Cours Doctoral EDITE

Champs de Markov - Introduction - Analyse Bayesienne

Marc Sigelle

Année 2008-2009

Dernière mise a jour : 2 mars 2009

Plan du cours

- **introduction**

- **théorème d'Hammersley-Clifford**

- propriétés fondamentales des champs de Markov.

- **échantillonneurs (Gibbs, Metropolis)**

- propriétés de convergence.

- **estimateurs bayesiens en traitement des images**

Introduction

◦ **utilisation en imagerie bas niveau**

- Compression
- Restauration
- Détection de contours
- Segmentation
- Détection du mouvement
- Tomographie

Champs de Markov

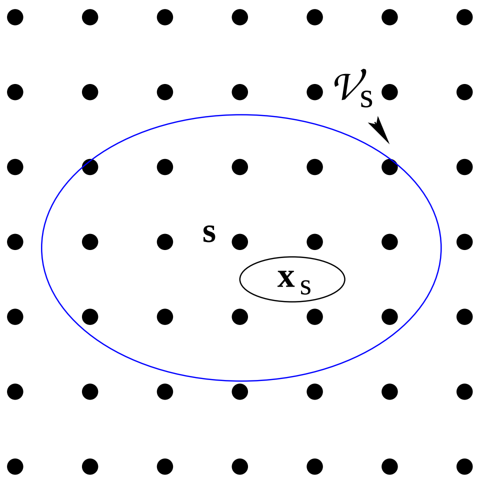
- **méthode probabiliste**
- **synthétise des informations a priori**

numériques	$\longrightarrow$	Niveaux de gris
topologiques	$\longrightarrow$	Voisinage (connexité)

- **traitement des images par approche bayesienne $\rightarrow$ régularisation**
- **vraisemblance importante des résultats de traitement**

A priori dans les images naturelles : le contexte spatial

Contexte spatial dans les images naturelles (suite)



s : site

$\mathcal{V}_s$: voisinage (spatial) de s

- **régions homogènes en niveaux de gris**

  $x_s \leftrightarrow$ Intensités aux sites voisins — Moyenne

- **régions texturées**

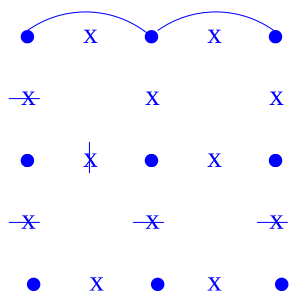
  $x_s \leftrightarrow$ Intensités aux sites voisins (!!) — Contraste, Entropie

réalisation globale de l'image	$\Leftrightarrow$	voisinage local
probabilité globale	$\Leftrightarrow$	probabilités locales [conditionnelles]

Vocabulaire

$S = \{s\} \subset \mathbf{Z}^d$	ensemble de sites (fini)
$x_s \in E$	espace des niveaux de gris
exemples :	$E = \{0..255\}$ $\{0..q-1\}$ (système de labels) $\mathbf{R}$
$x = \{x_s\}_{s \in S} = \{x_s\} \cup x^s$	configuration : niv. gris au site s + autres sites
$\Omega = E^{\lvert S \rvert}$	espace des configurations
X_s	v.a. de niveau de gris au site s
$\mathrm{P}(X_s = x_s)$	probabilité locale
$X = \{X_s\}_{s \in S} = \{X_s\} \cup X^s$	champ aléatoire : v.a. au site s + autres sites
$\mathrm{P}(X_s = x_s \ / \ X^s = x^s)$	probabilité conditionnelle (locale)
$\mathrm{P}(X = x) = \mathrm{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2$	$\ldots X_s = x_s \ldots)$ loi globale (jointe)

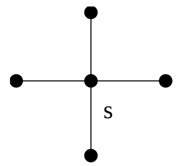
◦ **extension possible : système des bords**



Topologie pour les champs de Markov

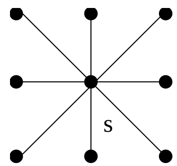
◦ système de voisinage - définition

voisinage du site s :	$\mathcal{V}_s$
propriétés :	$s \notin \mathcal{V}_s \quad s \in \mathcal{V}_r \Leftrightarrow r \in \mathcal{V}_s$



$\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_s\}_{s \in S}$ système de voisinage

$x \longrightarrow V_s = \{x_r\}_{r \in \mathcal{V}_s}$ configuration locale



◦ cliques

$c \subset S$ est une clique / $\mathcal{V}$ ssi :

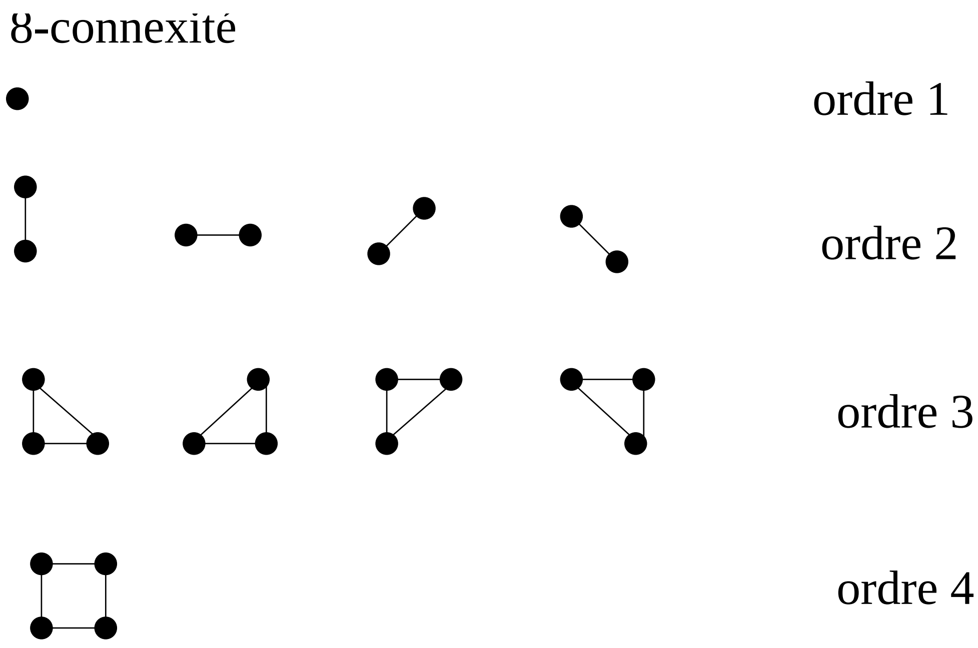
- card $(c) = 1$ (singleton)
- card $(c) \geq 2$ and $\forall\ r \neq s \in c \Rightarrow$ r, s voisins

◦ notations $\quad c = (r, s, t, \ldots); \qquad \mathcal{C} = \{c\}$

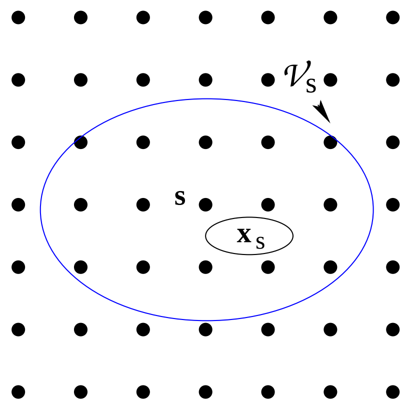
Topologie pour les champs de Markov (suite)

