Sur la spécialisation de la R-équivalence

David A. Madore

15 avril 2005

1 Réduction des polynômes

Soit A un anneau de valuation discrète, dont on note K le corps des fractions, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal, π une uniformisante, v la valuation ($v(\pi) = 1$), et $F = A/\mathfrak{m}$ le corps résiduel.

On considérera par ailleurs un plan affine réel, dont les coordonnées seront notées (e, w) : c'est le plan dans lequel « vivent » les polygones de Newton (cf. *infra*).

Si $ax^{d-i}y^i$ (avec $i \in \mathbb{N}$ et $a \in K^\times$) est un monôme de degré total d en les variables x et y, on appelle *point associé* à ce monôme le point de coordonnées $(i, v(a))$ dans le plan affine réel de coordonnées (e, w). De plus, si $w = w_0 + se$ est l'équation d'une droite (non verticale) du plan en question, on dira que la *réduction* du monôme $ax^{d-i}y^i$ pour cette droite est $\bar{a}x^{d-i}y^i$ où $\bar{a}$ est la réduction modulo $\mathfrak{m}$ de $a\pi^{-v(a)} \in A$ si $(i, v(a))$ est sur la droite, 0 si $(i, v(a))$ est strictement au-dessus, indéfinie sinon.

Si $f(x, y) = \sum_i a_i x^{d-i} y^i$ est un polynôme homogène de degré d en les variables x et y et à coefficients dans K, on appelle *polygone de Newton* de ce polynôme l'enveloppe convexe dans le plan (e, w) des points associés aux monômes (non nuls) de f et du point[1] $w = +\infty$. C'est-à-dire que le polygone de Newton est l'enveloppe supérieure des droites (non verticales) situées au-dessous (au sens large) des points associés aux monômes de f.

Si $w = w_0 + se$ est une droite (non verticale) située en-dessous (au sens large) du polygone de Newton de f, on peut définir la réduction de f pour cette droite comme la somme des réductions (précédemment définies) des

[1] On comprend aisément ce que signifie cet abus de langage : que le polygone se termine aux deux extrémités par des demi-droites verticales.

monômes de f. Cette réduction est nulle pour toute droite strictement en-dessous du polygone : les seules droites intéressantes sont donc celles qui rencontrent le bord du polygone. Pour une telle droite, la réduction de f est un polynôme homogène de degré d en les variables x et y et à coefficients dans F. Lorsque la droite $w = w_0 + se$ n'est pas (le prolongement d')une arête du polygone, la réduction est un monôme (dont le degré en y est précisément donné par l'abscisse du sommet unique que la droite rencontre). Lorsque la droite est une arête du polygone de Newton, la réduction est un polynôme dont le nombre de termes égale le nombre de points associés à des monômes de f qui se situent sur la droite.

2 Réduction des morphismes $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^N$

Si maintenant $f_0, \ldots, f_N$ sont $N+1$ polynômes homogènes de même degré d en les variables x et y et à coefficients dans K, premiers entre eux dans leur ensemble, de sorte que $(x : y) \mapsto (f_0(x, y) : \cdots : f_N(x, y))$ peut être vu comme un morphisme $f\colon \mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^N_K$ de degré d, on définit le polygone de Newton de f comme l'enveloppe convexe des polygones de Newton des f_j, et, pour toute droite $w = w_0 + se$ rencontrant le bord du polygone de f mais ne le croisant pas, la réduction de f comme le morphisme $\mathbb{P}^1_F \to \mathbb{P}^N_F$ obtenu par réduction des f_j pour cette droite. Ce dernier point mérite une explication : d'abord, le fait que la droite rencontre sans le traverser le bord du polygone de f assure que, pour cette droite, la réduction de tous les f_j est définie et que celle d'au moins l'un d'entre eux est non nulle ; il est possible que les réductions des f_j ne soient pas premières entre elles dans leur ensemble (c'est-à-dire que l'on n'a qu'une application rationnelle $\mathbb{P}^1_F \dashrightarrow \mathbb{P}^N_F$), mais on peut toujours éliminer les facteurs communs, ce qui revient à remarquer que l'application rationnelle, étant définie en codimension 1, est définie sur tout $\mathbb{P}^1_F$.

