci-dessous.

Théorème 19. ***(Ascoli)*** *Soient K un espace topologique compact et F un espace métrique.*
Alors on a la même équivalence que dans le Théorème 18.

Remarque 29. On peut en donner une version encore plus forte qui ne nécessite pas la compacité de l'espace de départ. Mais attention, dans ce cas, on obtient que $\mathcal{A}$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. À ce sujet, voir [CCM, Chap.VIII, §2.4 et §3.9].

Remarque 30. Nécessité des hypothèses

- $\mathcal{A}(x)$ relativement compacte : $\mathcal{A} = (\mathrm{Id}_{[0,1]} + n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de $\mathscr{C}([0, 1])$ uniformément équicontinue qui n'admet pas de sous-suite uniformément convergente.
- $\mathcal{A}$ équicontinue en tout point de K : $\mathcal{A} = (x \mapsto \sin(nx))_n$ est une suite de fonctions de $\mathscr{C}([0, 1])$, qui n'admet pas de sous-suite uniformément convergente.
- K compact : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue à support compact non nulle, la suite $(\tau_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément équicontinue et bornée dans $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ mais elle n'admet aucune sous-suite uniformément convergente dans $\mathscr{C}(\mathbb{R})$. Notez tout de même qu'il y a convergence uniforme sur les compacts, en accord avec la Remarque 29.

Exercice 41. ► DEV ◄ **Démonstration du Théorème 18 [HL]**

On cherche dans un premier temps à vérifier la condition suffisante.

1. Montrer qu'il existe $D \subset K$ dénombrable et dense dans K.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{A}$. Montrer qu'il existe une extraction ψ telle que, pour tout $d \in D$, $(f_{\psi(n)}(d))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F vers une limite notée $f(d)$.

3. Montrer que f se prolonge de manière unique en une application uniformément continue sur K, toujours notée f.

4. Montrer que $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur K et conclure.

5. Montrer la réciproque.

6. Expliquer pourquoi l'on peut se passer de l'hypothèse de complétude sur F.

Pour la preuve du cas général, on pourra se référer à [CCM] ou [S].

Exercice 42$^{\square}$. Un Opérateur Intégral [HL, Chap.1, Prop. 3.4]

Soient X, Y des compacts de $\mathbb{R}^n$ et $K \in \mathscr{C}(X \times Y)$.
Pour $f \in \mathscr{C}(X)$, on définit $Tf : Y \to \mathbb{R}$ par

$$Tf(y) = \int_X K(x,y)f(x)dx$$

Montrer que T envoie $\mathscr{C}(X)$ dans $\mathscr{C}(Y)$ et que T est un opérateur compact, c'est-à-dire que l'image par T de la boule unité fermée B est relativement compacte.

Remarque 31. À propos de la théorie des opérateurs compacts, on pourra consulter [B], et les TD d'analyse fonctionnelle et d'analyse hilbertienne.

Exercice 43*. Les compacts de $\mathscr{C}^\infty([0,1])$ sont les fermés bornés [ZQ, Chap.8,§I.2]

On considère l'ensemble $E = \mathscr{C}^\infty([0,1])$ muni de la distance définie par

$$\forall f,g \in E, \quad d(f,g) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\min(1, \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty)}{2^k} .$$

1. Montrer qu'une suite (f_n) à valeurs dans E converge vers $f \in E$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(f_n^{(k)})$ converge vers $f^{(k)}$ uniformément sur $[0,1]$.

2. En utilisant le théorème d'Ascoli, vérifier que les compacts de (E,d) sont exactement les ensembles fermés qui sont bornés dans le sens suivant : $F \subset E$ est borné si pour tout $\lambda > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que $F \subset \beta B(0,\lambda)$.

3. Montrer que si la topologie sous-jacente à (E,d) était normable alors la boule unité fermée de E (pour cette norme) serait compacte. Qu'en déduit-on ?