- **4-connexité**

- **8-connexite**



Champ de Markov



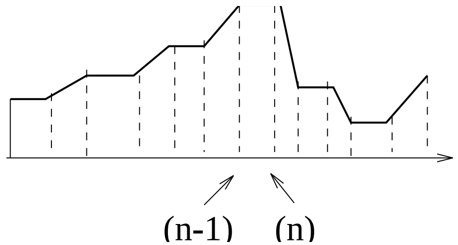
s : site

$\mathcal{V}_s$: voisinage (spatial) de s

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{P}(X_s = x_s \; / \; \{X_r = x_r\} \; , \; r \neq s) \quad &= \quad \mathrm{P}(X_s = x_s \; / \; \{X_r = x_r\} \; , \; r \in \mathcal{V}_s) \\ \mathrm{P}(X_s = x_s \; / \; X^s = x^s) \quad &= \quad \mathrm{P}(X_s = x_s \; / \; V_s) \end{aligned}}$$

Probabilité		Probabilité
Globale	$\leftrightarrow$	Locale

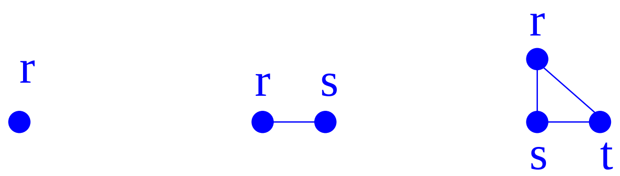
◦ **extension de la notion de chaîne de Markov**



Théorème d'Hammersley-Clifford :
$\mathbf{P}(X = x) > 0 \;\; \forall x \in \Omega$ est un champ de Markov ssi

$\mathrm{P}(X = x) = \dfrac{\exp - U(x)}{Z}$	distribution de Gibbs
$U(x) = \displaystyle\sum_{c \in \mathcal{C}} U_c(x)$	énergie globale
$U_c(x) = U_c(x_s,\ s \in c)$	potentiel de cliques
$Z = \displaystyle\sum_{y \in \Omega} \exp - U(y)$	fonction de partition

◦ **exemple : cliques**



$$U(x) = A \sum_{s \in S} x_s + B \sum_{(r,s)} x_r\ x_s + C \sum_{(r,s,t)} x_r\ x_s\ x_t$$

non-stationnarité possible : $A \to A_s$, $B \to B_{rs}$ ...

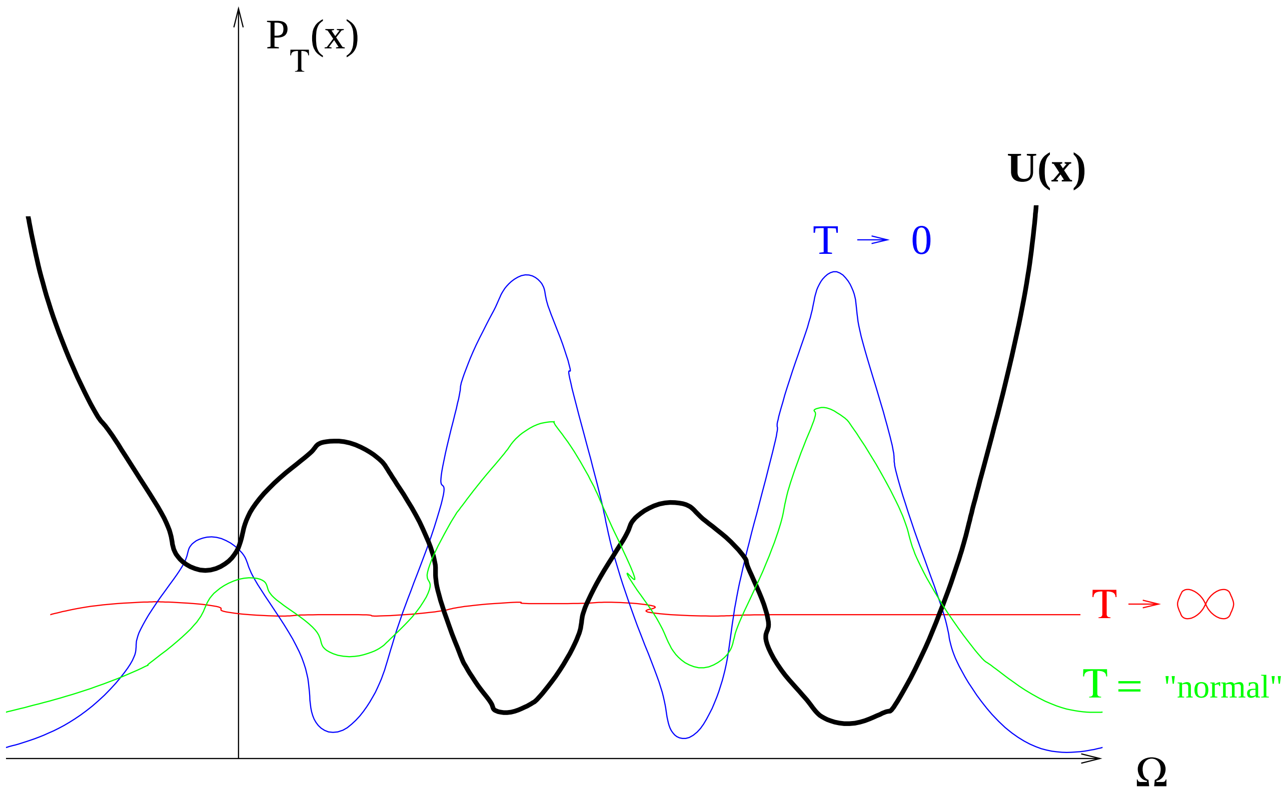
◦ <u>**fait important**</u> **: énergie $U(x)$ basse $\Leftrightarrow$ probabilité $\mathbf{P}(X = x)$ forte**

Distribution de Gibbs avec température

$$\mathrm{P}_T(X = x) = \frac{1}{Z_T}\ \exp - \frac{U(x)}{T}$$

$$U(x) = \sum_{c \in \mathcal{C}} U_c(x) \qquad \text{énergie globale}$$

$$Z_T = \sum_{y \in \Omega} \exp - \frac{U(y)}{T} \qquad \text{fonction de partition}$$



Comportement aux températures limites

- **intuition**

$$\frac{\mathrm{P}_T(X=y)}{\mathrm{P}_T(X=x)} = \exp -\frac{[U(y)-U(x)]}{T} \qquad \forall x,\ y \in \Omega$$

$$T \to \infty \qquad \exp -\frac{[U(y)-U(x)]}{T} \to 1 \quad \forall x, y \in \Omega \ \underline{\text{fini}}$$

$$T \to 0 \qquad \exp -\frac{[U(y)-U(x)]}{T} \to 0 \quad \text{si } U(y) > U(x)$$

- **démonstration pour $T \to \infty$**

$$\mathrm{P}_T(X=x) = \frac{\exp -\frac{U(x)}{T}}{\sum_{y\in\Omega} \exp -\frac{U(y)}{T}} = \frac{1}{\sum_{y\in\Omega} \exp -\frac{[U(y)-U(x)]}{T}}$$

$$\to \frac{1}{|\Omega|} \quad \forall x \in \Omega \qquad \text{équidistribution sur } \Omega$$

Distribution de Gibbs avec température(suite)

- **démonstration pour $T \to 0$**

$$U^* = \min_{x \in \Omega} U(x) \quad \Omega^* = \{x \in \Omega \mid U(x) = U^*\}$$

$$\mathrm{P}_T(X = x) = \frac{\exp -\dfrac{[U(x) - U^*]}{T}}{\displaystyle\sum_{y \in \Omega} \exp -\dfrac{[U(y) - U^*]}{T}} = \frac{\exp -\dfrac{[U(x) - U^*]}{T}}{|\Omega^*| + \displaystyle\sum_{y \in \Omega, y \notin \Omega^*} \exp -\dfrac{[U(y) - U^*]}{T}}$$

$$\to \begin{cases} \dfrac{1}{|\Omega^*|} & \text{si } x \in \Omega^* \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega^* \end{cases} \qquad \text{équidistribution sur } \Omega^*$$