Si la droite $w = w_0 + se$ n'est pas une arête du polygone de Newton de f, elle rencontre un unique sommet, disons d'abscisse i, et alors la réduction pour ce point de chacun des f_j est soit nulle soit réduite à un monôme de degré i en y, de sorte que la réduction de f est (après élimination du facteur commun $x^{d-i}y^i$ à la réduction de chacun des f_j) un morphisme constant. C'est-à-dire qu'à chaque *sommet* du polygone il correspond un *point* rationnel de $\mathbb{P}^N_F$. Nous appellerons *points-étapes* les points en question.

Remarquons que le premier point-étape, c'est-à-dire celui correspondant au sommet de plus petite abscisse (nécessairement 0), est précisément la spécialisation de l'image par f du point $(1:0) \in \mathbb{P}^1_K(K)$. (Rappelons qu'un K-point de $\mathbb{P}^N_K$ est la même chose, en chassant les dénominateurs, qu'un A-point de $\mathbb{P}^N_A$ dont au moins une coordonnée est de valuation nulle, et par réduction modulo $\mathfrak{m}$ on en déduit un F-point de $\mathbb{P}^N_F$, que l'on appelle *spécialisation* du point de départ.) En effet, le sommet le plus à gauche du polygone de Newton de f a pour abscisse 0 (puisque les f_j sont sans facteur commun et notamment sans facteur y commun) ; pour une droite qui ne rencontre le polygone qu'en ce point, la réduction de f est donc limitée à celle de ses monômes en x^d, et on trouve bien le point obtenu en faisant $x = 1$ et $y = 0$ puis en spécialisant. De même, le dernier point-étape est précisément la spécialisation de l'image par f du point $(0:1)$.

Si $w = w_0+se$ est une arête du polygone de Newton de f, la réduction de f pour cette droite est un morphisme $\mathbb{P}^1_F \to \mathbb{P}^N_F$. L'image de $(1:0) \in \mathbb{P}^1_F(F)$ par ce morphisme réduction est donnée par les coefficients des monômes de plus bas degré en y qui ne s'annulent pas par réduction pour $w = w_0 + se$; c'est-à-dire les monômes auxquels sont associés l'extrémité gauche de l'arête. Ceci montre que l'image de $(1:0)$ par le morphisme réduction pour $w = w_0+se$ est précisément le point-étape correspondant à l'extrémité gauche de cette arête. De même, l'image de $(0:1)$ par le morphisme réduction est le point-étape correspondant à l'extrémité droite de l'arête.

En définitive, aux sommets du polygone de Newton de f correspondent des *points* (rationnels) de $\mathbb{P}^N_F$, appelés points-étapes, le premier étant la spécialisation de $f(1:0)$ et le dernier la spécialisation de $f(0:1)$. Et aux arêtes du polygone correspondent des morphismes $\mathbb{P}^1_F \to \mathbb{P}^N_F$ qui relient les deux points-étapes consécutifs correspondant aux extrémités gauche et droite de l'arête considérée.

Nous dirons que nous avons *spécialisé* le $\mathbb{P}^1$ de départ, f, qui reliait $f(0:1)$ à $f(1:0)$, en une chaîne de $\mathbb{P}^1$ qui relient la spécialisation de $f(1:0)$ à celle de $f(0:1)$.

3 Spécialisation dans une variété projective

Soient maintenant h un polynôme homogène en les $N+1$ variables $z_0, \dots, z_N$ et à coefficients dans A. On suppose que $h(f_0, \dots, f_N)$ est identiquement nul, et on se propose de démontrer que $\bar{h}(\bar{f}_0, \dots, \bar{f}_N)$ l'est aussi, où $\bar{h}$ est obtenu en réduisant modulo $\mathfrak{m}$ les coefficients de h, et où $\bar{f}_j$ sont les réductions, pour une droite $w = w_0 + se$ fixée, des f_j.

