ENS Cachan **Mathématiques**
Préparation à l'agrégation **Année 2015/2016**

Distribution Tempérées

Arthur Leclaire

Références

[Bon] J.M. Bony. *Théorie des Distributions et Analyse de Fourier.* Éditions de l'École Polytechnique, 2006.

[DW] R. Dalmasso et P. Witomski. *Analyse de Fourier et Applications. Exercices corrigés.* Masson, 1996.

[GW] C. Gasquet et P. Witomski. *Analyse de Fourier et Applications.* Dunod, 2001.

[Z] C. Zuily. *Problèmes de distributions et d'équations aux dérivées partielles.* Cassini, 2010.

Exercice 1. Valeur principale de $\frac{1}{x}$

1. Est-ce que $x \mapsto \frac{1}{x}$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$?

2. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{x}\mathbf{1}_{|x|\geqslant\varepsilon}$.
Vérifier que $f_\varepsilon \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et montrer que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon$ existe au sens des distributions.

La distribution limite sera appelée valeur principale de $\frac{1}{x}$, et est donc définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \mathrm{vp}\Big(\frac{1}{x}\Big), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \ .$$

3. Montrer que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est une distribution d'ordre $\leqslant 1$ sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que $x\ \mathrm{vp}(\frac{1}{x}) = 1$.

5. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $xT = 1$.

6. Montrer que $\log|x|$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

7. Montrer que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est une distribution tempérée.

8. Calculer la transformée de Fourier de $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$.

9. En déduire $\widehat{H}$ et $\widehat{\mathrm{sgn}}$.

Exercice 2. Distributions et équations différentielles d'ordre 1 et 2

1. Soient $f \in \mathscr{C}^\infty(I)$ et $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ où $I =]a,b[$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
Résoudre dans $\mathcal{D}'(I)$ l'équation différentielle

$$T' + fT = g \ .$$

2. Soit $k \in \mathbb{R}$.

a. Calculer les solutions élémentaires de l'opérateur différentiel $\frac{d}{dx} + k$.

b. On note f_k l'unique solution élémentaire à support dans $\mathbb{R}_+$.

Soit $g \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ à support dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que $f_k * g$ est bien définie et est solution de

$$T' + kT = g \ .$$

3. Calculer les solutions élémentaires de $\frac{d^2}{dx^2} + 2\alpha \frac{d}{dx} + \beta^2$.

Exercice 3. Distributions et EDO linéaires à coefficients constants

On considère

$$\mathcal{D}'_+ = \{ \, u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \mid \operatorname{Supp}(u) \subset [0, \infty[\, \} \ .$$

On admettra que la convolution définit une structure d'algèbre commutative et associative sur $\mathcal{D}'_+$ dont l'élément neutre est δ.

1. Montrer que pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \geqslant 1$, $(\delta' - \lambda\delta)^n$ est inversible d'inverse

$$(\delta' - \lambda\delta)^{*-n} = H(t) \frac{t^{n-1} e^{\lambda t}}{(n-1)!} \ .$$

2. En déduire qu'une équation différentielle linéaire à coefficients constants (non tous nuls) possède toujours une solution élémentaire appartenant à $\mathcal{D}'_+$.

Exercice 4. Autour de la formule sommatoire de Poisson

Pour $a > 0$, on introduit le peigne de Dirac noté $\Pi_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{an}$ et défini par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \Pi_a, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(na) \ .$$

1. Montrer que $\Pi_a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

2. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Calculer $f \Pi_a$.

3. Soit T une distribution à support compact sur $\mathbb{R}$. Calculer $T * \Pi_a$.

4. On rappelle que

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \ .$$

En déduire que

$$\widehat{\Pi_a} = \frac{2\pi}{a} \Pi_{\frac{2\pi}{a}} \ .$$

5. Soit $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une suite N-périodique. On considère $U = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u(n) \delta_n$.

