L'analyse par ondelettes

Cet outil mathématique s'ajoute aux méthodes classiques d'analyse du signal. Il met l'accent sur les caractéristiques importantes du signal et semble en outre correspondre à des réalités physiologiques du traitement des signaux acoustiques et lumineux chez l'homme.

par Yves Meyer, Stéphane Jaffard et Olivier Rioul

L'analyse du signal porte sur un vaste ensemble de phénomènes et sur des réalités physiques diverses : la variation de la pression de l'air en un lieu donné en fonction du temps est un signal sonore ; l'évolution de l'intensité du courant en un point d'un réseau est un signal électrique ; la vibration du sol est un signal sismique et les fluctuations de l'indice de la bourse constituent un signal économique. Ces signaux dépendent d'une seule variable (ici le temps), mais ce n'est pas toujours le cas. Une photographie en noir et blanc peut être interprétée comme une quantité numérique (le niveau de gris) fonction de deux variables (les coordonnées du point considéré). L'analyse du signal consiste à extraire dans chacun de ces cas l'information pertinente, la nature de celle-ci différant selon la nature physique du signal.

Le géophysicien Jean Morlet s'est penché sur ce problème pour étudier certains signaux en sismique-réflexion, une méthode de recherche pétrolière qui consiste à émettre un signal vibrosismique à la surface du sol à l'aide de camions vibrateurs ; on produit ainsi des ondes modulées en fréquence et de très faible intensité, qui se propagent dans le sous-sol et sont réfléchies différemment selon les couches géologiques. L'écho de ces ondes est capté par un système d'écoute disposé à la surface du sol et enregistré par un camion laboratoire.

L'analyse de ce signal doit renseigner sur la composition du sous-sol et l'éventuelle présence de couches de pétrole. Pour ce problème, l'analyse de Fourier classique s'était depuis longtemps montrée inadaptée et J. Morlet s'était rendu compte que la méthode de Gabor, que nous examinerons plus loin, était inadéquate, car elle ne permettait pas d'obtenir une résolution suffisante. Indépendamment d'un travail effectué au début des années 1960 par le mathématicien argentin Alberto Calderón, à l'Université de Chicago, pour résoudre des problèmes entièrement différents, J. Morlet a proposé en 1983, un procédé révolutionnaire, l'analyse et la synthèse par les ondelettes, qui permet d'analyser efficacement des signaux où se combinent des phénomènes d'échelles très différentes.

La transformation en ondelettes, créée pour résoudre des problèmes posés par la sismique-réflexion, a été ensuite appliquée à l'analyse des sons, des images, et de toute forme de signal.

Les débuts de l'analyse du signal

Le traitement du signal consiste à dégager des « informations » contenues dans un signal qui se déroule au cours du temps. Ce signal *s* est décrit par une fonction $s(t)$ du temps t et peut avoir des origines très diverses (sons musicaux, voix humaine, ondes sismiques, cardiogrammes, etc.). Quelles informations peut-on tirer d'un signal ? Lorsqu'on observe son évolution au cours du temps, on repère bien son commencement, sa fin et la durée de ses éléments caractéristiques, ainsi que des discontinuités, des changements de rythme, etc. En revanche, cette représentation temporelle du signal renseigne peu sur ses périodicités, donc sur ses fréquences. Depuis le XVIII^e siècle, de nombreux mathématiciens étudient la représentation en fréquence des signaux. La technique des séries de Fourier constitue sans doute le point de départ de cette approche qui a abouti à l'analyse par ondelettes.

Les séries de Fourier sont utilisées pour l'analyse des signaux périodiques, c'est-à-dire ceux qui, après un laps de temps, se répètent identiques à eux-mêmes, et ceci indéfiniment. Un tel signal est la superposition d'une onde sinusoïdale fondamentale, dont la fréquence est appelée fréquence fondamentale, et de divers harmoniques dont les fréquences sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale. On calcule les amplitudes de ces différentes fréquences par des formules connues depuis le début du XIX^e siècle. Ces amplitudes s'appellent les coefficients de Fourier.

Les séries de Fourier ne permettent d'analyser que des phénomènes périodiques ; pour les phénomènes non périodiques on a recours à une intégrale de Fourier (ou somme continue) : cette méthode consiste à représenter le signal étudié par une superposition d'ondes sinusoïdales de toutes les fréquences possibles ; les amplitudes associées à chaque fréquence représentent les importances respectives des diverses ondes sinusoïdales dans le signal global. Ces amplitudes forment alors une fonction de la fréquence f que les physiciens appellent « spectre continu des fréquences du signal » : c'est la transformée de Fourier du signal $s(t)$, notée $S(f)$. Cette transformée est égale à l'intégrale pour toutes les valeurs du temps du produit du signal $s(t)$ par la fonction $e^{2i\pi ft}$. On la calcule à l'aide de l'intégrale de Fourier :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{2i\pi ft}\,dt$$

La quantité $e^{2i\pi ft}$ est égale à $\cos 2\pi ft + i \sin 2\pi ft$ où i est un nombre « imaginaire » dont le carré est égal à –1. Le nombre complexe $S(f)$ s'identifie, pour une fréquence f donnée, à un point M du plan qu'on repère par ses coordonnées cartésiennes (partie réelle ou partie imaginaire) ou encore par sa distance à l'origine O (module) et l'écart angulaire (phase) de la droite OM par rapport à l'horizontale.

En étudiant la partie réelle de la transformée de Fourier du signal décrit mathématiquement par $s(t) = \sin 2\pi t + 1/2 \sin 4\pi t + 1/2 \sin 6\pi t + \ldots$, on reconnaît sur le spectre les fréquences des divers harmoniques d'un signal périodique.

L'intégrale de Fourier est très générale, car on peut l'appliquer sans faire d'hypothèse sur l'origine physique du signal : elle s'est révélée très fructueuse aussi bien d'un point de vue théorique que numérique et tout particulièrement depuis que l'on a mis au point, pour la calculer, un algorithme extrêmement économique, la transformée de Fourier rapide.

Cette méthode ne permet pas d'analyser correctement tous les types de signaux, comme le montre l'exemple suivant, tiré de la musique. Si nous jouons une note basse, puis une note plus haute en fréquence, d'un instant initial O à un instant final T, le spectre du signal est très diffus et il est très difficile d'y discerner les deux fréquences émises. L'ordre dans lequel sont jouées les notes n'apparaît pas de façon claire dans la transformée de Fourier. Un autre inconvénient est que l'intégrale de Fourier décompose le signal sur des fonctions sinusoïdales qui oscillent indéfiniment dans le temps. Lorsqu'on additionne ces sinusoïdes, leurs effets s'annulent dans les régions de l'axe du temps où le signal est nul. Là réside la difficulté : il faut effectuer des calculs extrêmement précis pour mettre en évidence ces compensations mutuelles. En d'autres termes l'inconvénient de la transformée de Fourier est que plus un signal est court dans le temps, plus il contient de composantes sinusoïdales d'amplitudes significatives. Inversement un signal sinusoïdal infini correspond à une seule fréquence.

Un procédé plus efficace pour analyser un signal musical consiste à décomposer le signal en des fonctions limitées dans le temps, afin d'en analyser des fragments indépendamment. Une bonne représentation en fréquence doit tenir compte également de la durée des notes émises, d'où l'idée de représenter le signal à la fois en fonction du temps et de la fréquence.