Une première technique de démonstration permet d'obtenir ce résultat pour une droite de pente s rationnelle, ce qui suffit manifestement à conclure de façon générale (car les arêtes du polygone de f sont à pente rationnelle). Pour cela, appelons q un naturel non nul tel que qs soit entier : considérons le corps de rupture K' du polynôme $X^q - \pi$ sur K, c'est-à-dire que K' extrait une racine q-ième, que nous appellerons $\pi^{1/q}$, de π. On appelle A' la fermeture intégrale de A dans K' ; on note encore v la valuation de A' qui prolonge v sur A (c'est-à-dire que $v(\pi^{1/q}) = \frac{1}{q}$). Le corps résiduel de A' est le même que celui de A, c'est-à-dire F, car l'extension est totalement ramifiée. Les objets, notamment les f_j et h, à coefficients dans K, peuvent être considérés comme ayant des coefficients dans K', et évidemment l'égalité $h(f_0, \ldots, f_N) = 0$ vaut encore dans K'. Mais la réduction des f_j pour $w = w_0 + se$ rencontrant sans croiser le bord du polygone de f peut s'interpréter comme suit : on considère le morphisme $\varpi^s \colon \mathbb{P}^1_{K'} \to \mathbb{P}^1_{K'}$ donné par $(x : y) \mapsto (x : \pi^{-s}y)$; alors $f_j \circ \varpi^s$ s'obtient[2] en divisant par π^{si} le coefficient des monômes en $x^{d-i}y^i$ dans f_j, de sorte que leur valuation passe de v (disons) à $v - si$; puis, en divisant encore tous ces coefficients par π^{w_0} et en réduisant modulo $\mathfrak{m}$, on obtient bien la réduction recherchée. Puisque $h(f_0, \ldots, f_N) = 0$, on a aussi $h(f_0 \circ \varpi^s, \ldots, f_N \circ \varpi^s) = 0$, et d'après la description donnée de la réduction pour $w = w_0 + se$, on a bien $\bar{h}(\bar{f}_0, \ldots, \bar{f}_N)$ comme voulu.

On peut également prouver le résultat comme ceci. Si $a_1 x^{d-i_1} y^{i_1}, \ldots, a_r x^{d-i_r} y^{i_r}$ sont r monômes de degré total d en les variables x et y (avec $a_1, \ldots, a_r \in K$), et $w = w_0 + se$ une droite passant en-dessous (au sens large) des points associés à ces r monômes, alors la réduction pour $w = rw_0 + se$ (noter le changement d'équation !) du produit des monômes est précisément le produit des réductions pour $w = w_0 + se$ des monômes en question. En effet, si les tous les points associés aux monômes sont sur la droite, on a $v(a_k) = w_0 + si_k$ pour tout k, par définition, donc $v(a_1 \cdots a_r) = rw_0 + s(i_1 + \cdots + i_r)$, ce qui montre que le point associé au produit des r monômes est sur la droite $w = rw_0 + se$, et la réduction modulo $\mathfrak{m}$ de $a_1 \cdots a_r \, \pi^{-v(a_1 \cdots a_r)}$ est le produit des $a_k \pi^{-v(a_k)}$, ce qui montre la propriété dans ce cas ; et si l'un des points associés aux monômes est strictement au-dessus de la droite $w = w_0 + se$, disons $v(a_k) > w_0 + si_k$, alors $v(a_1 \cdots a_r) > rw_0 + s(i_1 + \cdots + i_r)$, donc la réduction du produit est nulle, ce qui achève de démontrer cette propriété.

[2] Il y a là un léger abus de langage, puisque ϖ^s a été défini comme $(x : y) \mapsto (x : \pi^{-s}y)$ et qu'il s'agit ici plutôt de $(x, y) \mapsto (x, \pi^{-s}y)$.