(rappel : $\exp -\dfrac{[U(y) - U(x)]}{T} \to 0$ si $U(y) > U(x)$)

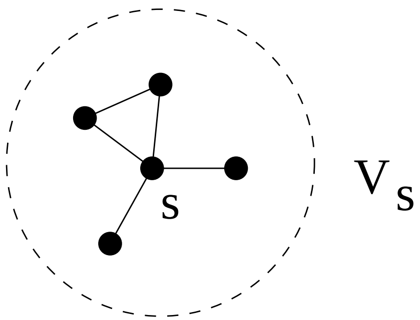
Forme des probabilités conditionnelles locales

$$\boxed{\mathrm{P}(X_s = x_s \ / \ V_s) = \frac{1}{Z_T^s} \ \exp - \frac{U(x_s \ / \ V_s)}{T}}$$

avec :

$$U(x_s \ / \ V_s) = \sum_{c \subset C, s \in c} U_c(x) \quad \text{énergie conditionnelle locale}$$

$$Z_T^s = \sum_{\xi \in E} \exp - \frac{U(\xi \ / \ V_s)}{T} \quad \text{fonction de partition locale}$$



◦ ⇒ **forme locale de la loi de Gibbs**

Probabilités conditionnelles locales (suite)

◦ **démonstration**

$$\mathrm{P}(X_s = x_s \;/\; X^s = x^s) = \frac{\mathrm{P}(X_s = x_s,\; X^s = x^s)}{\mathrm{P}(X^s = x^s)}$$

$$= \frac{\mathrm{P}(X_s = x_s,\; X^s = x^s)}{\displaystyle\sum_{\xi \in E} \mathrm{P}(X_s = \xi,\; X^s = x^s)} = \frac{\mathrm{P}(X = x)}{\displaystyle\sum_{\xi \in E} \mathrm{P}(X = x')}$$

◦ $\rightarrow$ **maintenant posons** $\quad U(x) = U(x_s \;/\; V_s) + \displaystyle\sum_{c \in C, s \notin c} U_c(x)$

$\nwarrow \; \mathcal{W}$

$$\boxed{\mathrm{P}(X_s = x_s \;/\; X^s = x^s) = \mathrm{P}(X_s = x_s \;/\; V_s) = \frac{\exp -\dfrac{U(x_s \;/\; V_s)}{T}}{\displaystyle\sum_{\xi \in E} \exp -\dfrac{U(\xi \;/\; V_s)}{T}} \qquad \swarrow \quad Z_T^s}$$

Champs de Markov prototypes

- **modèle d'Ising**

$$U(x) = -\beta \sum_{c=(s,t)} x_s \; x_t - B \sum_{s \in S} x_s \qquad\qquad E = \{-1, +1\}$$

- **modèle de Potts**

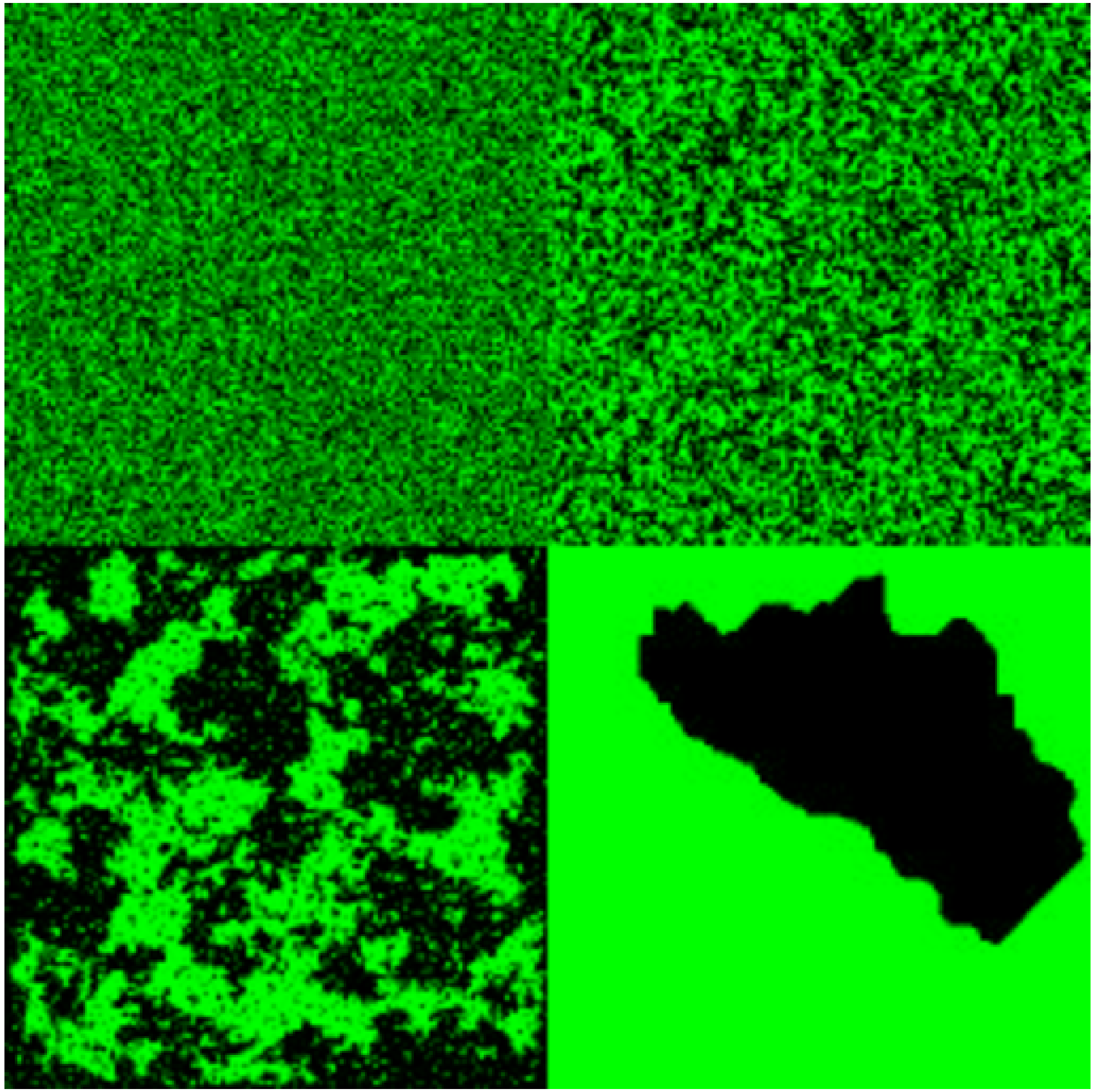
$$\text{définissons} \quad \Delta(a,b) = \begin{cases} +1 \text{ si } a = b \\ -1 \text{ si } a \neq b \end{cases}$$

$$U(x) = -\beta \sum_{c=(s,t)} \Delta(x_s, \; x_t) - B \sum_{s \in S} \Delta(x_s, 0) \qquad\qquad E = \{0..q-1\}$$

- **modèles markoviens gaussiens**

$$U(x) = \beta \sum_{c=(s,t)} (x_s - x_t)^2 + \alpha \sum_{s \in S} (x_s - \mu_s)^2 \qquad\qquad E = \mathbf{R}$$