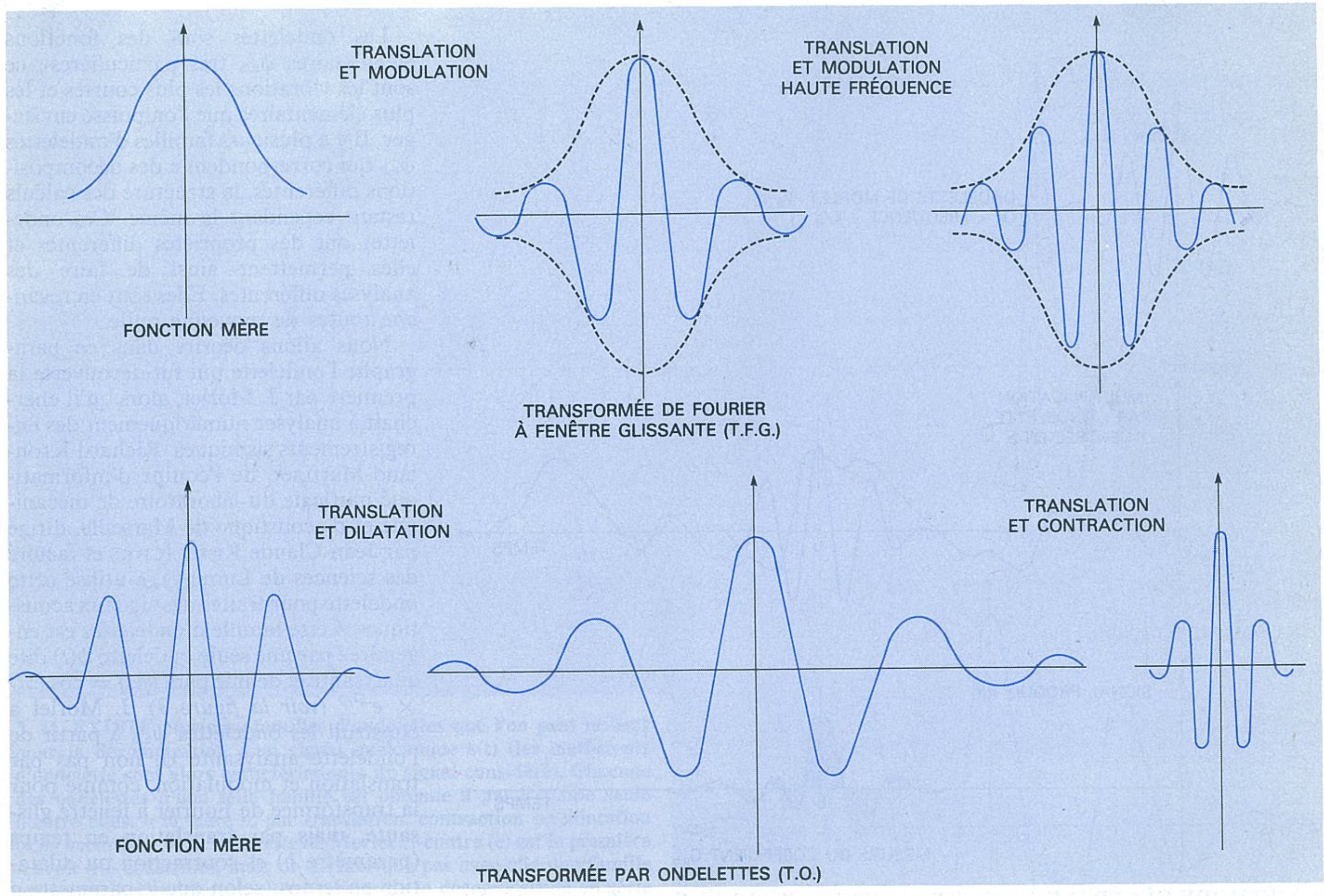
Une représentation en temps est une description directe du signal, alors qu'une représentation en fréquence décrit le signal par sa transformée de Fourier, c'est-à-dire comme superposition de sinusoïdes. Ces sinusoïdes, qui vibrent sans amortissement sur tout l'axe des temps, correspondent strictement aux fréquences du signal. Nous pouvons également décomposer le signal comme somme de fonctions qui vibrent comme des sinusoïdes sur une certaine plage de temps et qui s'amortissent très fortement à l'extérieur de cette plage. Ces fonctions vibrent à une fréquence qui a une signification locale (limitée à la plage de temps considérée). La décomposition du signal à partir de ces fonctions constitue l'analyse temps-fréquence. On définit une fréquence locale selon les coefficients du signal obtenus à partir de ces fonctions. Il s'agit ici d'un léger abus de langage car on n'emploie au sens strict le terme de fréquence qu'à propos d'un phénomène périodique de durée illimitée. Cette notion peut toutefois s'étendre à l'étude des signaux non périodiques.

Dans le cas des deux notes jouées successivement (où nous avons vu que la transformation de Fourier n'était guère opérationnelle), une représentation temps-fréquence s'apparente à celle des partitions musicales, qui indiquent la durée des notes et leur hauteur *(voir la figure 8)*.

Les représentations temps-fréquence

La représentation temps-fréquence met en jeu deux opérations réciproques : l'analyse et la synthèse. Pour effectuer l'analyse du signal, on le décompose en somme de constituants simples et universels, appelés fonctions élémentaires. Les fonctions élémentaires de l'analyse de Fourier sont les fonctions sinusoïdales, elles dépendent d'un seul paramètre (la fréquence) ; la représentation temps-fréquence fait intervenir deux paramètres, a et b, où a est lié à la fréquence et b au temps.

Les coefficients $C_{a,b}$ que l'on affecte à chaque fonction élémentaire $\psi_{a,b}$ pour



1. LA TRANSFORMÉE DE FOURIER à fenêtre glissante (*TFG*) **et la transformée en ondelettes (*TO*) sont deux méthodes de représentation temps-fréquence d'un signal qui consistent à le décomposer en somme de fonctions élémentaires $\psi_{a,b}(t)$, qui dérivent toutes d'une même fonction « mère » $\psi(t)$ par translation dans les deux cas, par modulation en temps ($\psi_{a,b}(t) = \psi(t-b) \times \cos(2\pi at)$) pour la *TFG*, et par contraction et dilatation pour la *TO*. On a représenté ici une fonction « mère » (*à gauche*) et les diverses opérations qu'on peut effectuer sur elle par *TFG* (*en haut*) et par *TO* (*en bas*). La méthode *TFG* présente l'inconvénient que la longueur de la plage temporelle sur laquelle on analyse le signal est fixée une fois pour toutes, alors que la *TO* s'adapte à toutes les échelles temporelles d'analyse.**

décomposer un signal quelconque, donnent une information directe sur les propriétés temporelles et fréquentielles du signal. On calcule ces coefficients en faisant la somme en continu (l'intégrale) du produit du signal $s(t)$ par la fonction élémentaire $\psi_{a,b}(t)$:

$$C_{a,b} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\ \psi_{a,b}\ (t)\ dt$$

Les fonctions $\psi_{a,b}$ que nous n'avons pas encore explicitées doivent être bien localisées dans le temps, de sorte que les coefficients $C_{a,b}$ dépendent seulement des valeurs que prend le signal dans l'intervalle de temps sur lequel la fonction $\psi_{a,b}$ n'est pas négligeable. Enfin, la synthèse donne les règles permettant de reconstruire un signal à partir des éléments $C_{a,b}$ fournis par l'analyse. Cette reconstruction est « robuste » si elle ne demande pas une précision extrême sur les valeurs des coefficients $C_{a,b}$. Nous verrons que la synthèse par ondelettes est particulièrement robuste et que l'algorithme permet de faire des « retouches » très simplement.

La transformée de Fourier à fenêtre glissante

Dans les années 1940, le physicien britannique Dennis Gabor (l'inventeur de l'holographie) découvre la première forme de représentation temps-fréquence. Il obtient une analyse temporelle en découpant arbitrairement le signal en plages de longueur limitée. Chaque plage, centrée autour du paramètre b de localisation en temps, est alors étudiée séparément des autres par l'analyse traditionnelle de Fourier, ce qui revient à décomposer le signal sur des fonctions élémentaires $\psi_{a,b}$ qui dérivent toutes d'une même « fonction fenêtre » $\psi(t)$ par translation en temps (paramètre b) et modulation en temps (on multiplie la fonction ψ par une fonction sinudoïdale de fréquence a). Autrement dit : $\psi_{a,b}(t) = \cos(2\pi at) \times \psi(t-b)$ (*voir la figure 1*). L'inconvénient majeur de ce procédé est que la longueur de la plage est fixée une fois pour toutes et que l'on ne peut pas analyser simultanément des phénomènes dont les échelles de temps sont différentes.

Ce désavantage est patent par exemple en traitement de la parole où interviennent deux composantes très différentes : les voyelles – signal long et assez bien localisé en fréquence – et les consonnes – signal qui délivre une information riche et complexe, sur des échelles de temps qui peuvent être très petites.

Une fenêtre glissante adaptée aux voyelles, est ainsi incapable d'analyser correctement les consonnes. Nous avons donc besoin d'une autre méthode d'analyse qui ne privilégie aucune échelle particulière, mais qui généralise à toutes les échelles l'analyse locale des fréquences obtenues par la méthode de D. Gabor.