Remarque 32. Les exercices précédents donnent des applications du théorème d'Arzela-Ascoli dans le cadre des fonctions continues. Une autre application très intéressante est le théorème des familles normales de Montel qui caractérise les parties compactes de l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert (voir [ZQ], le TD d'analyse fonctionnelle ou le TD d'analyse complexe). Dans les applications sortant du cadre continu, on pourra mentionner le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov donnant la caractérisation des parties relativement compactes dans L^p, cf. [B] ou le TD d'analyse fonctionnelle.

5.3 Théorème de Stone-Weierstrass

Théorème 20. ***(Stone-Weierstrass)***
Soit $\mathcal{A} \subset \mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ où K est un espace métrique compact. On suppose que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre unitaire de $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ qui sépare les points, c'est-à-dire

$$\forall x,y \in K, \quad x \neq y \ \Rightarrow\ \exists f \in \mathcal{A},\ f(x) \neq f(y)\ .$$

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$.

Remarque 33. Le théorème reste valable pour des fonctions à valeurs complexes si l'on suppose que pour toute $f \in \mathcal{A}$, $\bar{f}$ est dans l'adhérence de $\mathcal{A}$, et en particulier si $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison.

Exemple 9. Applications

- Les polynômes sont denses dans $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.
- Une fonction continue et 2π-périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques (ceci ne prouve pas qu'une fonction continue est somme de sa série de Fourier, cf. TD d'analyse fonctionnelle).
- Une fonction réelle f de deux variables x et y est dite à variables séparées si elle s'écrit $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$. Ainsi, si K_1 et K_2 sont deux espaces métriques compacts, l'espace vectoriel engendré par les fonctions à variables séparées est dense dans $\mathscr{C}(K_1 \times K_2,\mathbb{R})$.

Exercice 44. ► DEV ◄ **Démonstration du Théorème 20 [CCM]**
1. On définit une suite (P_n) de polynômes par $P_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\Big(x - P_n(x)^2\Big)\ .$$

Montrer que (P_n) converge uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$. En déduire que pour tout $R > 0$, $x \mapsto |x|$ est limite uniforme d'une suite de polynômes sur $[-R,R]$.
2. Soit $(f,g) \in \mathcal{A}^2$. Montrer que $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ sont dans $\overline{\mathcal{A}}$.
3. Soient $a \neq b$ deux éléments de X. Soient α et β deux réels. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.

4. Soit $f \in \mathscr{C}(K,\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$.
a. Soit $x \in K$. Montrer qu'il existe $g \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que

$$g(x) = f(x) \qquad \text{et} \qquad \forall y \in K, \quad g(y) \leqslant f(y) + \varepsilon \ .$$

b. Montrer qu'il existe $h \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que $f - \varepsilon \leqslant h \leqslant f + \varepsilon$. Conclure.

Remarque 34. A la place de la première question, on aurait aussi pu démontrer que la fonction $\sqrt{1-\cdot}$ est limite uniforme sur $[0,1]$ des sommes partielles de sa série de Taylor (il suffit de montrer que cette série converge normalement, sa somme sera aussitôt $\sqrt{1-\cdot}$ par unicité de la limite simple).

Remarque 35. Si une suite de polynômes converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors la limite est un polynôme. Autrement dit, $\mathbb{R}[X]$ est fermé dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour la convergence uniforme. En particulier, les polynômes ne sont pas denses dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour la topologie de la convergence uniforme. L'hypothèse de compacité sur K est donc bien nécessaire. On pourra se demander aussi si les polynômes sont denses dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, ou si les polynômes (à valeurs complexes) sont denses dans $\mathscr{C}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

Exercice 45. Séparabilité de $\mathscr{C}(K)$ [GT1]
Soit K un espace métrique compact. Montrer que $\mathscr{C}(K)$ est séparable.

Indication : on pourra introduire une suite dense (x_n) et considérer la sous-algèbre engendrée par la fonction $\mathbb{1}$ et les fonctions $\theta_n(x) = d(x,x_n)$.