Modèle d'Ising en 4-connexité et $B = 0$

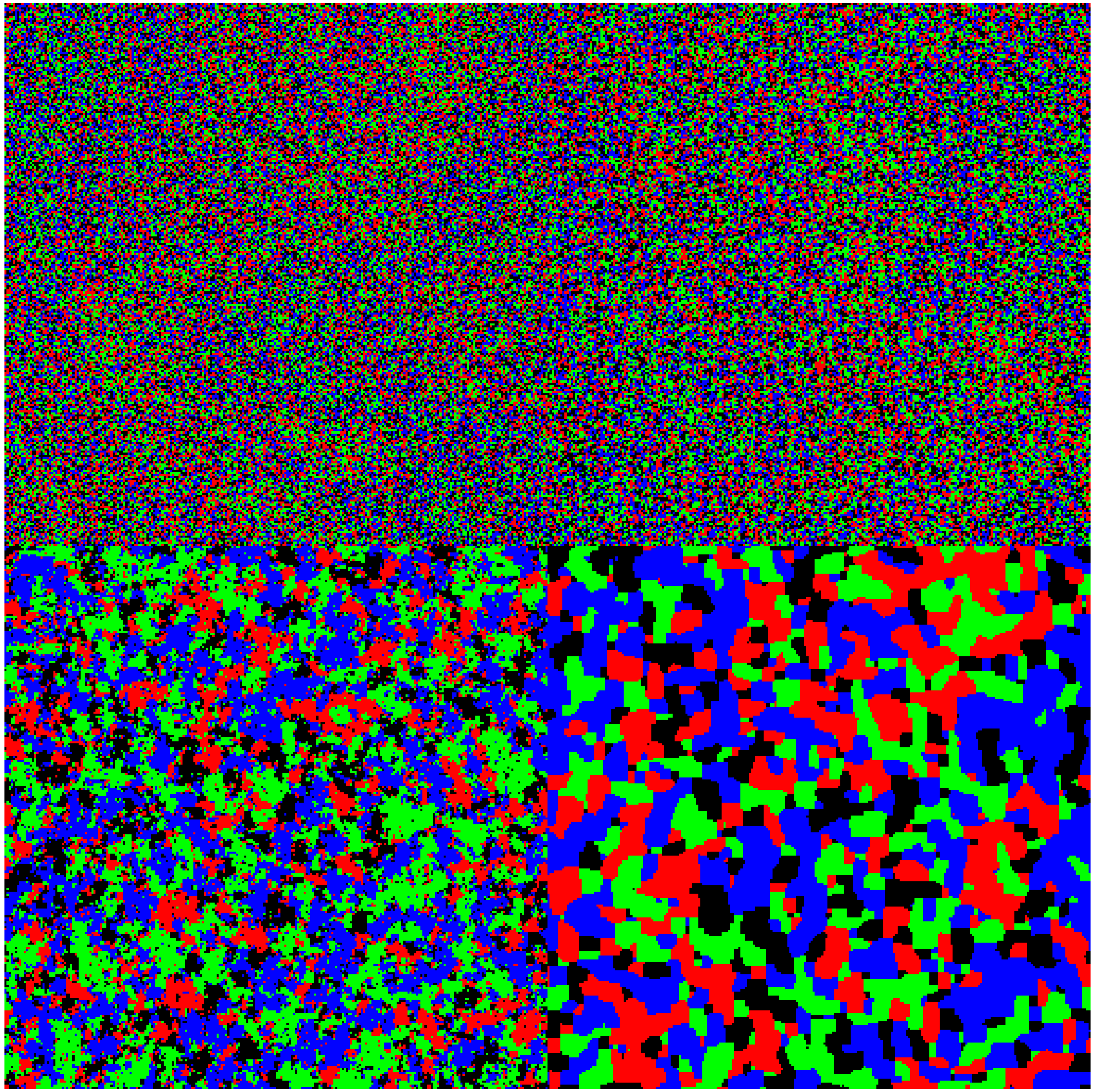


A	B
C	D

- A : *Image aléatoire :* $\beta = 0$ - B : *régularisation faible :* $\beta = 0.2$

- C : *régularisation "critique" :* $\beta \approx 0.44$ - D : *régularisation forte :* $\beta = 4.0$

Modèle de Potts en 4-connexité et $B = 0$ $(q = 4)$

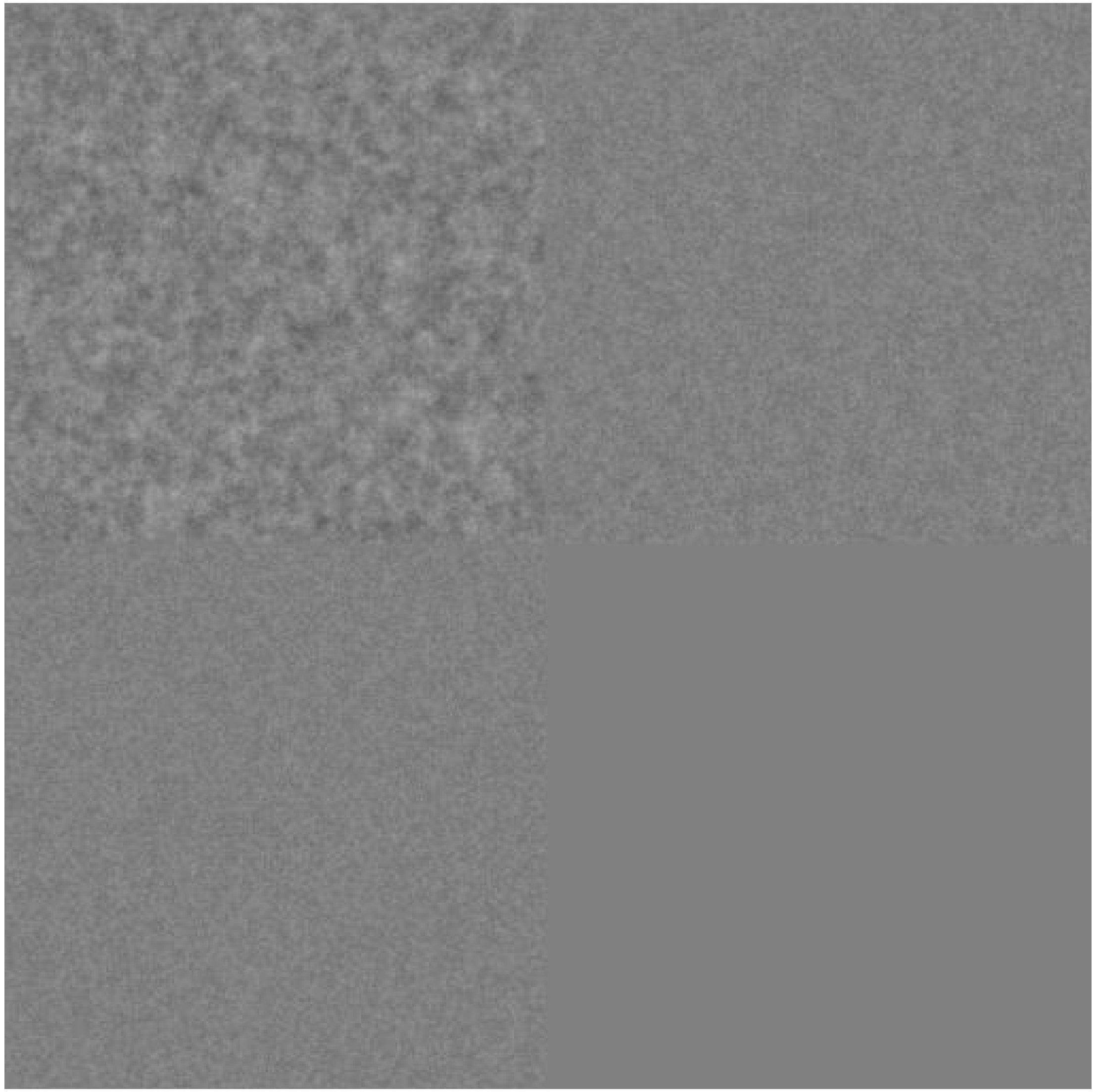


A	B
C	D

- A : *Image aléatoire :* $\beta = 0$ - B : *régularisation faible :* $\beta = 0.2$