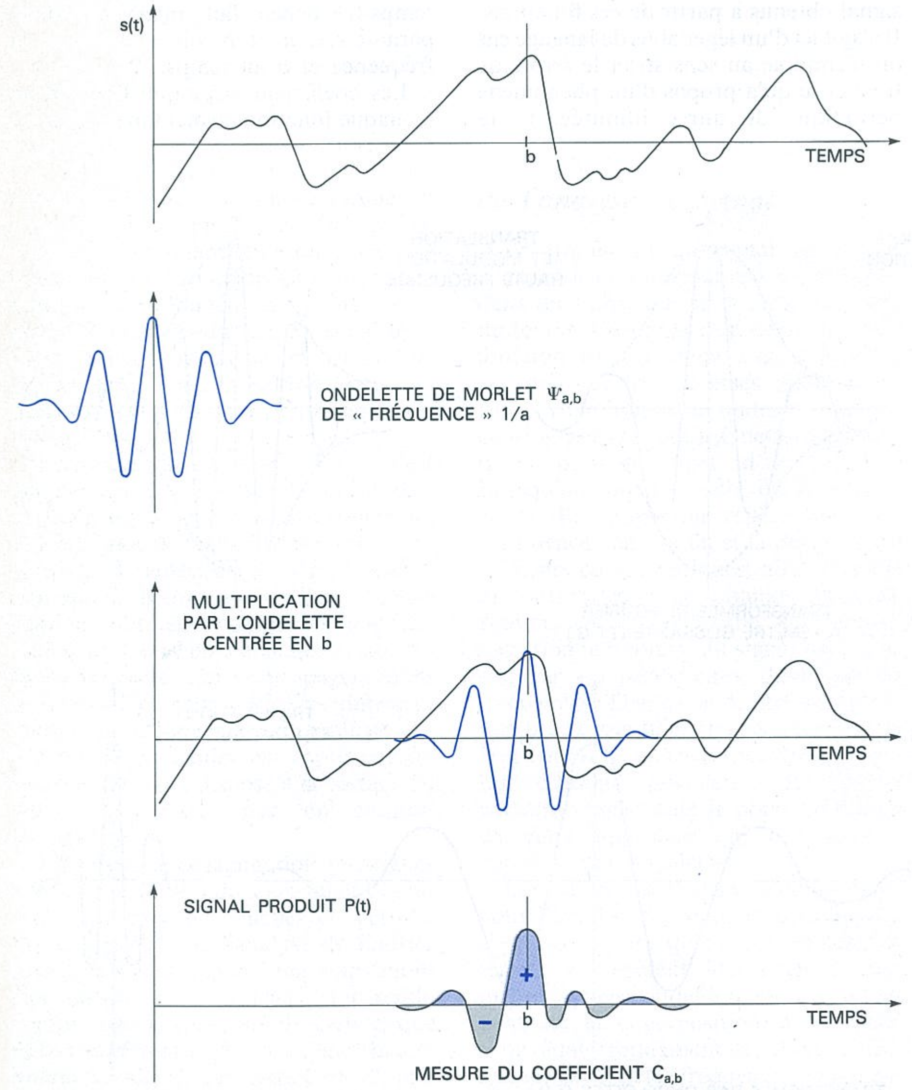
L'analyse multi-échelle par ondelettes

Les ondelettes sont des fonctions élémentaires $\psi_{a,b}$ très particulières ; ce sont les vibrations les plus courtes et les plus élémentaires que l'on puisse envisager. Il y a plusieurs familles d'ondelettes $\psi_{a,b}$ qui correspondent à des décompositions différentes, la structure des calculs restant cependant la même. Ces ondelettes ont des propriétés différentes et elles permettent ainsi de faire des analyses différentes. Elles sont en revanche toutes de moyenne nulle.

Nous allons décrire dans ce paragraphe l'ondelette qui fut découverte la première par J. Morlet, alors qu'il cherchait à analyser numériquement des enregistrements sismiques. Richard Kronland-Martinet, de l'équipe d'informatique musicale du laboratoire de mécanique et d'acoustique de Marseille, dirigé par Jean-Claude Risset (CNRS et faculté des sciences de Luminy), a utilisé cette ondelette pour traiter des signaux acoustiques. Cette famille d'ondelettes est engendrée par une seule ondelette $\psi(t)$ dite analysante et définie par : $\psi(t) = \cos(5t) \times e^{-t^2/2}$ (*voir la figure 3*). J. Morlet a construit les ondelettes $\psi_{a,b}$ à partir de l'ondelette analysante ψ, non pas par translation et modulation, comme pour la transformée de Fourier à fenêtre glissante, mais par translation en temps (paramètre b) et contraction ou dilatation en temps (selon que le paramètre a est plus petit ou plus grand que 1).

Il suffit donc de « jouer à l'accordéon » avec l'ondelette analysante ψ pour obtenir la famille des ondelettes $\psi_{a,b}$ (*voir la figure 1*) :

$$\psi_{a,b}(t) = 1/\sqrt{a}\ \psi((t-b)/a)$$



2. MÉTHODE GÉNÉRALE du calcul d'un coefficient d'ondelette $C_{a,b}$: soit $s(t)$ un signal à analyser (*1*). On prend une ondelette analysante (*2*) (ici l'ondelette de Morlet) $\psi(t)$ caractérisée par une « fréquence » $1/a$. On centre l'ondelette sur une valeur b du temps et on multiplie le signal $s(t)$ par les valeurs $\psi(t)$. On calcule l'aire du signal produit $P(t)$ ainsi obtenu (*en bas*) : l'aire est comptée positivement pour les parties de la courbe situées au-dessus de l'axe des abscisses, et négativement dans le cas inverse. Cette aire est égale au coefficient d'ondelette $C_{a,b}$ correspondant à chaque valeur de la « fréquence » $1/a$ et du temps b.

Pendant un temps délimité, d'autant plus court que a est petit, l'ondelette $\psi_{a,b}$ oscille à une fréquence $1/a$. Lorsque a est très petit, l'intervalle sur lequel l'ondelette $\psi_{a,b}$ n'est pas nulle se contracte autour du point b. L'ondelette effectue ainsi un « zooming » sur n'importe quel phénomène intéressant du signal qui a lieu à une échelle petite au voisinage du point considéré.

La transformée en ondelettes

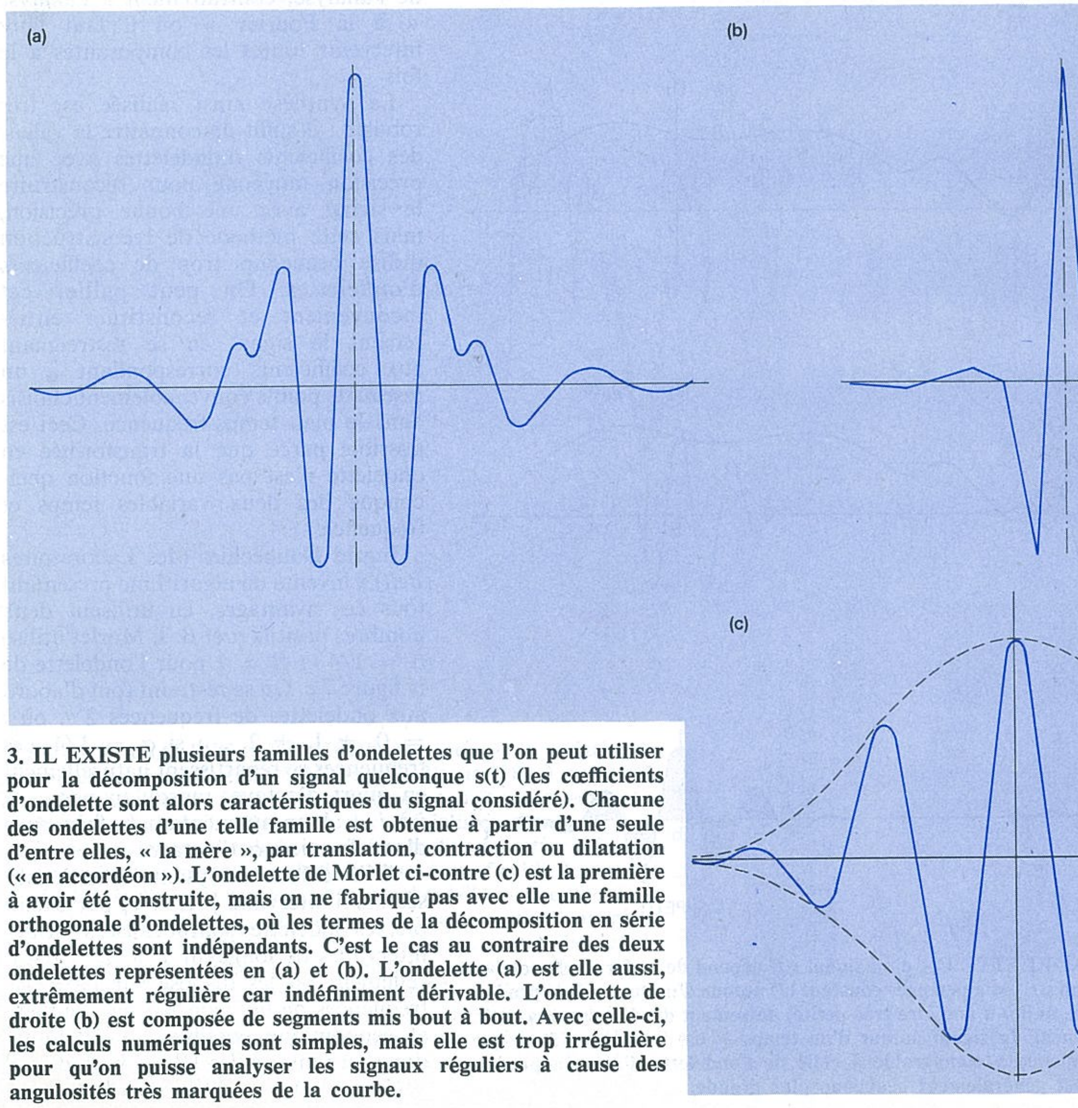
La transformée en ondelettes est une fonction $S(a, b)$ qui associe aux paramètres a et b la valeur du coefficient $C_{a,b}$ de l'ondelette $\psi_{a,b}$ dans la décomposition du signal. La quantité b est le paramètre de localisation temporelle, tandis que $1/a$ est le paramètre de fréquence. Nous avons vu que le coefficient $C_{a,b}$ est égal à la somme en continu du produit du signal par l'ondelette $\psi_{a,b}$. Un simple micro-ordinateur intégré à l'appareil de mesure du signal peut effectuer ce calcul, l'acquisition numérique du signal se faisant directement sous la forme de coefficients d'ondelettes. Donnons quelques propriétés de la transformée en ondelettes. Le coefficient d'ondelette $C_{a,b}$ est très petit dans les zones où le signal analysé $s(t)$ est très régulier (*voir la figure 4*). En effet, l'intégrale $S(a,b)$ mesure la somme des aires algébriques décrites par la courbe produit $s(t)\ \psi_{a,b}(t)$: l'aire est comptée positivement lorsque la courbe est au-dessus de l'axe du temps et négativement dans le cas contraire. Si le fragment considéré du signal $s(t)$ est très régulier (*voir la figure 4-1*), c'est-à-dire pratiquement constant (égal à λ) sur un intervalle centré en b, le produit $s(t) \times \psi_{a,b}(t)$ est voisin de $\lambda\psi_{a,b}$. L'intégrale de la fonction $\lambda\psi_{a,b}$ est nulle, car l'ondelette $\psi_{a,b}$ est telle que sa moyenne est nulle : celle-ci est en effet répartie également de part et d'autre de l'axe des temps, de façon à ne pas privilégier les valeurs positives ou négatives. En multipliant par λ la fonction $\psi_{a,b}$, on ne fait que multiplier l'aire par λ et l'aire totale correspondant à l'intégrale est nulle.