Exercice 46*. Non-séparabilité de $\mathscr{C}_b(X)$ pour X non compact
L'énoncé suivant a été écrit à partir de [GT1, Chap. II.4, Exo 4] et de [B, Chap.4, Rq.9].

Soit X un espace métrique non compact et soit $E = \mathscr{C}_b(X)$ muni de la distance uniforme.
1. Montrer qu'il existe une suite (x_n) de points de X sans valeur d'adhérence, et une suite (ε_n) de réels > 0 qui décroît vers zéro tels que les $\overline{B}(x_n,\varepsilon_n)$ soient disjointes deux à deux.
2. Pour tout n, construire $\varphi_n : X \to [0,1]$ continue valant 1 en x_n et à support dans $\overline{B}(x_n,\varepsilon_n)$.
3. Soit $A \subset \mathbb{N}$. On pose pour tout $x \in X$, $\varphi_A(x) = \sum_{n\in A} \varphi_n(x)$. Montrer que $\varphi_A \in E$.
4. Montrer que dans E, les boules $U_A = B(\varphi_A, 1/2)$, $A \subset \mathbb{N}$ sont deux à deux disjointes.
5. Supposons qu'il existe dans E une suite (f_p) dénombrable dense. Construire à partir de la suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et de la famille $(U_A)_{A\subset\mathbb{N}}$ une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{N}$.
6. Conclure.

Remarque 36.

- Pour $X = \mathbb{R}^d$, on peut faire une construction explicite des boules $\overline{B}(x_n,\varepsilon_n)$ ce qui rend les questions 1 et 3 beaucoup plus faciles.
- On notera bien que, conformément à [B, Chap. 4, Rq. 9], pour montrer qu'un espace n'est pas séparable, il suffit d'exhiber une famille non dénombrable d'ouverts disjoints deux à deux.

Mentionnons pour terminer cette section deux applications qui constituent de bons développements. De la densité des polynômes trigonométriques dans $\mathscr{C}([0,1])$ découle le critère de Weyl pour l'équirépartition d'une suite de réels modulo 1, cf. [HL, Chap.1, Exo 6] ou [FGN-An2]. Enfin, le théorème de Müntz [G-An], [CLF1, Ex. 21-1] donne une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha_n) \in]0,+\infty[^{\mathbb{N}}$ strictement croissante pour que les fonctions $x \mapsto x^{\alpha_n}$ engendrent un sous-espace vectoriel dense de $\mathscr{C}([0,1])$. Si vous souhaitez proposer le théorème de Müntz en développement, il est bon de connaître aussi l'existence du théorème de Chudnovsky qui affirme que si $[a,b] \subset]0,1[$ alors $\mathbb{Z}[X]$ est dense dans $\mathscr{C}([a,b])$ (voir [FGN-An2]).

6 Théorèmes de Points Fixes

Pour ce paragraphe, on renvoie à [CCM] ou aussi au très bon chapitre 4 de [Rou]. Le livre [N] contient aussi des réflexions intéressantes sur les théorèmes de points fixes.

Théorème 21. ***Théorème du Point fixe de Banach-Picard***
Soit (E,d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application contractante, i.e.

$$\exists k \in [0,1[,\ \forall x,y \in E, \quad d(f(x),f(y)) \leqslant k\, d(x,y)\ .$$

Alors f admet un unique point fixe $a \in E$, c'est-à-dire un point a tel que $f(a) = a$.
De plus, pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérés de x_0 par f, définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n)\ ,$$

converge géométriquement vers a, au sens où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(x_n,a) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_1,x_0)\ .$$

Corollaire 3. *Une application d'un espace métrique complet dans lui-même dont une itérée est contractante possède un point fixe unique.*

Exercice 47. Nécessité des hypothèses du Théorème 21
Trouver des contre-exemples dans les cas suivants (avec les mêmes notations que dans l'énoncé du Théorème 21) :
- $f : E \to E$ est contractante mais n'admet pas de point fixe parce que E n'est pas complet.
- E métrique complet, mais $f : E \to E$ n'admet pas de point fixe parce qu'elle n'est pas contractante, bien qu'elle verifie pour tous $x,y \in E$ distincts, $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$.
- E métrique complet, $f : E \to E$ admet plusieurs points fixes parce qu'elle n'est pas contractante.