- C : *régularisation "critique" :* $\beta \approx 1,099$ - D : *régularisation forte :* $\beta = 4.0$

Modèle markovien gaussien en 4-connexité



$$U(x) = \beta \sum_{c=(s,t)} (x_s - x_t)^2 + \alpha \sum_{s \in S} (x_s - \mu_s)^2$$

A	B
C	D

- A : $\alpha = 5.10^{-4}$ - B : $\alpha = 5.10^{-3}$

- C : $\alpha = 2.10^{-3}$ - D : $\alpha = \infty$ *($\mu = 127$ pour toutes simulations)*

Modèles markoviens gaussiens

◦ **modèle à pixels indépendants**

$$P(X = x) = \left[\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right]^{|S|} \prod_{s \in S} e^{-\alpha\,(x_s - \mu)^2} \Leftrightarrow \frac{\exp\, -U(x)}{Z}$$

$$\text{avec } U(x) = \alpha \sum_{s \in S} (x_s - \mu)^2 \qquad (\alpha = \frac{1}{2\,\sigma^2})$$

◦ **cas général - modèle auto-normal**

$$U(x) = \alpha \sum_{s \in S} (x_s - \mu_s)^2 + \beta \sum_{c=(s,t)} (x_s - x_t)^2$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

moyenne locale — couplage

- illumination variable μ_s
- illumination constante $\mu_s = \mu = 128$

Loi conditionnelle locale en connexité γ : gaussienne

$$\mathrm{P}(X_s = x_s \;/\; V_s) = \frac{1}{z} \;\exp - \left[\alpha (x_s - \mu_s)^2 + \beta \sum_{c=(s,t),\; t \in \mathcal{V}_s} (x_s - x_t)^2 \right]$$

$$= \quad \sqrt{\frac{2\;(\alpha + \beta\;\gamma)}{\pi}} \;.\; \exp - \;(\alpha + \beta\;\gamma) \left[x_s - \left(\frac{\alpha\;\mu_s + \beta \sum_{t \in \mathcal{V}_s} x_t}{\alpha + \beta\;\gamma} \right) \right]^2$$

○ **espérance conditionnelle**

$$\mathbf{E}[X_s \;/\; V_s] = \frac{\alpha\;\mu_s + \beta \sum_{t \in \mathcal{V}_s} x_t}{\alpha + \beta\;\gamma} = \frac{\alpha\;\mu + \beta \sum_{t \in \mathcal{V}_s} x_t}{\alpha + \beta\;\gamma} \quad \rightarrow \quad \text{barycentre } (\mu_s = \mu)$$

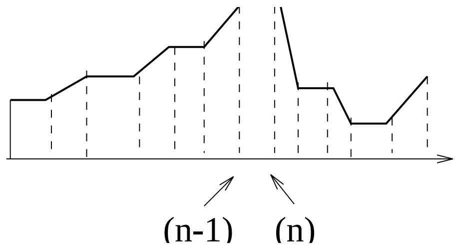
○ **variance conditionnelle**

$$\mathrm{var}(X_s \;/\; V_s) = \frac{1}{2\;(\alpha + \beta\;\gamma)} \quad \rightarrow \quad \text{indépendante de } \mu_s \text{ et de } x_t, t \in \mathcal{V}_s$$

○ $\Rightarrow$ **permet un ensemble de statistiques à variable** $X_{\mathbf{V}} = \sum_{t \in \mathcal{V}_s} x_t$ **fixée**

Échantillonnage d'un champ de Markov

- **chaîne de Markov**



$$\begin{aligned} P(X^{(n)} = x^{(n)} \ / \ X^{(0)} &= x^{(0)}, X^{(1)} = x^{(1)} \ldots X^{(n-1)} = x^{(n-1)}) \\ &= P(X^{(n)} = x^{(n)} \ / \ X^{(n-1)} = x^{(n-1)}) \end{aligned}$$

- **noyau de transition**

$$Q_n(x,\ y) = P(X^{(n)} = y \ / \ X^{(n-1)} = x) \qquad x \longrightarrow y$$

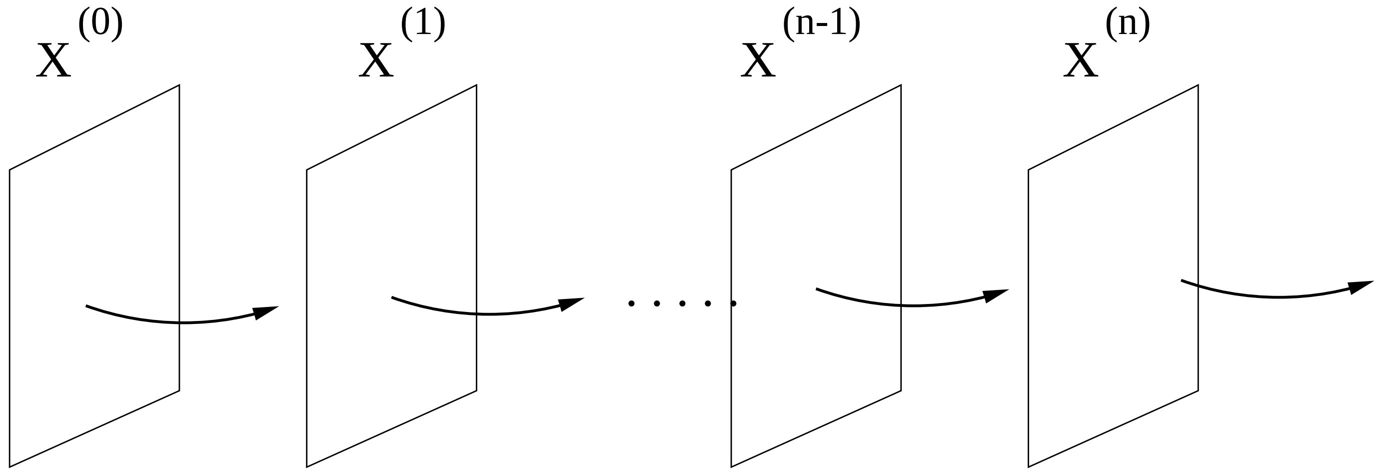
- **chaîne de Markov <u>homogène</u> :** $Q_n(x,\ y)$ **indépendant de** n

$$T = \mathrm{Cte}$$

- **chaîne de Markov <u>inhomogène</u> :** $Q_n(x,\ y)$ **dépendant de** n

$$T_n \searrow 0$$

Échantillonnage : chaîne de Markov de variables d'images !



$$X^{(0)},\ X^{(1)}\ \ldots X^{(n-1)},\ X^{(n)},\ X^{(n+1)} \ldots$$

- **échantillonnage <u>homogène</u> : trouver $Q(x,\ y)$ tel que**

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X^{(n)} = x) = \mathrm{P}_T(X = x) \quad \text{distribution de Gibbs à température } T$$

- **échantillonnage <u>inhomogène</u> : trouver $Q_n(x,\ y)$ tel que**

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X^{(n)} = x) = \frac{1}{|\Omega^*|}\ \mathbb{1}_{x\in\Omega^*} \quad \text{distribution de Gibbs à température "0"}$$