Si au contraire le fragment de signal $s(t)$ est très court et de haute fréquence (*voir la figure 4*), ses coefficients d'ondelette $C_{a,b}$ non négligeables sont ceux pour lesquels $1/a$ est de l'ordre de grandeur de la fréquence du signal et pour lesquels b appartient à l'intervalle temporel correspondant au fragment considéré. Si le signal est de basse fréquence, ses coefficients $C_{a,b}$ sont négligeables si $1/a$ est petit. La transformée en ondelettes réalise ainsi une analyse à toutes les échelles, de même qu'une très bonne représentation temps-fréquence qu'on étudie dans le plan (a, b) où la transformée en ondelettes $S(a,b)$ prend ses valeurs.

En collaboration avec Alex Grossmann et J. Morlet, R. Kronland-Martinet a étudié le comportement de la transformée en ondelettes dans le plan temps-fréquence. On adopte pour cette étude une échelle logarithmique de fréquence qui est adaptée à la nature de la transformation en ondelettes. Un tel choix est d'ailleurs naturel, car l'oreille réagit au logarithme de la fréquence : une différence d'un ton entre deux notes correspond à un rapport de fréquence égal à $2^{1/6}$, soit à une différence logarithmique (en base 2) égale à 1/6.

Perception auditive et analyse en ondelettes

Des études psycho-acoustiques ont montré que la transformée en ondelettes est particulièrement bien adaptée au traitement des sons par l'oreille hu-



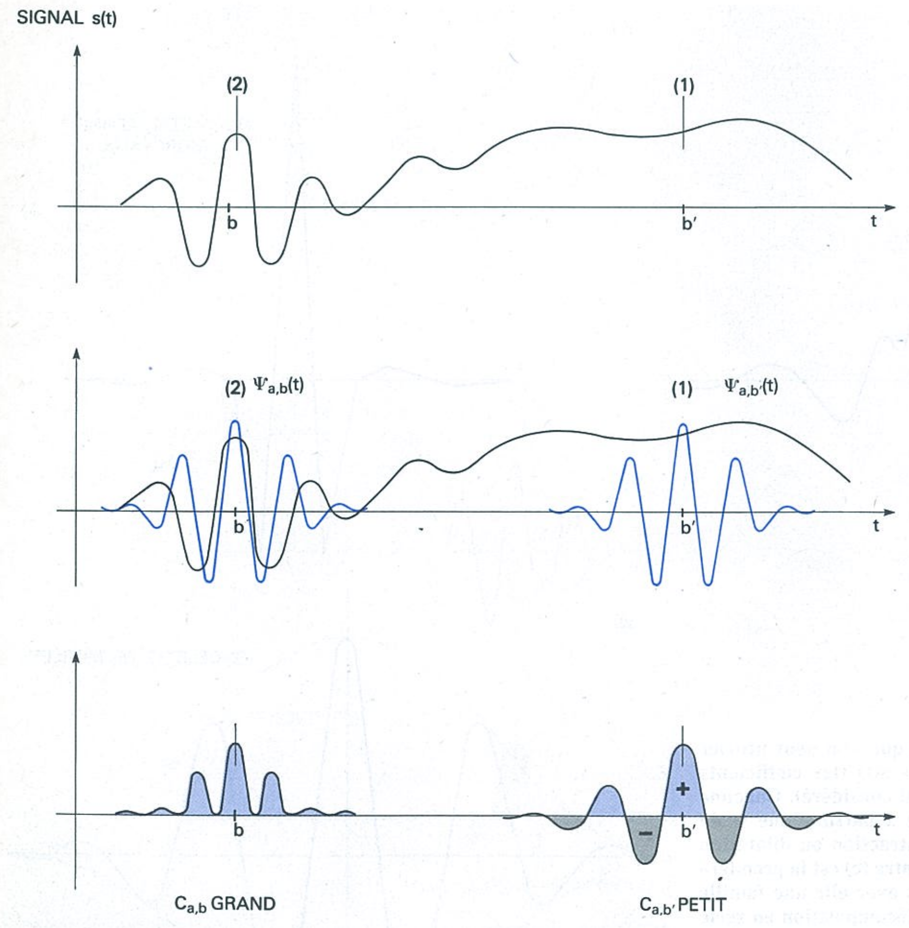
3. IL EXISTE plusieurs familles d'ondelettes que l'on peut utiliser pour la décomposition d'un signal quelconque s(t) (les cœfficients d'ondelette sont alors caractéristiques du signal considéré). Chacune des ondelettes d'une telle famille est obtenue à partir d'une seule d'entre elles, « la mère », par translation, contraction ou dilatation (« en accordéon »). L'ondelette de Morlet ci-contre (c) est la première à avoir été construite, mais on ne fabrique pas avec elle une famille orthogonale d'ondelettes, où les termes de la décomposition en série d'ondelettes sont indépendants. C'est le cas au contraire des deux ondelettes représentées en (a) et (b). L'ondelette (a) est elle aussi, extrêmement régulière car indéfiniment dérivable. L'ondelette de droite (b) est composée de segments mis bout à bout. Avec celle-ci, les calculs numériques sont simples, mais elle est trop irrégulière pour qu'on puisse analyser les signaux réguliers à cause des angulosités très marquées de la courbe.

maine. Le signal acoustique transmis par l'oreille externe (canal auditif) et moyenne (transmission « mécanique ») est transformé dans l'oreille interne par une excitation de la membrane basilaire intérieure à la cochlée.

Si cette excitation est une onde sinusoïdale, par exemple, la membrane vibre à l'intérieur d'une certaine enveloppe de vibration. On constate expérimentalement que chaque enveloppe de vibration correspond à une fréquence bien définie et présente un maximum en un point situé à une distance précise de l'oreille moyenne. Chaque point de la membrane basilaire doit donc correspondre de façon univoque à une fréquence excitatrice (*voir la figure 6*).

Sous l'effet d'une impulsion élémentaire qui fait intervenir toutes les fréquences, chaque point de la membrane (correspondant à une fréquence donnée) décrit en fonction du temps une courbe qui est une ondelette (ici (c) ou (d)). En outre, on constate que cette ondelette se dilate lorsque la fréquence augmente, ce qui semble mieux correspondre à la modélisation par ondelettes que par la transformée à fenêtre glissante où interviennent des modulations. Cette propriété de dilatation des ondelettes apparaît sur la figure 6 (*en bas*) qui donne les résultats d'une modélisation psychoacoustique de la réponse à une excitation impulsionelle (la propriété de dilatation des ondelettes n'apparaît que dans une certaine gamme de fréquence) en divers points de la membrane basilaire (rappelons que chacun des points correspond à une fréquence).

R. Kronland-Martinet a calculé des transformées en ondelettes de signaux analogiques avec un processseur de signaux en temps réel, le SYTER. L'ondelette analysante utilisée est une version complexe de l'ondelette de J. Morlet, c'est-à-dire qu'elle comprend une partie réelle cos $(5t)e^{-t^2/2}$ et une partie imaginaire sin $(5t)e^{-t^2/2}$), afin de représenter le module et la phase de la transformée en ondelettes. Le module (l'amplitude) de la transformée en ondelettes est un terme de densité d'énergie. On retrouve intégralement l'énergie totale du signal (*voir la figure 8*) dans la transformée en ondelette et on représente la densité d'énergie à l'aide d'une palette de couleurs dont chacune correspond à une intensité déterminée qu'on peut comparer à l'intensité de la note éventuellement émise.