Théorème 22. ***Théorème du Point Fixe avec Paramètre [CCM]***
Soient Λ un espace topologique, (E,d) un espace métrique complet, et $f : \Lambda \times E \to E$ une application vérifiant les propriétés suivantes.

(i) Pour tout $x \in E$, $\lambda \mapsto f(\lambda, x)$ est continue.

(ii) Il existe $k < 1$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$, $x \mapsto f(\lambda, x)$ est contractante de rapport k.

Alors pour chaque $\lambda \in \Lambda$, il existe un unique $a(\lambda) \in E$ tel que $f(\lambda, a(\lambda)) = a(\lambda)$. De plus, l'application $a : \lambda \mapsto a(\lambda)$ est continue.

Remarque 37. Les théorèmes du point fixe ont de nombreuses applications, dont les preuves du théorème des fonctions implicites, du théorème de Cauchy-Lipschitz (la version avec paramètre donnant la continuité de la solution par rapport aux conditions initiales), et de la méthode de Newton. On renvoie au TD de calcul différentiel pour ces applications. Le théorème du point fixe est aussi utilisé dans la preuve du théorème de Stampacchia, voir [B] ou le TD d'analyse hilbertienne.

Exercice 48$^{\square}$. Équation intégrale de Volterra [Rou, Ex.61]
Soit $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues.
Montrer qu'il existe une unique fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in [a,b], \quad f(t) = \varphi(t) + \int_a^t K(s,t) f(s) ds \ .$$

Exercice 49$^{\square}$. Variations sur point fixe et compacité [Rou, Ex.56]
1. Soient (E,d) un espace métrique compact et $f : E \to E$. On suppose que

$$\forall x, y \in E, \quad x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x,y) \ .$$

Montrer que f admet un point fixe a unique (on pourra raisonner sur $\min_x d(x, f(x))$).
Montrer de plus que pour tout $x_0 \in E$, la suite $x_n = f^n(x_0)$ converge vers a.
2. Un cas simple du Théorème de Brouwer
Soient K un compact convexe d'un espace vectoriel normé et $f : K \to K$ telle que

$$\forall x, y \in K, \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\| \ .$$

Montrer que f admet au moins un point fixe a.

Théorème 23. ***Théorème de Brouwer [BBR], [L], [T], [GT2], [Rou], [Q]***
Soit C un compact convexe d'un espace vectoriel normé de dimension finie.
Alors toute fonction continue $f : C \to C$ admet un point fixe.

On notera bien qu'il n'y a pas unicité dans ce cas. Aussi, il ne faut pas confondre ce théorème avec le théorème du point fixe de Browder [GT1, p.121]. Plusieurs démonstrations du théorème de Brouwer existent. L'une d'entre elles, due à Milnor [Mil] et que l'on propose dans l'exercice ci-dessous, utilise le lemme de non-rétraction suivant, dans sa version $\mathscr{C}^1$. En fait les deux énoncés sont équivalents.

Lemme 24. ***Lemme de non-rétraction*** *Soit B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ et $S = \partial B$. Alors il n'existe pas de fonction continue $f : B \to S$ telle que $f_{|S} = \mathrm{Id}_S$.*

Exercice 50*. Théorème de Brouwer à partir du Lemme de non-rétraction $\mathscr{C}^1$ [BBR],[L]

On admet le lemme de non-rétraction $\mathscr{C}^1$ (que vous verrez dans le TD de calcul différentiel) : si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant B, alors il n'existe pas de fonction $f : U \to S$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f_{|S} = \mathrm{Id}_S$. Soit $f : C \to C$ une application continue.

1. Montrer que l'on peut se restreindre au cas où C est la boule unité fermée B de $\mathbb{R}^n$.

Dans la suite, on suppose par l'absurde que $f : B \to B$ n'a pas de point fixe.