$\rightarrow$ minimum globaux de $U(x)$

Échantillonnage homogène (température T fixe)

- **noyau irréductible - noyau réversible**

$Q(x,y) > 0 \qquad\qquad \mathrm{P}_T(X=x)\ Q(x,y) = \mathrm{P}_T(X=y)\ Q(y,x) \quad \forall x,y \in \Omega$

- **théorème pour l'échantillonnage homogène**

Si $Q(.,.)$ est un noyau homogène, irréductible et réversible par rapport à la distribution $\mathrm{P}_T(.)$, alors $$\forall X^{(0)} = x^{(0)} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X^{(n)} = x) = \mathrm{P}_T(X=x)$$

- **loi des grands nombres (échantillons $X^{(n)}$ non indépendants!)**

$$\frac{\sum_{n=M}^{M+N} f(X^{(n)})}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} = \mathbf{E}_T[f(X)] \quad \text{ex: } \frac{\sum_{n=M}^{M+N} 1\!\!1_{X_s^{(n)}=i}}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}_T[1\!\!1_{X_s=i}] = P_T(X_s=i)\,!$$

Echantillonneurs homogènes de Metropolis et de Gibbs

- **Metroplis :** $Q(x,y) = 1$ **si** $U(y) < U(x) \Rightarrow$ **cas** $U(y) \geq U(x)$:

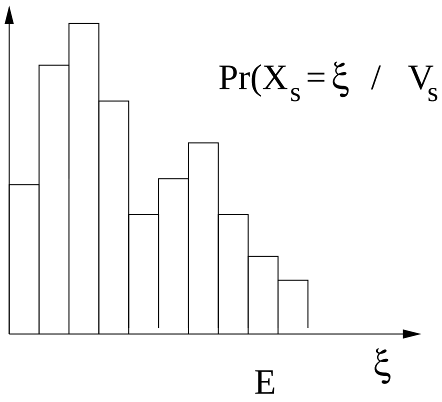
$$\mathrm{P}_T(X=x)\; Q(x,y) = \mathrm{P}_T(X=y)\; \underbrace{Q(y,x)}_{1} \qquad \text{(réversibilité)}$$

$$\Rightarrow Q(x,y) = \frac{\mathrm{P}_T(X=y)}{\mathrm{P}_T(X=x)} = \exp - \frac{[U(y) - U(x)]}{T} = \exp - \frac{\Delta U}{T}$$

- **Gibbs :** $Q_s(x_s^{(n)},\; x_s^{(n+1)} = \xi) = \mathrm{P}(X_s^{(n+1)} = \xi \;/\; V_s)$

réversible $p.r.$ distribution de Gibbs $\mathrm{P}_T(x)$

- $\Rightarrow$ **tirage de** $x_s^{(n+1)}$ **selon la loi conditionnelle locale courante**



$$\Pr(X_s = \xi \;/\; V_s) = \frac{\exp - \frac{U(\xi \;/\; V_s)}{T}}{Z_T^s}$$

Échantillonnage inhomogène (température T variable)

- **théorème (Geman and Geman 1984)**

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si} \quad Q_n(x,y) \text{ avec } T_n \searrow 0 \;\; , T_n \geq \dfrac{T_0}{\log(1+n)} \\[2em] \text{alors } \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(X^{(n)} = x) = \frac{1}{|\Omega^*|} \; \mathbb{1}_{x \in \Omega^*} \leftarrow \text{minimum global de l'énergie} \end{array}}$$

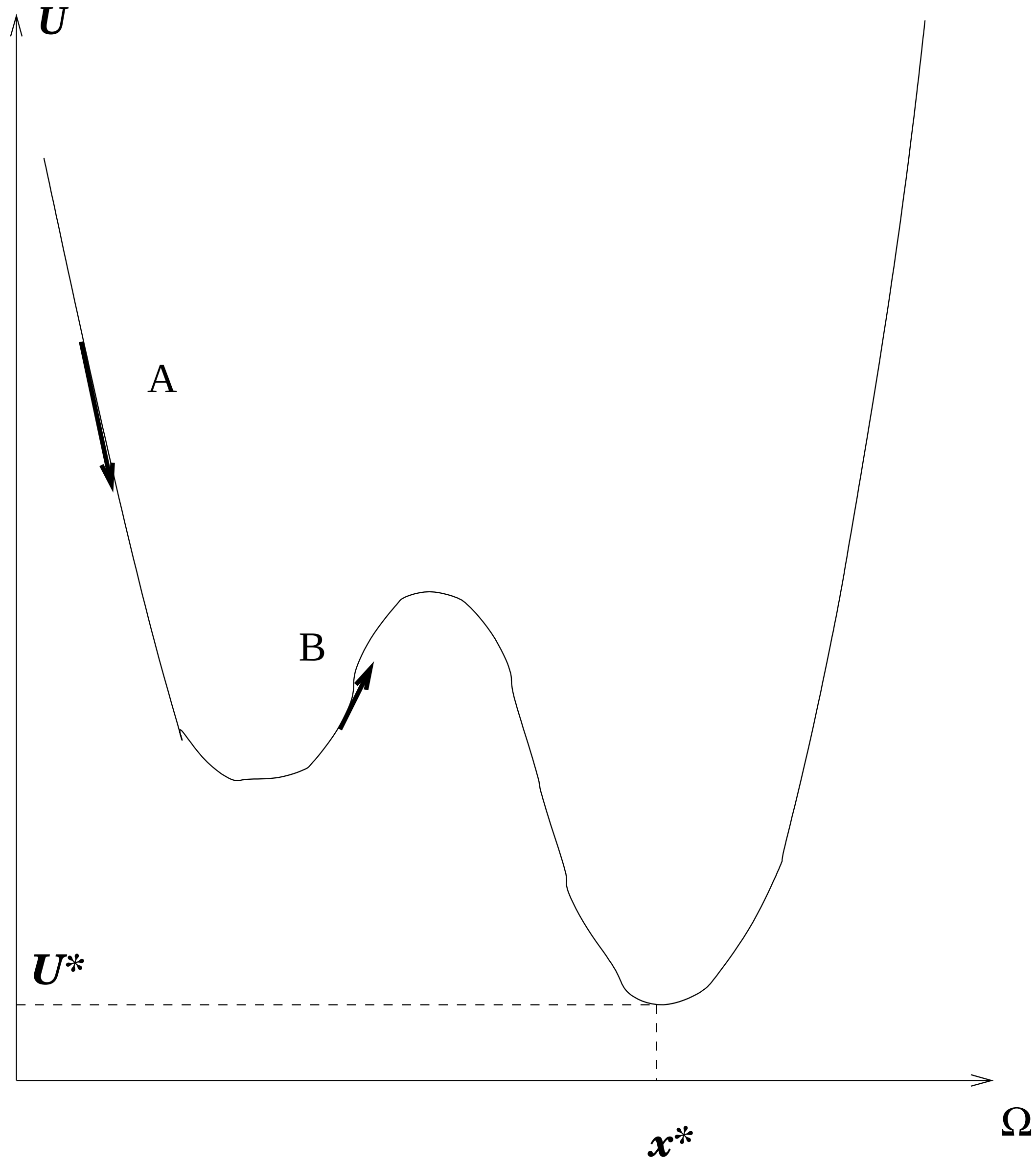
- **condition théorique**

$$T_0 = \begin{cases} \Delta \, U_{max} & \textit{Metropolis} \\ \displaystyle\sum_{s \in S} \delta \, U(. \,/\, V_s)_{max} & \textit{Gibbs} \end{cases}$$