4. LE COEFFICIENT D'ONDELETTE $C_{a,b}$ d'un signal $s(t)$ dépend de la forme de celui-ci au voisinage du temps b. Quand $s(t)$ est à peu près constant (*1*) autour d'un temps b, le produit de $s(t)$ par l'ondelette ψ (d'aire nulle) a une aire très petite, autrement dit $C_{a,b}$ est très petit. Quand, au contraire, le fragment du signal autour d'un temps b' est irrégulier (*2*) et que ses variations sont de « fréquence » comparable à celle de l'ondelette, l'aire du produit signal-ondelette (donc $C_{a,b'}$) est généralement beaucoup plus grande.

Pour une valeur donnée du paramètre a, la transformée en ondelettes varie suivant les valeurs de b. On constate la rapidité ou la lenteur d'oscillation en observant les lignes de phase constante (la phase est représentée modulo 2π), chaque ligne étant représentée par une couleur.

La synthèse du signal par ondelettes

On reconstruit le signal à partir des coefficients d'ondelettes $C_{a,b}$ en effectuant la somme en continu des termes $C_{a,b} \times \psi_{a,b}(t)/a^2$, pour toutes les valeurs des paramètres a et b de fréquence et de temps. On doit donc disposer de la collection complète des ondelettes $\psi_{a,b}$ qui doivent avoir toutes les dimensions et toutes les positions possibles. Les ondelettes fines et pointues permettent de reconstituer les détails fins et compliqués du signal, tandis que les ondelettes larges et plates contribuent à ses traits grossiers. Chaque ondelette apporte une retouche infinitésimale supplémentaire au signal. C'est un des avantages de la méthode, de s'affiner au fur et à mesure de l'analyse, contrairement à l'analyse « à la Fourier » où il faut faire intervenir toutes les composantes à la fois.

La synthèse ainsi réalisée est très robuste : il suffit de connaître la valeur des coefficients d'ondelettes avec une précision moyenne pour reconstruire le signal avec une bonne précision, mais cette méthode de reconstruction utilise beaucoup trop de coefficients d'ondelettes. On peut pallier cet inconvénient et reconstituer entièrement le signal en se restreignant aux coefficients correspondant à un réseau de points convenablement choisis dans le plan temps-fréquence. Ceci est possible parce que la transformée en ondelette n'est pas une fonction quelconque des deux variables temps et fréquence.

Ingrid Daubechies (des Laboratoires *Bell*) a inventé un algorithme présentant tous ces avantages, en utilisant deux nombres positifs α et β. J. Morlet utilise $\alpha = 1/4$ et $\beta = 1$ pour l'ondelette de la figure 7 c. On se restreint tout d'abord aux ondelettes de fréquences $2^{-\alpha j}$, où $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; si $\alpha = 1/4$, ces fréquences se répartissent naturellement en quart d'octave, puisqu'on passe de j à $j + 1$ en augmentant la fréquence d'une fraction α d'octave.

Si l'ondelette analysante ψ est localisée sur l'intervalle $[-1, +1]$ par exemple, les ondelettes sont localisées sur des intervalles de longueur $2 \times 2^{-\alpha j}$; naturellement on les dispose sur l'axe des fréquences de la façon la plus régulière et économique possible. On se limite donc aux intervalles $[\beta \times k \times 2^{-\alpha j}, \beta \times (k + 1) \times 2^{-\alpha j}]$, où k est un entier positif ou négatif, l'ondelette correspondante $\psi_{j,k}$ (t) étant égale à $2\ \psi(2^{+\alpha j}t - \beta k)$, où ψ est l'ondelette analysante. Chaque coefficient d'ondelette $C_{j,k}$ est là encore égal à la somme en continu (l'intégrale) du produit du signal par l'ondelette $\psi_{j,k}$.

La décomposition en série d'ondelettes

Si le choix de ψ est judicieux, on arrive à décomposer le signal en une « série d'ondelettes » au lieu d'une somme en continu. Le signal $s(t)$ est donc égal à la somme infinie de termes $C_{j,k}\ \psi_{j,k}\ (t)$. Cela n'est pas exactement le cas pour l'ondelette de J. Morlet, mais les estimations obtenues par I. Daubechies montrent que la reconstruction obtenue est très proche du signal de départ par exemple pour $\alpha = 1/4$ et $\beta = 1$, ce qui se vérifie remarquablement bien expérimentalement.

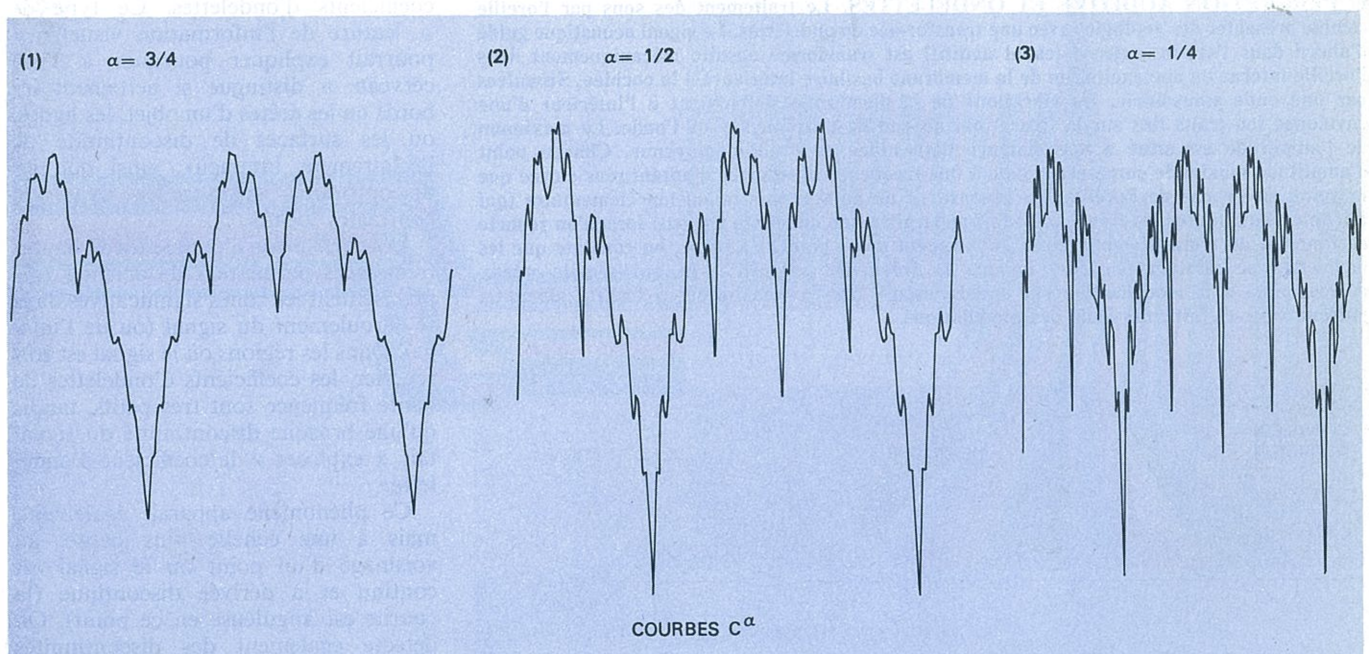
Cette série d'ondelettes est une série double, où l'indice j est lié à la fréquence et l'indice k à la localisation dans le temps. L'ondelette analysante ψ joue le rôle d'un microscope dont on règle d'abord le grossissement (à l'échelle des puissances $2\alpha j$ (avec $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) puis la position (successivement en chacun des points $0, \pm 2^{-\alpha j}\ \beta$, $\pm 2 \times 2^{\alpha j}\ \beta, \pm 3 \times 2^{-\alpha j}\ \beta$, pour analyser les détails de dimension $2^{-\alpha j}\ \beta$.

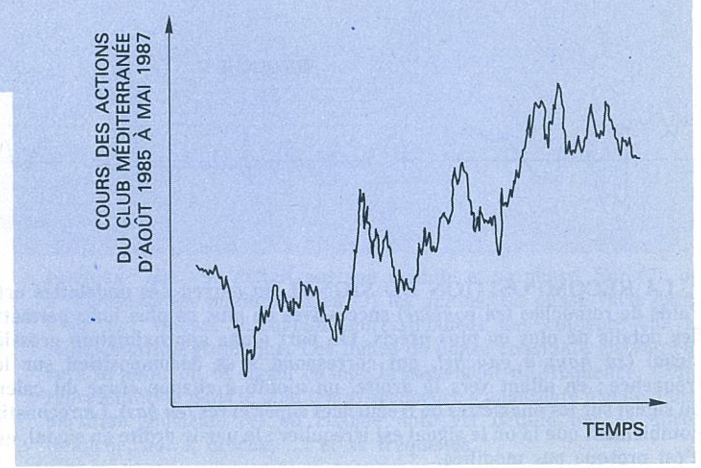
J. Morlet a créé cet algorithme dit de représentation cycle-octave suivant la technique CODES (*Cycle Octave Data Enhancement System*). La démonstration de la validité de ce nouvel algorithme et les essais pour le perfectionner ont conduit l'un d'entre nous (Y. Meyer) à la découverte de « bases orthogonales d'ondelettes ». Y. Meyer décompose le signal sur les ondelettes $\psi_{j,k}$ en une somme de termes indépendants, réalisant du même coup une compression maximale d'information. La dénomination « bases orthogonales » signifie que la décomposition est unique (base) et que les ondelettes sont indépendantes (ou « orthogonales »), autrement dit les coefficients d'ondelettes $C_{j,k}$ n'ont aucune corrélation entre eux. Dans cette base, les ondelettes $\psi_{j,k}$ dérivent de ψ par translation de pas 1, et leurs fréquences sont réparties en octaves, c'est-à-dire :