Ce que nous venons de démontrer prouve (en développant) que, si h est un polynôme homogène de degré r quelconque en les variables $z_0, \ldots, z_N$ (à coefficients dans A), alors la réduction pour $w = rw_0 + se$ de $h(f_0, \ldots, f_N)$ est précisément $\bar{h}(\bar{f}_0, \ldots, \bar{f}_N)$, avec $\bar{h}$ obtenu en réduisant modulo $\mathfrak{m}$ les coefficients de h, et $\bar{f}_j$ les réductions des f_j pour le point $w = w_0 + se$. Dans le cas où $h(f_0, \ldots, f_N) = 0$ identiquement, sa réduction pour $w = rw_0 + se$ est nulle, donc on a $\bar{h}(\bar{f}_0, \ldots, \bar{f}_N) = 0$ aussi.

Naturellement, si $h_1, \ldots, h_n$ sont des polynômes homogènes en les variables $z_0, \ldots, z_N$ tels que $h_\ell(f_0, \ldots, f_N) = 0$ pour tout ℓ, alors $\bar{h}_\ell(\bar{f}_0, \ldots, \bar{f}_N) = 0$ pour tout ℓ, où, comme auparavant, $\bar{h}_\ell$ est obtenu en réduisant les coefficients de h_ℓ modulo $\mathfrak{m}$, et où $\bar{f}_j$ est la réduction de f_j pour une certaine droite $w = w_0 + se$ fixée.

On a donc montré que si $\mathfrak{X}$ est un sous-schéma de $\mathbb{P}^N_A$ défini par les équations $h_1 = \cdots = h_n = 0$ (où les h_ℓ sont des polynômes homogènes en $z_0, \ldots, z_N$ à coefficients dans A), X sa fibre générique définie dans $\mathbb{P}^N_K$ par $h_1 = \cdots = h_n = 0$ et Y sa fibre spéciale définie par $\bar{h}_1 = \cdots = \bar{h}_n = 0$ (où $\bar{h}_\ell$ est obtenu en réduisant les coefficients de h_ℓ modulo $\mathfrak{m}$), que P et Q sont deux K points de X pour lesquels il existe $f\colon \mathbb{P}^1_K \to X$ vérifiant $f(1:0) = P$ et $f(0:1) = Q$, alors les spécialisations respectives $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ de P et Q sont R-équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe une suite finie $\tilde{P} = \tilde{P}_0, \ldots, \tilde{P}_m = \tilde{Q}$ de F-points Y et une suite $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_m$ de morphismes $\mathbb{P}^1_F \to Y$ avec $\tilde{f}_t(1:0) = \tilde{P}_{t-1}$ et $\tilde{f}_t(0:1) = \tilde{P}_t$. Finalement, on a montré :

Proposition 3.1. *Soit $\mathfrak{X}$ un schéma projectif sur $\operatorname{Spec} A$, soit $X = \mathfrak{X} \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} K$ sa fibre générique et $Y = \mathfrak{X} \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} F$ sa fibre spéciale. Si $P, Q \in X(K)$, deux K-points de la fibre générique, sont R-équivalents (sur K), alors leurs spécialisations respectives, $\tilde{P}, \tilde{Q} \in Y(F)$, sont elles aussi R-équivalentes (sur F). C'est-à-dire que la flèche de spécialisation $X(K) = \mathfrak{X}(A) \to Y(F)$ induit une flèche $X(K)/R \to Y(F)/R$.*

