

UE SI343

Champs de Markov et optimisation par coupes minimales (graphcuts)

Florence Tupin



Introduction

- **Historique**

- Physique statistique (organisation des cristaux)
- Article de Geman et Geman (84)
- Regain d'intérêt avec les graph-cuts (99)

- **Idée fondamentale des champs de Markov**

introduire des relations contextuelles en traitement d'images

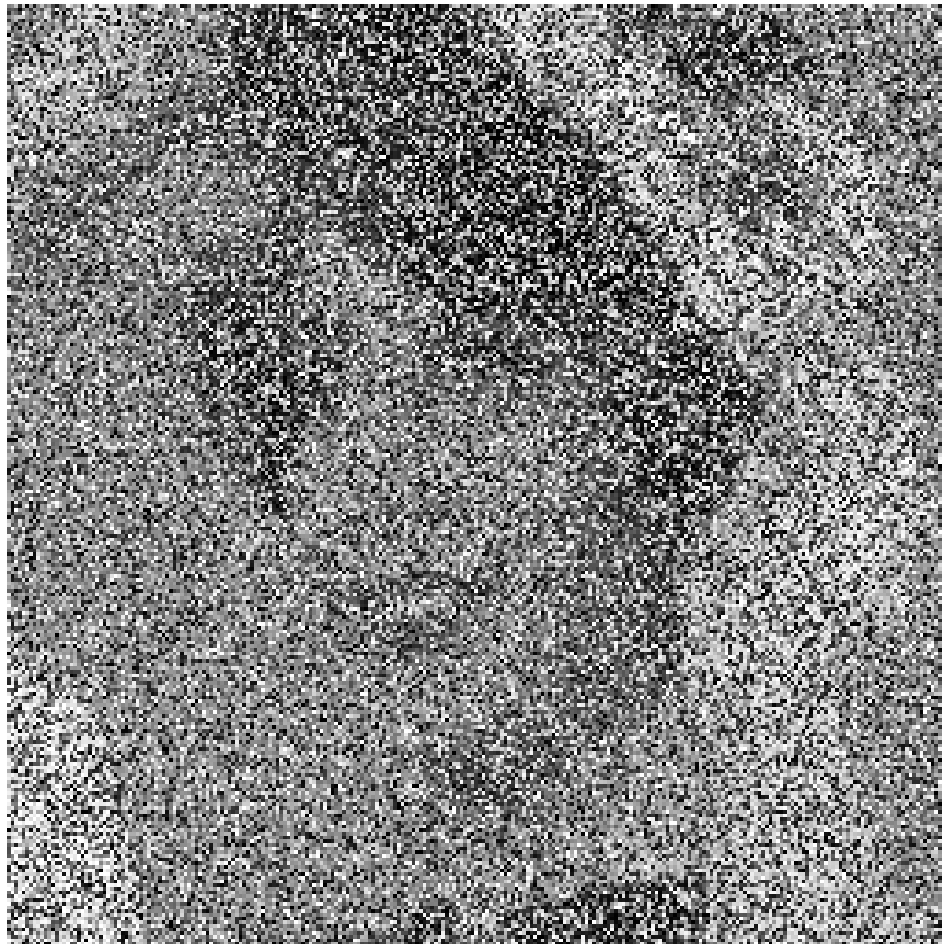
un voisinage local suffit pour des images naturelles

A priori dans les images naturelles : le contexte spatial

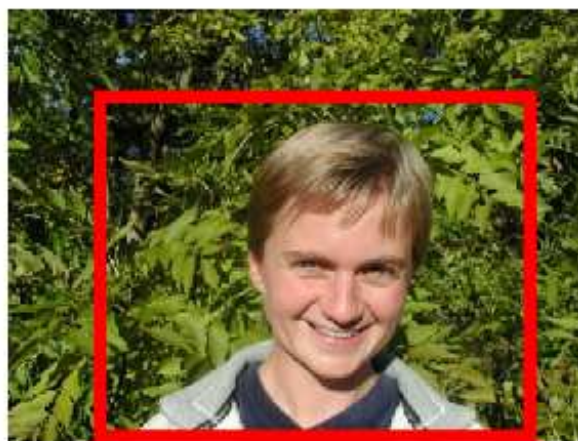


Illustrations - filtrage (Darbon, Sigelle 2006)