$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\ \psi(2^j t - k)$,

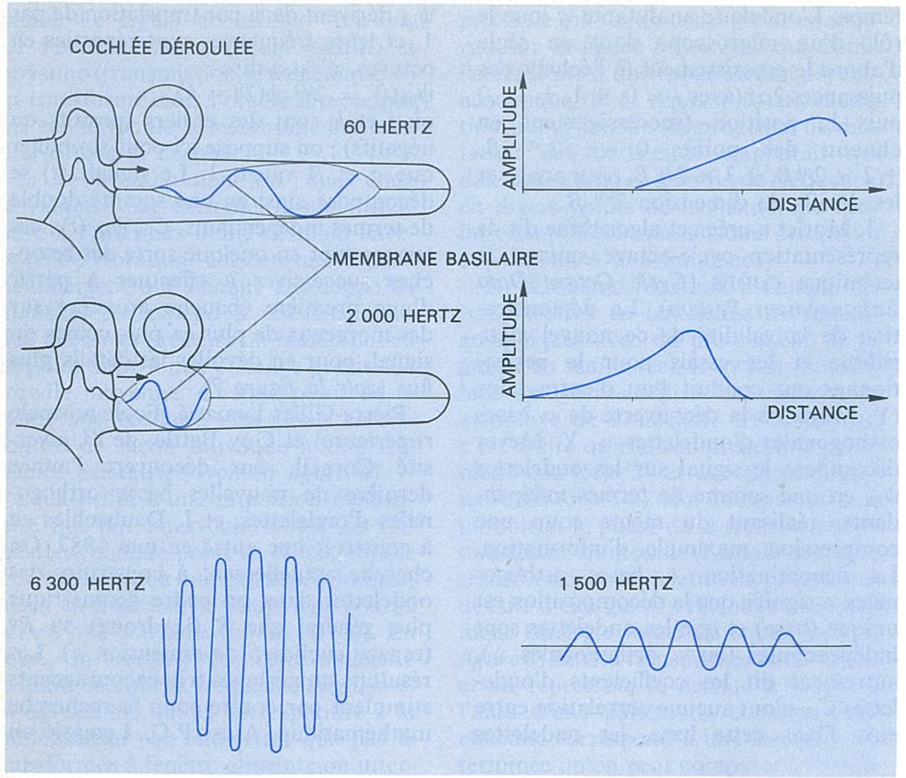
où j et k sont des entiers (positifs ou négatifs) ; on suppose ici pour simplifier que α et β valent 1. Le signal $s(t)$ se décompose ainsi en une somme double de termes indépendants, $C_{j,k}\ \psi_{j,k}\ (t)$; ces termes sont en quelque sorte des retouches successives à effectuer à partir d'une première ébauche grossière sur des morceaux de plus en plus courts du signal, pour en dévoiler les détails plus fins (*voir la figure 7*).

Pierre-Gilles Lemarié (École normale supérieure) et Guy Battle, de l'Université Cornell, ont découvert l'année dernière de nouvelles bases orthogonales d'ondelettes, et I. Daubechies en a construit une autre en mai 1987. On cherche actuellement à construire des ondelettes dans un cadre géométrique plus général que R (la droite) ou R^n (espace euclidien de dimension n). Les résultats numériques très encourageants stimulent par contre-coup la recherche mathématique. Ainsi P.G. Lemarié en

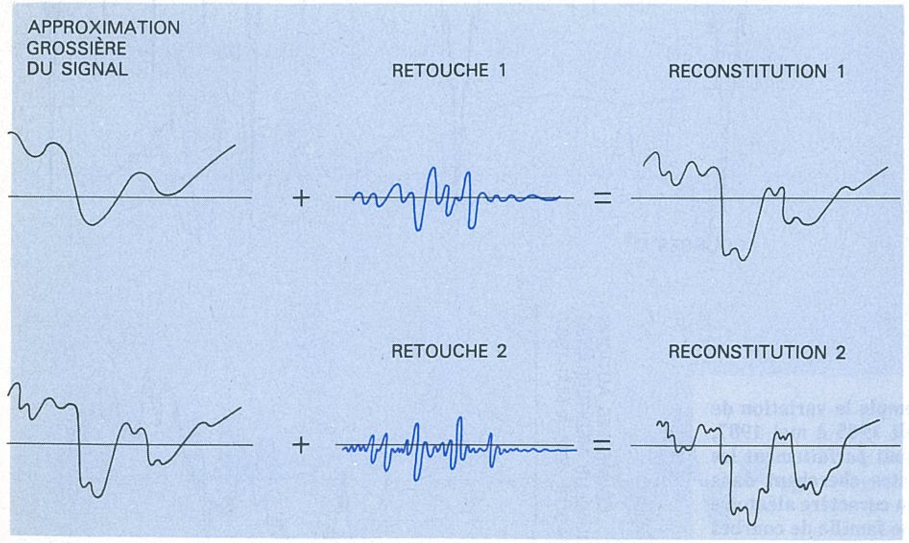




5. POUR L'ANALYSE BOURSIÈRE, par exemple la variation de la cote des actions du *Club Méditerranée*, d'août 1985 à mai 1987, on utilise des courbes échantillons dont on connaît parfaitement les coefficients d'ondelette. De nombreux spécialistes cherchent dans quelle mesure les cours de la bourse présentent un caractère aléatoire ou déterministe. On compare ainsi un signal à une famille de courbes de régularités diverses, notamment les courbes hölderiennes C^α. C'est le cas des courbes (*1*), (*2*), (*3*) qui sont obtenues à partir d'une même formule générale où intervient un paramètre α, caractéristique de la régularité de la courbe (α est un nombre compris entre 0 et 1 ; plus α est grand, plus la courbe C^α est régulière). L'étude des cours du *Club Méditerranée* montre que sa régularité correspond à une valeur de α égale à 0,24. Sa régularité est donc voisine de celle de la courbe (*3*). Robin Sébille, de l'École polytechnique, a effectué ces calculs numériques.



6. PERCEPTION AUDITIVE ET ONDELETTES. Le traitement des sons par l'oreille semble présenter des analogies avec une transformée en ondelettes. Le signal acoustique guidé d'abord dans l'oreille externe (canal auditif) est transformé ensuite mécaniquement dans l'oreille interne en une excitation de la membrane basilaire intérieure à la cochlée. Stimulées par une onde sinusoïdale, les vibrations de la membrane s'effectuent à l'intérieur d'une enveloppe (en traits fins sur la figure) qui dépend de la fréquence de l'onde. Le maximum de l'amplitude est situé à une distance déterminée de l'oreille moyenne. Chaque point d'amplitude maximale correspond donc à une fréquence excitatrice d'autant plus élevée que le point est proche de l'oreille. La réponse en un point à une impulsion élémentaire (qui fait intervenir toutes les fréquences) fait apparaître une ondelette (*en bas*) lorsqu'on reporte en fonction du temps l'amplitude du mouvement de ce point. En outre, on constate que les ondelettes se dilatent (*en bas*) lorsque la fréquence augmente, ce qui semble mieux correspondre à la modélisation par ondelettes que par la transformée à fenêtre glissante, puisque celle-ci fait intervenir des modulations.



7. LA RECOMPOSITION DU SIGNAL au moyen des ondelettes orthogonales se fait à l'aide de retouches (*en couleur*) successives de plus en plus fines permettant de reconstituer des détails de plus en plus précis. On part d'une approximation grossière et « lissée » du signal (*en haut à gauche*), qui correspond à sa décomposition sur les ondelettes basse fréquence ; en allant vers la droite, on ajoute à chaque étape du calcul la décomposition du signal sur les ondelettes de fréquences supérieures (*en bas*). La reconstitution n'est changée notablement que là où le signal est irrégulier : la partie droite du signal, qui est plus régulière, n'est presque pas modifiée.

a créé sur des groupes de Lie et S. Jaffard et Y. Meyer sur des ensembles ouverts de l'espace euclidien de dimension *n*. Philippe Tchamitchian, au Centre de physique théorique de Marseille-Luminy, a construit des ondelettes jouant un rôle important en théorie des opérateurs.

Applications à la vision

Comme nous venons de le mentionner, il existe une version multi-dimensionnelle de l'analyse en ondelettes, qui permet de traiter des images numérisées. Ce domaine est étudié par Stéphane Mallat, de l'Université de Pennsylvanie à Philadelphie. La non-corrélation des ondelettes orthogonales et l'analyse des irrégularités qu'elles permettent devraient en faire un outil performant en analyse d'images.