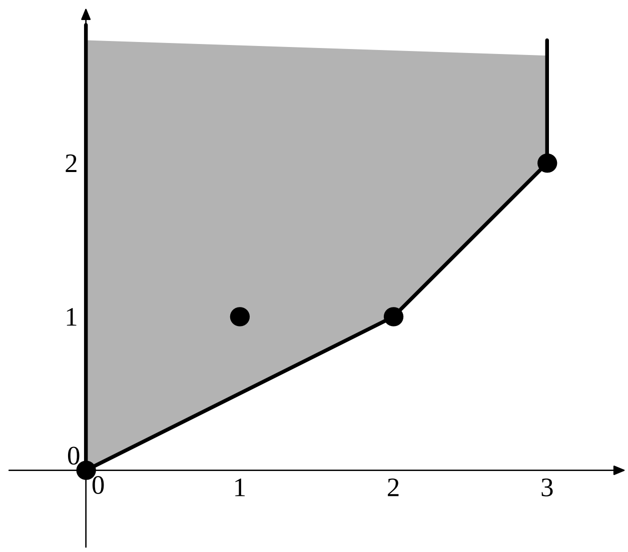
4 Étude d'un exemple

On considère $A = \mathbb{Z}_p$, de sorte que $K = \mathbb{Q}_p$ et $F = \mathbb{F}_p$, avec la valuation $v(p) = 1$.

On étudiera le morphisme $f\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}_p}$ donné par $(x : y) \mapsto (x^3 : px^2y : pxy^2 : p^2y^3)$. Celui-ci relie le point $f(1:0) = (1:0:0:0)$ au point $f(0:1) = (0:0:0:p^2) = (0:0:0:1)$. Il s'agit d'une cubique gauche dans

$\mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}_p}$, notamment, f est (au-dessus de $\mathbb{Q}_p$) un isomorphisme sur son image ; laquelle a pour équations $pz_0z_2 = z_1^2$, $z_0z_3 = z_1z_2$ et $z_1z_3 = pz_2^2$.

On peut représenter ainsi le polygone de Newton de f :



On voit notamment qu'il a trois sommets, qui correspondent donc à trois points-étapes. Le premier et le dernier sont respectivement la spécialisation de $f(1:0)$ et celle de $f(0:1)$, autrement dit $(1:0:0:0)$ et $(0:0:0:1)$. Le point-étape correspondant au sommet $(2,1)$ du polygone de Newton est donné par le monôme en xy^2, soit $(0:0:1:0)$.

Les deux arêtes non verticales du polygone déterminent deux morphismes $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{F}_p}$, reliant les points-étapes successifs. Le premier est $(x:y) \mapsto (x^2 : 0 : y^2 : 0)$ et le second est $(x:y) \mapsto (0:0:x:y)$. Ils vérifient bien les équations $z_1^2 = 0$, $z_0z_3 = z_1z_2$ et $z_1z_3 = 0$, obtenues en réduisant modulo p celles de l'image de f ; mais on remarquera que ces équations réduites ne définissent pas l'image des morphismes considérés.

On peut donner une vision plus abstraite de cette spécialisation. Si on considère l'application rationnelle $F\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{Z}_p}$ donnée par $(x:y) \mapsto (x^3 : px^2y : pxy^2 : p^2y^3)$, son ouvert de définition est le complémentaire du point $p = x = 0$ (et, par ailleurs, quand on la restreint à la fibre spéciale $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}$ de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}$, elle est constante de valeur $(1:0:0:0)$ sauf en ce point, $(0:1)$, où elle n'est pas définie). Pour résoudre cette indétermination, on considère un éclatement $\mathfrak{E}$ de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}$ au point en question, disons par $\lambda x = px'$ où $(\lambda : x')$ sont les coordonnées introduites sur le diviseur exceptionnel. L'image réciproque de la fibre spéciale $p = 0$ a deux composantes irréductibles : le diviseur exceptionnel $p = x = 0$, et le diviseur $\lambda = 0$. Sur ce dernier, l'application F est toujours constante (de valeur $(1 : 0 : 0 : 0)$) pour $x \neq 0$; sur le diviseur exceptionnel, F est donné pour $\lambda \neq 0$ par $(0 : 0 : x' : y)$, ou, ce qui revient au même, $(0 : 0 : 1 : \lambda y)$ — on retrouve donc le morphisme reliant le point-étape du milieu au point-étape final. Mais on n'a pas encore un morphisme défini sur la totalité de $\mathfrak{E}$, puisqu'il reste le point d'indétermination $\lambda = x = 0$. Un second éclatement en ce point est nécessaire pour résoudre également cette indétermination.