2. Montrer que $\delta = \inf\limits_{x \in B} \|f(x) - x\|$ est > 0.

3. Montrer qu'il existe r_1, r_2 vérifiant $0 < r_1 < 1 < r_2$ et $g : B(0, r_2) \to B(0, r_1)$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que

$$\forall x \in B, \quad \|f(x) - g(x)\| < \varepsilon \, .$$

4. Montrer que pour tout $x \in B(0, r_2)$, on a $g(x) \neq x$.

5. Pour tout $x \in B(0, r_2)$, on note $k(x)$ le point d'intersection de S avec la droite $(x, g(x))$ tel que $g(x) \notin [x, k(x)]$. Montrer que k est de classe $\mathscr{C}^1$. Conclure.

6. [GT2] Montrer la version continue du lemme de non-rétraction (Lemme 24).

Le théorème de Brouwer a de nombreuses applications (comme par exemple le théorème de Perron-Frobenius, voir [GP, Chap.2, §2, Exo.7]), et permet de prouver son extension en dimension infinie, qui fait l'objet du théorème suivant.

Théorème 25. ***Théorème du Point Fixe de Schauder***

Soit C un compact convexe d'un espace vectoriel normé E de dimension infinie. Alors toute fonction continue $f : C \to C$ admet un point fixe.

Ce théorème de Schauder permet de donner une démonstration élégante du théorème de Cauchy-Peano-Arzela (voir [N], [P] ou le TD d'équations différentielles).

Exercice 51. ► DEV ◄ **Th. de Schauder à partir du Th. de Brouwer**
La preuve ci-dessous est tirée de [P]. Elle consiste à se ramener à la dimension finie en exploitant la précompacité, en accord avec [B, §VI.1, Rq.1]. Voir aussi [M, Pb. 16].
Soient E un espace vectoriel normé de dimension infinie, C un convexe compact de E et une application continue $f : C \to C$.

1. Soit $\varepsilon > 0$.

a. Montrer qu'il existe des points $a_1, \dots, a_n \in C$ tels que $f(C) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \varepsilon)$.

b. On note $F = \mathrm{Vect}(a_1, \dots, a_n)$ et $C' = C \cap F$. Montrer que C' est compact.

c. Pour chaque $i = 1, \dots, n$, on introduit $\varphi_i : E \to \mathbb{R}_+$ continue définie par

$$\forall x \in E, \quad \varphi_i(x) = \max\Big(\varepsilon - \|x - a_i\| \ , \ 0 \Big) \ .$$

Montrer que $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$ est strictement positive sur $f(C)$.

d. On pose pour tout $y \in f(C)$,

$$p_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varphi(y)} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(y) a_i \ .$$

Montrer que l'on définit ainsi une application continue $p_\varepsilon : f(C) \to C'$ et que

$$\forall y \in f(C), \quad \|p_\varepsilon(y) - y\| \leqslant \varepsilon \ .$$

e. Avec le théorème de Brouwer, montrer que $f_\varepsilon := p_\varepsilon \circ f$ admet un point fixe dans C'.

2. En attribuant à ε les valeurs $\frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$, construire un point fixe de f.

Mentionnons pour terminer l'existence de théorème de points fixes collectifs (c'est-à-dire fixes pour une famille d'applications). Le théorème de Kakutani, dont la version commutative fait l'objet de l'exercice suivant, donne une façon élégante de construire la mesure de Haar associée à un groupe métrique compact [GT1].

Exercice 52*. Théorème du Point Fixe de Kakutani commutatif [GT1]
Soient E un espace vectoriel normé, et K un compact convexe non vide de E.

1. Soit $T : E \to E$ affine continue stabilisant K. Montrer que T a un point fixe.

2. Soit $(T_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille commutative d'applications affines continues de E dans E stabilisant K. Montrer qu'il existe un point fixe commun à tous les T_i.

3. Démontrer le même résultat lorsque la famille n'est plus nécessairement finie.

Références

[AM] E. Amar et E. Matheron. *Analyse Complexe.* Cassini, 2004.