Il est d'ailleurs remarquable que l'analyse en ondelette se rapproche d'algorithmes pyramidaux déjà utilisés dans ce domaine. Les travaux de certains spécialistes de la vision, suggèrent que l'œil et le cerveau acquièrent l'information lumineuse sous forme de coefficients d'ondelettes. Ce type de « lecture de l'information visuelle » pourrait expliquer pourquoi « l'œil cerveau » distingue si nettement les bords ou les arêtes d'un objet, les lignes, ou les surfaces de discontinuité de l'éclairement lumineux, ainsi que les discontinuités temporelles dans les contrastes locaux.

Les coefficients d'ondelettes de hautes fréquences permettent de détecter très précisément les zones significatives dans le déroulement du signal (ou de l'image). Dans les régions où le signal est très régulier, les coefficients d'ondelettes de haute fréquence sont très petits, tandis qu'une brusque discontinuité du signal fait « exploser » le coefficient d'ondelette.

Ce phénomène apparaît également, mais à une échelle plus petite, au voisinage d'un point où le signal est continu et à dérivée discontinue (la courbe est anguleuse en ce point). On détecte également des discontinuités dans les dérivées d'ordre quelconque, ce qui permet d'analyser très finement la régularité du signal.

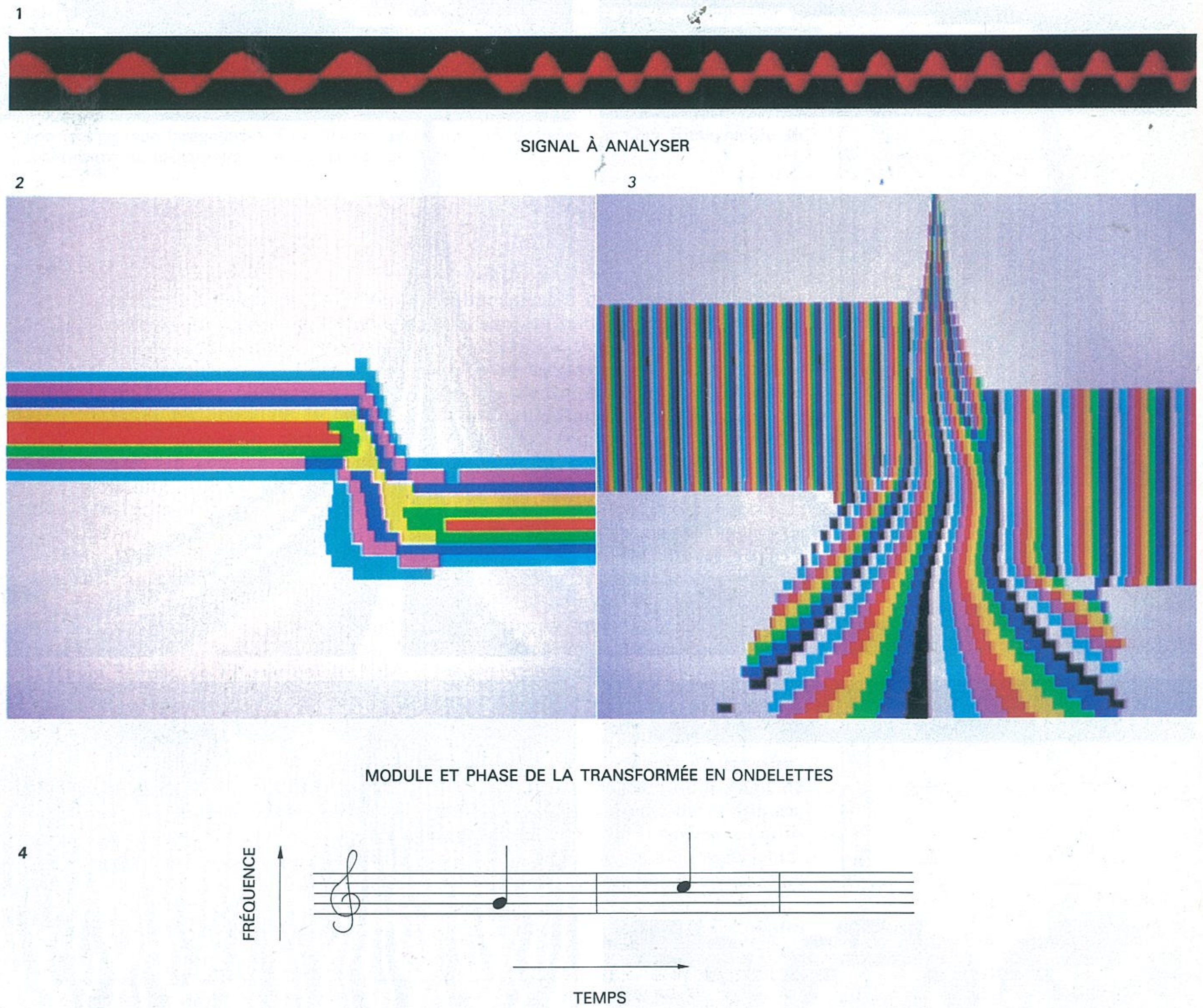
L'analyse de la régularité du signal

Les coefficients d'ondelette donnent des renseignements très divers sur le signal considéré. Nous avons déjà vu qu'ils renseignent sur la régularité d'une fonction *f* (les signaux sont des cas particuliers de fonctions), autrement dit le caractère plus ou moins lisse de la courbe associée ; plus *f* est régulière, plus les coefficients $C_{j,k}$ de haute fréquence (*j* grand) sont petits. On arrive

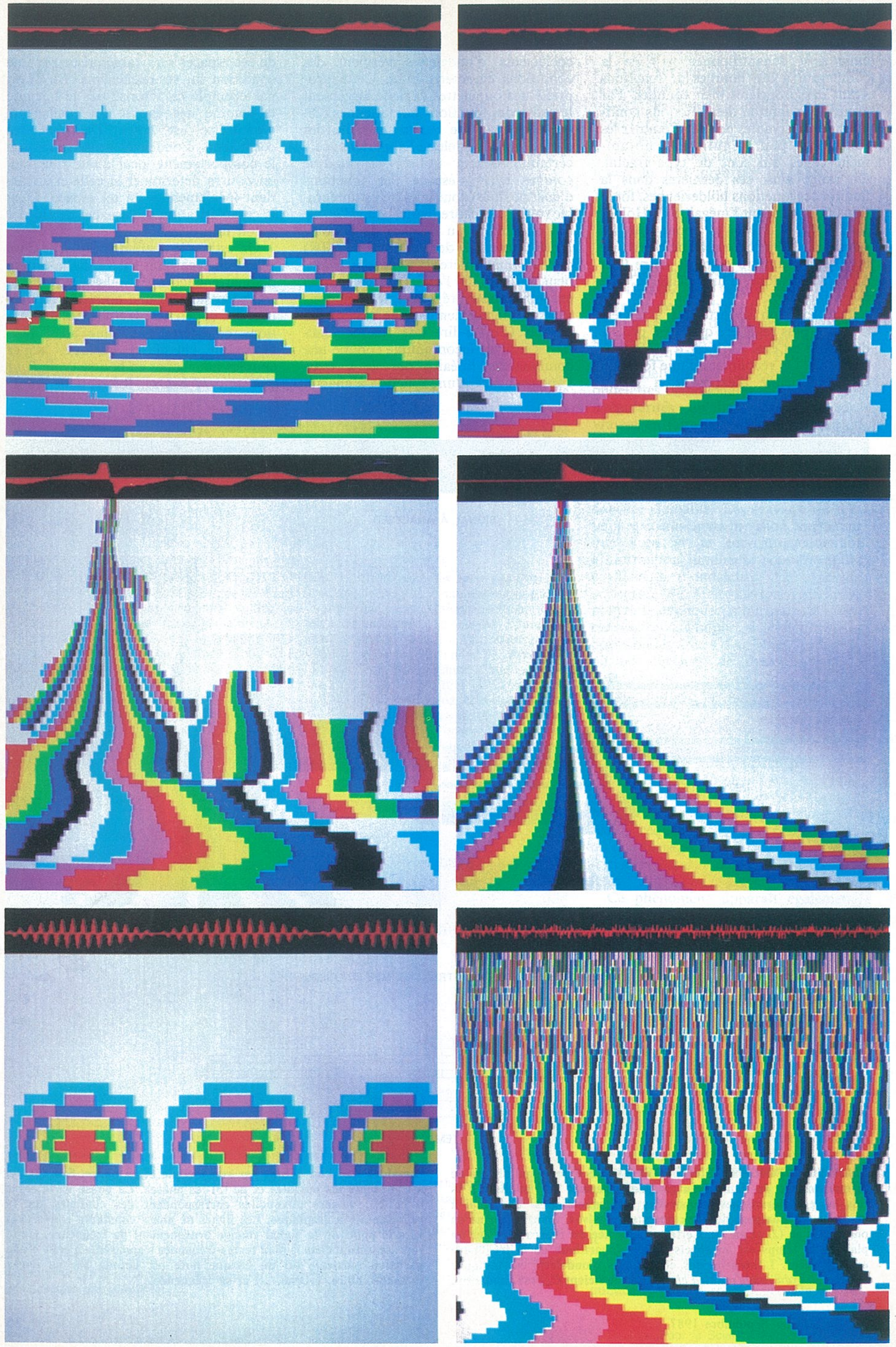
ainsi à « échantillonner » *f* en la comparant à des familles de fonctions ayant des propriétés bien connues. Par exemple la famille des fonctions continues non dérivables permet d'étudier les fonctions peu régulières, notamment celles qui sont de type fractal. On range ainsi ces dernières dans la famille des fonctions höldériennes, fonctions *f* qui vérifient l'inégalité de Hölder $|f(x) - f(y)| \leqslant c\,|x - y|^{\alpha}$ pour tous les nombres x et y, où c est une constante et α un paramètre compris entre 0 et 1, caractéristique d'une classe C^{α} de telles fonctions.