- **en pratique : $T_n = T_0 \; \alpha^n$ avec :**

$$T_0 \approx \delta \, U(. \,/\, V_s)_{max} \;\; , \alpha \approx 0.98$$

Recuit simulé



Analyse Bayesienne en Traitement des Images
Loi du processus de formation des observations

$x \quad \longrightarrow$ $\boxed{\text{Dégradation Détection Mesure}}$ $\longrightarrow \quad y$

scène originale — observation

P(Y= y / X= x)

○ **bruit blanc additif gaussien**

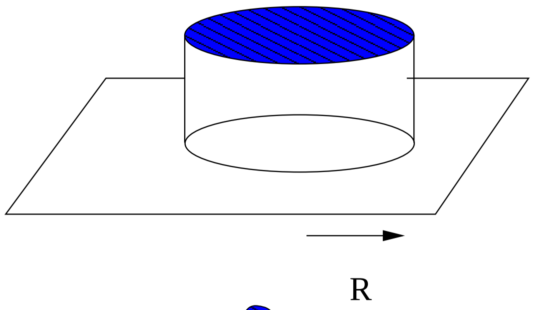
$$
\left[\begin{array}{lll}
y = x + \epsilon & y_s = x_s + \epsilon_s \ \forall s \in S & \epsilon_s \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\
\mathrm{P}(Y = y \ / \ X = x) \quad = & \displaystyle\prod_{s \in S} \mathrm{P}(Y_s = y_s \ / \ X_s = x_s) \quad \propto & \displaystyle\prod_{s \in S} \exp - \frac{(y_s - x_s)^2}{2\sigma^2}
\end{array}\right.
$$

Loi du processus de formation des observations (suite)

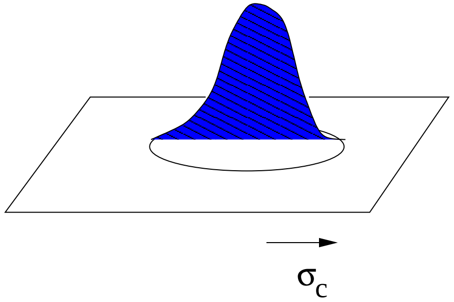
◦ **convolution**

$$\left[\; y = h\;x + \epsilon \qquad\qquad y_s = \sum_{s \in S} h_{rs}\;x_s + \epsilon_s \;\forall s \in S \qquad\qquad \epsilon_s \longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2) \right.$$

- flou de bougé isotrope uniforme



- flou de mise au point (gaussien)



Modèle (loi) a priori : propriétés désirées sur l'image réelle

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Homogénéité de zones}\\ \text{Contours}\\ \text{Textures}\\ \text{Intensité}\end{array}\right. \quad \longrightarrow \quad \text{Modélisation markovienne}$$

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{\exp -U(x)}{Z}$$

Distribution a posteriori

- **modélise le problème :** $y \quad \rightarrow \quad x \quad ?$

$$\mathrm{P}(X = x \;/\; Y = y) = \frac{\mathrm{P}(Y = y \;/\; X = x) \;.\; \mathrm{P}(X = x)}{\mathrm{P}(Y = y)} \qquad \text{[Bayes]}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathrm{P}(X = x \;/\; Y = y) \propto & \mathrm{P}(Y = y \;/\; X = x) \;\; . & \mathrm{P}(X = x) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{probabilité a posteriori} & \text{formation} & \text{loi de} \\ \text{de } x & \text{des observations} & \text{Markov-Gibbs} \end{array}}$$

- **estimateur MAP :** $\arg\max \mathbf{P}(X = x \;/\; Y = y)$

Débruitage d'image avec bruit blanc additif gaussien

$$\mathrm{P}(Y = y \;/\; X = x) \quad = \quad \prod_{s \in S} \mathrm{P}(Y_s = y_s \;/\; X_s = x_s) \propto \prod_{s \in S} \exp - \frac{(y_s - x_s)^2}{2\sigma^2}$$

- **régularité de l'image réelle à niveaux de gris**

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{\exp \; -\beta \displaystyle\sum_{(r,s) \in \mathcal{C}} \Phi(x_r, x_s)}{Z}$$

- **$\Rightarrow$ on en déduit P$(X = x \;/\; Y = y) = \dfrac{\exp \; -\mathcal{U}}{Z'}$**

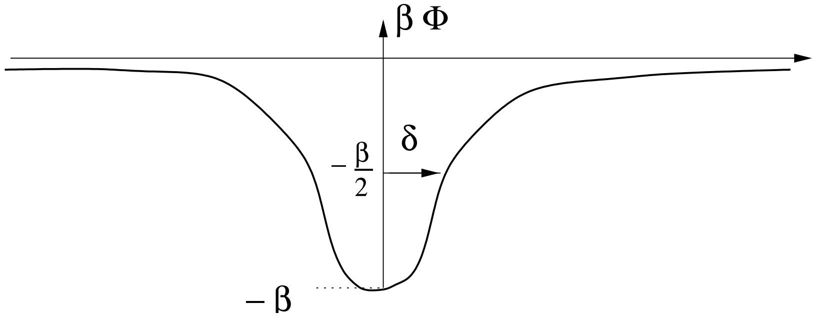
$$\boxed{\mathcal{U} = \sum_{s \in S} \frac{(y_s - x_s)^2}{2\sigma^2} + \beta \sum_{(r,s) \in \mathcal{C}} \Phi(x_r, x_s) \quad \max_{x \in \Omega} \mathrm{P}(X = x \;/\; Y = y) \;\Leftrightarrow\; \min_{x \in \Omega} \; \mathcal{U}}$$

- **régularisation**

Débruitage d'image (suite) : le potentiel Φ [Geman]

- **sa formulation**

$$\boxed{\beta\ \Phi(x_r, x_s) = \frac{-\beta}{1 + \left(\dfrac{x_r - x_s}{\delta}\right)^2}}$$