[B] H. Brézis. *Analyse Fonctionnelle.* Dunod, 1999.

[BBR] N. Bonnault, J.-F. Burnol, et P. Roche. *Analyse, Math Sup et Math Spé. Exercices corrigés posés à l'oral des concours.* Dunod, 1987.

[BMP] V. Beck, J. Malick, et G. Peyré. *Objectif Agrégation.* H-K, 2005.

[BP] M. Briane et G. Pagès. *Théorie de l'Intégration.* Vuibert, 2007.

[C] G. Choquet. *Cours de Topologie.* Masson, 1992.

[CCM] G. Christol, A. Cot, et C.M. Marle. *Topologie.* Ellipses, 1997.

[CLF1] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, et V. Maillot. *Exercices de Mathématiques pour l'Agrégation : Analyse 1.* Masson, 1997.

[CQ] D. Choimet et H. Queffélec. *Analyse Mathématique. Grands Théorèmes du XXème siècle.* Calvage & Mounet, 2009.

[D] J. Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon, 1966.

[Fai] A. Faisant. *TD et TP de Topologie Générale.* Hermann, 1988.

[Fal] K.J. Falconer. *The Geometry of Fractal Sets.* Cambridge University Press, 1985.

[FGN-Alg2] S. Francinou, H. Gianella, et S. Nicolas. *Oraux X-ENS, Algèbre 2.* Cassini, 2009.

[FGN-An2] S. Francinou, H. Gianella, et S. Nicolas. *Oraux X-ENS, Analyse 2.* Cassini, 2009.

[G-Alg] X. Gourdon. *Les Maths en Tête, Algèbre.* Ellipses, 1994.

[G-An] X. Gourdon. *Les Maths en Tête, Analyse.* Ellipses, 1994.

[GP] V. Guillemin, A. Pollack. *Differential Topology.* AMS Chelsea Publishing, 2010.

[GT1] S. Gonnord et N. Tosel. *Topologie et Analyse Fonctionnelle.* Ellipses, 1996.

[GT2] S. Gonnord et N. Tosel. *Calcul Différentiel.* Ellipses, 1998.

[H] B. Hauchecorne. *Les Contre-Exemples en Mathématiques.* Ellipses, 2007.

[HL] F. Hirsch et G. Lacombe. *Elements d'Analyse Fonctionnelle.* Dunod, 1999.

[L] J. Lafontaine. *Introduction aux Variétés Différentielles.* EDP Sciences, 1998.

[Ma] P. Mattila. *Geometry of Sets and Measures in Euclidian Spaces : Fractals and Rectifiability.* Cambridge University Press, 1995.

[M] B. Maury. *Analyse Fonctionnelle.* Ellipses, 2004.

[Mil] J.W. Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint.* Princeton Landmarks in Mathematics, 1965.

[N] I. Nourdin. *Agrégation de Mathématiques, Épreuve orale.* Dunod, 2006.

[P] A. Pommellet. *Cours d'Analyse, Agrégation de Mathématiques.* Ellipses, 1998.

[Q] H. Queffélec. *Topologie.* Dunod, 2012.

[Rou] F. Rouvière. *Petit Guide de Calcul Différentiel...* Cassini, 2003.

[Rud] W. Rudin. *Analyse Réelle et Complexe* Dunod, 1998.

[S] L. Schwartz. *Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle.* Hermann, 2008.

[Sk] G. Skandalis. *Topologie et Analyse, 3ème Année.* Dunod, 2004.

[StS] L.A. Steen et J.A. Seebach Jr. *Counterexamples in Topology.* Dover, 1995.

[SR] J. Saint-Raymond. *Topologie, Calcul Différentiel, et Variable Complexe.* Calvage & Mounet, 2008.

[T] F. Testard. *Analyse Mathématique. La Maîtrise de l'Implicite.* Calvage et Mounet, 2012.

[W] C. Wagschal. *Topologie et Analyse Fonctionnelle.* Hermann, 2012.

[ZQ] C. Zuily et H. Queffélec. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2007.