Une fonction appartenant à C^{α} est d'autant plus régulière que α est proche de 1. Si α est égal à 1, *f* est « presque » dérivable. On reconnaît qu'une fonction est höldérienne d'exposant α si ses coefficients d'ondelettes vérifient des conditions caractéristiques. Cette propriété des ondelettes dépasse largement le cadre des fonctions höldériennes. On peut ainsi « lire » sur la taille des coefficients d'ondelette l'appartenance à certains espaces utilisés en analyse comme $L^2(R)$, espace des fonctions d'énergie finie (dont le carré est intégrable) qui est le cadre naturel dans l'étude des ondelettes, ou l'espace de Sobolev $H^m(R)$, ensemble des fonctions de $L^2(R)$ dont les *m* premières dérivées appartiennent à $L^2(R)$. Si l'ondelette de base ψ est suffisamment régulière, les fonctions $\psi_{j,k}$ sont non seulement une base de ces espaces (c'est-à-dire que chaque fonction s'écrit de façon unique comme une combinaison linéaire des $\psi_{j,k}$), mais l'appartenance d'une fonction à chacun de ces espaces sera caractérisée par une condition sur ses coefficients ($L^2(R)$ est par exemple caractérisé par le fait que la somme des carrés des coefficients d'ondelette est finie). De plus, les coefficients d'ondelette renseignant sur le comportement local d'une fonction, on pourra déterminer si celle-ci appartient localement à un tel espace. C'est la caractérisation des espaces de Hölder qu'on utilise ici.

On estime le degré de régularité d'un signal en regardant s'il vérifie le critère d'appartenance à une classe C^{α}. Cette méthode suggère une nouvelle application des ondelettes. L'étude des fluctuations boursières passionne aussi bien ceux qui cherchent quelques règles simples pour jouer en bourse (voir *Pour gagner à la bourse*, Récréations Infor-



8. LA TRANFORMÉE EN ONDELETTES d'un signal diffère de la transformée de Fourier en ce qu'elle permet de visualiser à la fois les caractéristiques temporelles et fréquentielles. Le signal à analyser (*1*), composé de deux notes successives, est transformé en ondelettes en (*2*) et en (*3*). Cette transformée est représentée sur un plan où le temps est en abscisse et le logarithme de la fréquence en ordonnées. L'intensité des coefficients d'ondelette est indiquée en couleurs (*du rouge au bleu clair*). Le coefficient $C_{a,b}$ est un nombre complexe que l'on définit par son module et sa phase. Sur (*2*), on a représenté les modules et en (*3*) les phases. La phase varie entre 0 et 2π, valeurs auxquelles correspondent des couleurs sur la représentation graphique. Les lignes de phase constante convergent vers le point où le signal change brusquement de fréquence. Cette représentation dans le plan temps-fréquence s'apparente à celle d'une partition musicale (*4*) où chaque note est définie par sa durée (blanche, noire, croche, ...) et sa fréquence.



9. L'ANALYSE EN ONDELETTES de ces signaux (*en rouge sur les photos*) a été réalisée par Richard Kronland-Martinet au Laboratoire de mécanique et d'acoustique de Marseille. La densité d'énergie (module) et la phase de 0 à 2π sont stockées suivant une palette de couleurs. On n'a représenté la transformée en phase que pour des valeurs significatives du module. L'axe vertical représente le logarithme du paramètre d'échelles (les fréquences croissent de bas en haut) et l'axe horizontal le paramètre de translation temporelle. On voit sur les deux photographies du haut le module et la phase de la transformée en ondelettes d'un enregistrement sonore effectué sur un vieux microsillon, pour des facteurs d'échelle équivalant aux fréquences comprises entre 50 hertz et 8000 hertz. On met ainsi en évidence le bruit de surface (« craquements à hautes fréquences »), en haut sur les photographies. La zone où se passe ce bruit est très isolée. On pourrait donc le supprimer sur la transformée en ondelettes et retrouver le signal de départ « nettoyé » en appliquant la transformée inverse. La photographie du milieu à gauche représente la phase d'un enregistrement de vieux microsillon dans lequel se trouve un craquement qu'on localise précisément par une convergence des lignes de phase constante. Cette convergence est très semblable à celle que l'on observe pour l'analyse d'une discontinuité pure (*au milieu à droite*). On pourrait éliminer ce craquement sur la transformée en ondelettes, mais ce serait difficile car il n'est pas isolé dans le plan temps-fréquence. Le signal suivant (*en bas à gauche*) est la somme de deux sinusoïdes de fréquences voisines ; on obtient alors des phénomènes de battement : à certains moments les deux ondes se superposent et à d'autres elles s'annulent mutuellement. Ce phénomène est utilisé par les musiciens qui accordent leurs instruments. Quand deux cordes vibrent à des fréquences très voisines on entend clairement ces variations de l'intensité du son. Lorsqu'elles sont accordées et vibrent à la même fréquence, ce phénomène disparaît. La transformée en ondelettes (ici sa phase) réagit de façon assez similaire à l'oreille. Elle est très petite au moment où les deux ondes se détruisent et devient grande quand elles se superposent. Si les fréquences des deux sinusoïdes s'éloignaient davantage, elles apparaîtraient à des hauteurs différentes dans le plan temps-fréquence. La photographie de droite (*en bas*) est la phase de la transformée en ondelettes d'un bruit blanc dans lequel deux fragments quelconques sont non corrélés. Cette représentation en phase ne fait apparaître aucune convergence de lignes de phase constante particulière, car le signal présente partout une très grande irrégularité. Ces photographies ont été réalisées par Guy Rimeymeille au laboratoire de mécanique et d'acoustique de Marseille.

matiques, *Pour la Science*, n° 117, juillet 1987) que ceux qui mènent des études mathématiques extrêmement sophistiquées. Les chercheurs de l'École de Chicago recherchent notamment dans quelle mesure les cours de la bourse présentent un caractère aléatoire ou déterministe. Un concept clé est celui de « volatilité » d'un cours, c'est-à-dire son caractère plus ou moins irrégulier.

La similitude de certains cours de la bourse avec des fonctions C^α a donné l'idée de confronter numériquement les cours à ces fonctions höldériennes afin d'estimer leur régularité.

Robin Sebille, de l'École polytechnique, a effectué tout récemment les premiers calculs numériques et les résultats sont prometteurs. Le coefficient α semble donc être un bon indicateur de la volatilité d'un cours (*voir la figure 5*).

Il existe actuellement de nombreuses recherches fondamentales et appliquées sur les ondelettes qui sont coordonnées grâce à une recherche coopérative sur programme « ondelettes » (n° 820, cofinancée par le CNRS et *Elf Aquitaine*, et dirigée par Alex Grossmann). Le dynamisme des recherches actuelles provient essentiellement de l'interaction entre ces différents domaines, les découvertes de l'un stimulant celles effectuées dans les autres.

Divers nouveaux domaines d'applications sont actuellement envisagés, principalement en médecine et en mécanique. Du fait que les ondelettes analysent des phénomènes qui se produisent simultanément à des échelles différentes elles sont un outil naturel pour étudier les objets de type fractal, comme le montrent les travaux de M. Holschneider, au Centre de physique théorique de Marseille-Luminy. En effet, ces objets restent semblables à eux-mêmes lorsqu'on les considère à des échelles différentes.

La transformée en ondelettes a été étudiée depuis le début par des physiciens théoriciens. A. Grossmann et Thierry Paul du centre de physique théorique de Marseille-Luminy ont montré son utilité en mécanique quantique. Plus récemment, elle a été également utilisée en théorie constructive des champs par G. Battle et Paul Federbush (Ann Harbor, Université du Michigan).

Nous avons montré qu'il existe des algorithmes très différents de transformée en ondelettes, selon qu'il s'agit de représentations discrètes ou continues, orthogonales ou non. Il revient à l'utilisateur de choisir le type de représentation en ondelettes le mieux adapté aux problèmes qu'il doit traiter.

La diversité et la souplesse des algorithmes existants comptent certainement parmi les atouts majeurs de la transformation en ondelettes. Le travail de pionnier de J. Morlet permettra sans doute dans un avenir assez proche d'utiliser des équipements fondés sur la transformation en ondelettes à un niveau industriel, notamment dans les domaines où elle est mieux adaptée que la transformée de Fourier rapide. ■