Exprimer $\widehat{U}$ en fonction de la transformée de Fourier discrète de u définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{Z}, \quad \hat{u}(\xi) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-2i\pi \frac{\xi n}{N}} \ .$$

6. Posons $\text{sin}_c(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$. On rappelle que $\widehat{\text{sin}_c} = \mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}$. On rappelle aussi le théorème d'échantillonnage de Shannon : si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est telle que $\text{Supp}(\hat{f}) \subset [-\pi,\pi]$, alors

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\,\text{sin}_c(x-n)\ ,$$

avec convergence $L^2(\mathbb{R})$ et convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Donner une preuve formelle de ce théorème à l'aide de la transformée de Fourier du peigne de Dirac.

Exercice 5. [Zuily], [Bony, p.182]

1. Calculer la transformée de Fourier de $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{1}{|x|^s}$ pour $s \in (0,d)$.

Indication : pour $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on pourra utiliser

$$\forall \lambda > 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda|x|^2}\hat{\varphi}(x)dx = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\lambda}}\varphi(\xi)d\xi\ ,$$

puis multiplier par $\lambda^{\frac{s}{2}-1}$ et intégrer sur $\lambda \in]0,\infty[$.

2. En déduire que $E : x \longmapsto \frac{-1}{4\pi|x|}$ est une solution élémentaire du laplacien dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. Autour de l'équation de Poisson

1. Résoudre dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'équation $\Delta u = 0$. (On pourra utiliser qu'une distribution dont le support est réduit à $\{0\}$ est une combinaison linéaire de dérivées de δ).

En déduire qu'une fonction harmonique qui tend vers zéro à l'infini est nulle.

2. Soit $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in L^\infty$. On suppose que $d \geqslant 3$.

Montrer que $\Delta u = f$ admet au moins une solution $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.

3. On rappelle que Δ admet une solution élémentaire E de classe $\mathscr{C}^\infty$ en dehors de l'origine.
Soit $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $u = E * f$ est solution de $\Delta u = f$, et que u est $\mathscr{C}^\infty$ en dehors du support de f. Les autres solutions diffèrent d'une fonction harmonique.

4. Montrer que si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifie $\Delta u = 0$, alors $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$.

Pour s'entraîner

Exercice 7. Dérivées au sens des distributions

1. Calculer les dérivées première et seconde de $H = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$.

2. Calculer les dérivées première et seconde de $x \mapsto |x|$.

3. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, calculer $\partial^\alpha \delta_0$.

Exercice 8. Montrer que $\mathcal{F}(x^\alpha) = (2\pi)^d i^{|\alpha|}\partial^\alpha \delta$.

Exercice 9. Transformée de Fourier de l'arctangente

1. On rappelle que $\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \pi e^{-|\xi|}$. Montrer que $\xi \cdot \widehat{\arctan}(\xi) = -i\pi e^{-|\xi|}$.

2. On définit $T(x) = \mathrm{vp}\left(\dfrac{e^{-|x|}}{x}\right)$ en posant

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} e^{-|x|} dx \, .$$

Montrer que T est une distribution d'ordre au plus 1 qui vérifie $xT(x) = e^{-|x|}$.
Montrer de plus que T est tempérée.

3. En déduire la transformée de Fourier de l'arctangente.

4. En déduire la transformée de Fourier de $f(x) = \arctan(\frac{1}{x})$.

Exercice 10. Transformée de Fourier de mesures de probabilité

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Faire le lien entre la fonction caractéristique de X est la transformée de Fourier de la distribution tempérée P_X.

Exercice 11. Montrer que la fonction exponentielle n'est pas dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.
Indication : on pourra fixer $\varphi \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R})$, puis majorer les semi-normes des translatées de φ.

Exercice 12. Équations de convolution

1. Considérons $A = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha \partial^\alpha \delta$. Calculer la convolution $A * u$.

2. Écrire l'équation $\Delta u = f$ sous forme $A * u = f$.

3. Écrire l'équation $u(x+h) - u(x) = f(x)$ sous forme $A * u = f$.

Exercice 13. Solution fondamentale du laplacien dans $\mathbb{R}^2$

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose $f(x,y) = \log r$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

On rappelle l'expression du laplacien en coordonnées polaires : $\Delta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

1. Montrer que pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, $\Delta f(x,y) = 0$.

2. Montrer que $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

3. Montrer que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \quad \langle \Delta f, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r \geqslant \varepsilon} f \Delta \varphi \, dx dy \, .$$

4. Montrer que $\Delta f = 2\pi \delta_0$