5 Traduction en termes d'éclatements

(Nous tentons, sans justifier précisément nos affirmations, d'expliquer, à la suite de l'exemple précédent, comment voir la résolution des morphismes par des suites d'éclatement, en fonction des pentes apparaissant dans le polygone de Newton de f.)

De façon générale, nous pouvons dire ceci : le fait que F soit non constante sur la fibre spéciale $p = 0$ équivaut à l'existence d'une arête horizontale (i.e. de pente nulle) au polygone de Newton de f ; le fait qu'elle ne soit pas définie en $p = x = 0$ équivaut à l'existence d'arêtes de pente positive, et le fait qu'elle ne soit pas définie en $p = y = 0$ équivaut à l'existence d'arêtes de pente négative. Éclater en $p = x = 0$ fait « apparaître » une éventuelle arête de pente 1, en ce sens que l'éclaté de F sera non constant le long du diviseur exceptionnel si et seulement si il existe une telle arête. (De même, éclater en $p = y = 0$ fait apparaître une éventuelle arête de pente -1.) Après un éclatement en $p = x = 0$, disons par $\lambda x = px'$, un nouvel éclatement en $p = x' = 0$ révèle l'existence d'une arête de pente 2, tandis qu'un éclatement en $\lambda = x = 0$ révèle l'existence d'arêtes de pente $\frac{1}{2}$. Après un éclatement en $p = x' = 0$, deux nouveaux éclatements révèlent l'existence d'arêtes de pente $\frac{3}{2}$ et 3 ; tandis qu'après un éclatement en $\lambda = x = 0$, on pourra révéler l'existence d'arêtes de pente $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

Et ainsi de suite. C'est-à-dire qu'en éclatant à chaque fois en $(1 : 0)$ et en $(0 : 1)$ les diviseurs issus des éclatements précédents, on fait apparaître successivement les arêtes du polygone de Newton ayant toutes les pentes rationnelles possibles, suivant le schéma suivant, dans lequel chaque nombre a pour numérateur la somme des numérateurs et pour dénominateur la somme des dénominateurs des nombres écrits au-dessus de lui, immédiatement à gauche et immédiatement à droite :

$$-\infty \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \infty$$

$$0$$

$$-1 \qquad\qquad\qquad\qquad 1$$

$$-2 \qquad -\tfrac{1}{2} \qquad \tfrac{1}{2} \qquad 2$$

$$-3 \quad -\tfrac{3}{2} \quad -\tfrac{2}{3} \quad -\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{2}{3} \quad \tfrac{3}{2} \quad 3$$

$$-4 \; -\tfrac{5}{2} \; -\tfrac{5}{3} \; -\tfrac{4}{3} \; -\tfrac{3}{4} \; -\tfrac{3}{5} \; -\tfrac{2}{5} \; -\tfrac{1}{4} \; \tfrac{1}{4} \; \tfrac{2}{5} \; \tfrac{3}{5} \; \tfrac{3}{4} \; \tfrac{4}{3} \; \tfrac{5}{3} \; \tfrac{5}{2} \; 4$$

(Cet arbre s'appelle l'*arbre de Stern-Brocot* ; pour plus de précisions à ce sujet, ainsi qu'au rapport avec les fractions continuées, cf. R. L. Graham, D. E. Knuth & O. Patashnik, *Concrete Mathematics, A Foundation for Computer Science*, 2d edition, Addison-Wesley 1994, p. 116ss.)

La mesure de complexité, autrement dit le nombre d'éclatements *successifs* qu'il faut utiliser pour résoudre une pente s, est égale à la somme des entiers intervenant dans la décomposition de s suivant l'algorithme d'Euclide.