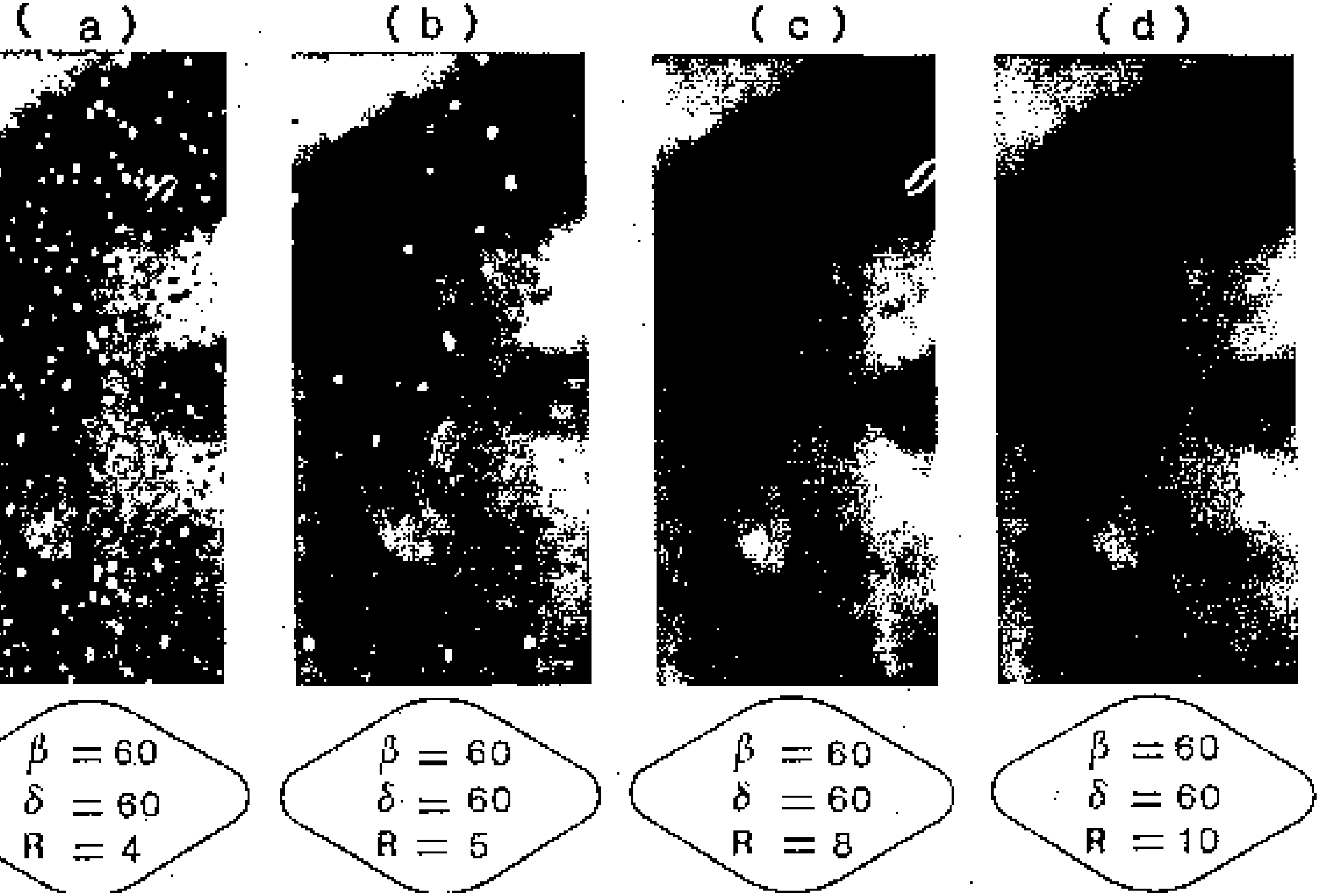


$$\begin{cases} \beta : \text{ “Portée” du potentiel} \\ \delta : \text{ “Amplitude” du potentiel} \end{cases}$$

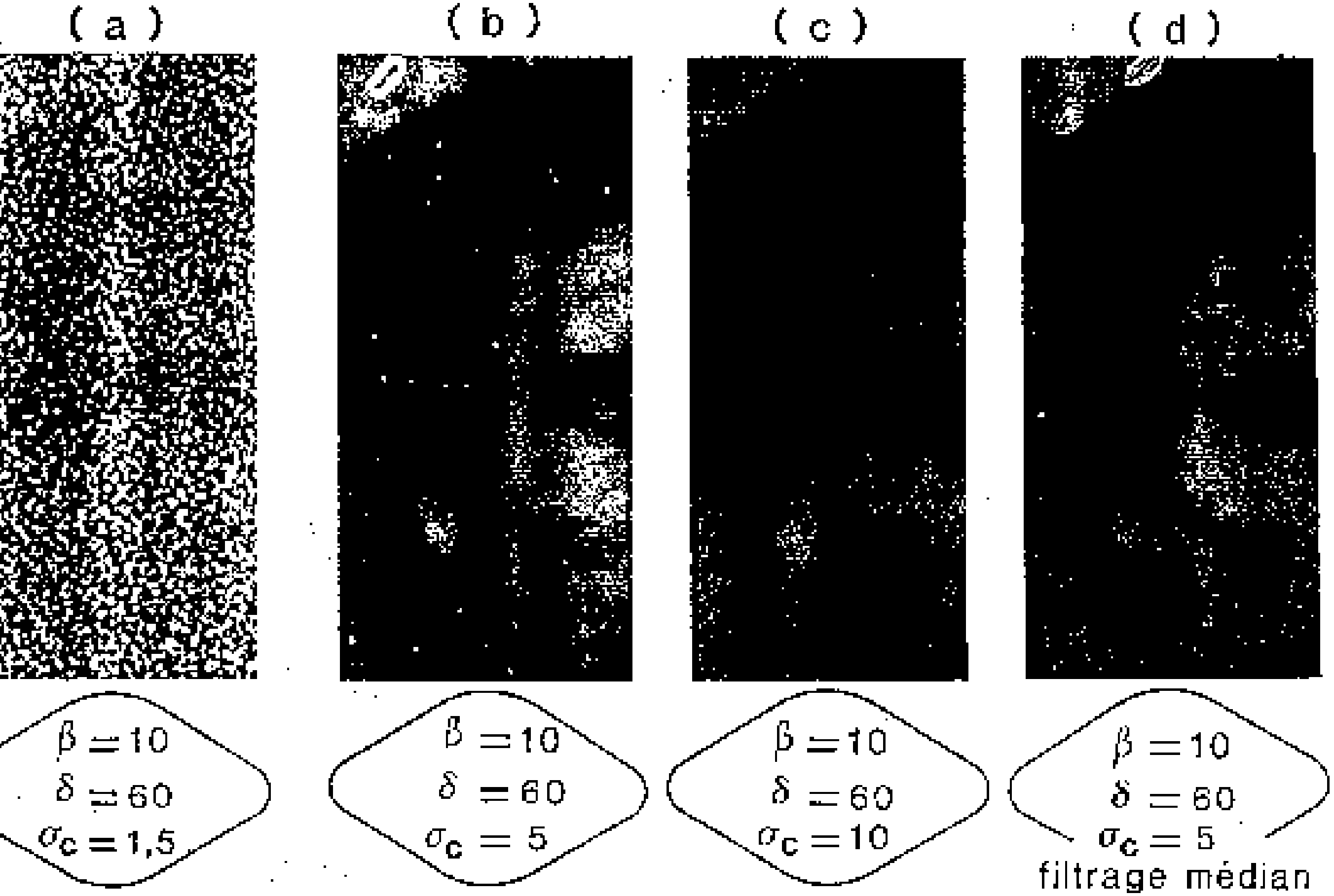
- **$\Rightarrow$ choix de β et δ : choix des paramètres**

Restauration de photographies (J-M. Dinten CEA/LETI)

Restauration de photographies : flou de bougé



Restauration de photographies : flou de mise au point



Segmentation d'image par champs de Markov

- **position du problème**

$$Y \qquad \longrightarrow \qquad X$$

processus pixel (observation) processus label (étiquettes)

- **estimateur MAP :** $\arg\max \mathbf{P}(X = x \;/\; Y = y)$

$$\mathrm{P}(X = x \;/\; Y = y) \qquad = \qquad \frac{\mathrm{P}(Y = y \;/\; X = x) \;.\; \mathrm{P}(X = x)}{\mathrm{P}(Y = y)}$$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$$

probabilité a posteriori Bayes

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathrm{P}(Y_s = y_s \;/\; x_s = i) & = & \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp - \dfrac{(x_s - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \quad \leftarrow \textit{Gaussien} \\ \mathrm{P}(X = x) & = & \dfrac{\exp - \sum_{c \in \mathcal{C}} U_c(x)}{Z} \quad \leftarrow \textit{Markov : Potts etc..} \end{array}\right.$$

Segmentation d'image par champs de Markov (suite)

$$\boxed{\begin{aligned} \min\ \mathcal{U}(x) &= U(y\ /\ x) + U(x) \\ U(y\ /\ x) &= \sum_{s \in S} \frac{(y_s - \mu_{l_s})^2}{2{\sigma_{x_s}}^2} + \log \sigma_{x_s} \\ U(x) &= -K \sum_{(r,s) \in \mathcal{C}} \delta(x_r, x_s) \end{aligned}}$$

∘ $\longrightarrow$ **recuit simulé**

Segmentation d'image : exemple