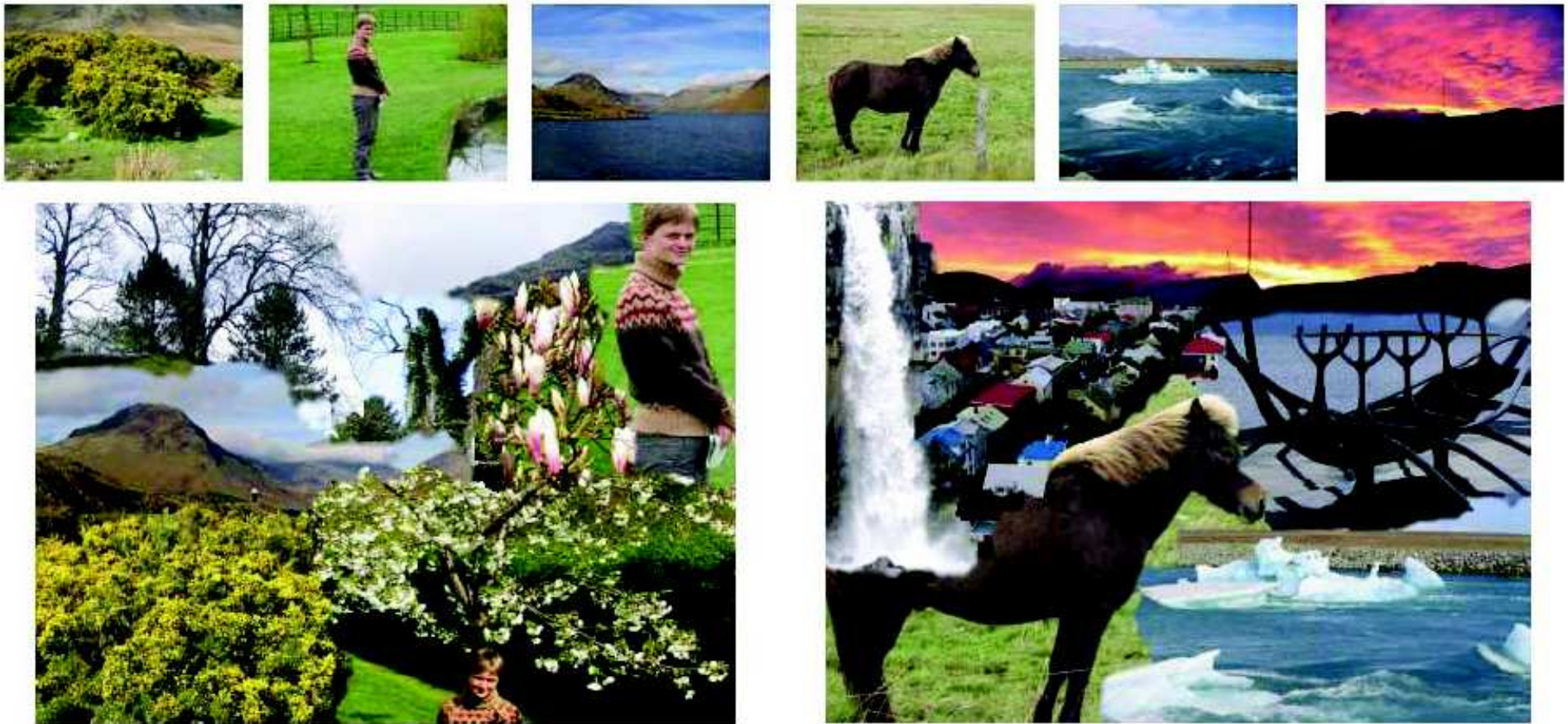
bruit impulsif + TV



Illustrations - détourage (Rother, Kolmogorov et Blake, 2004)



Illustrations - digital tapestry (Rother et al. 2005)



Illustrations - inpainting (Allène, Paragios, 2006)



Champs de Markov et optimisation par coupes minimales (graphcuts)

- Analyse bayésienne et modèles markoviens
- Optimisation

Notations

- **modèle probabiliste de l'image**

$S = \{s\} \subset \mathbf{Z}^d$ ensemble de sites (fini)

$x_s \in E$ espace des niveaux de gris

($E = \{0..255\} \{0..q - 1\}$ (système de labels) \mathbf{R})

X_s variable aléatoire associée à s

$X = \{X_s\}_{s \in S}$ champ aléatoire

$x = \{x_s\}_{s \in S} = \{x_s\} \cup x^s$ configuration (image)

$\Omega = E^{|S|}$ espace des configurations

- **probabilités :**

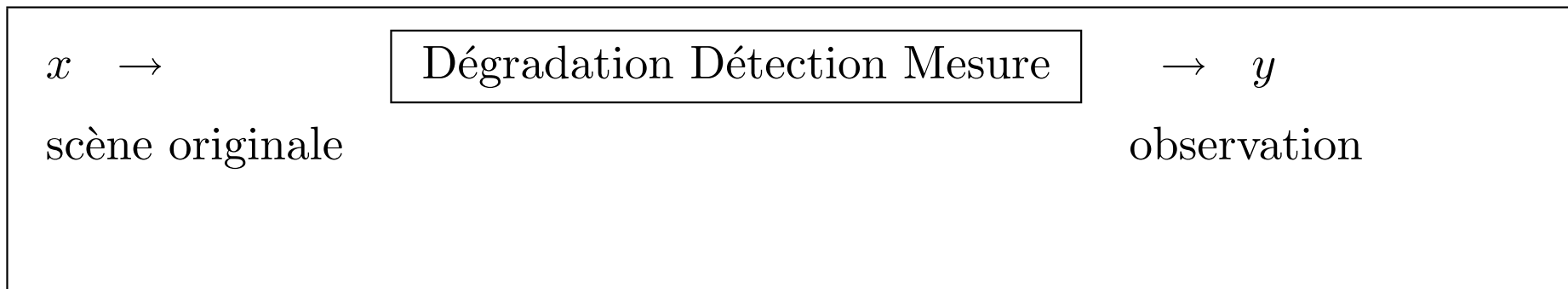
$P(X_s = x_s)$ probabilité locale

$P(X = x) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2 \dots X_s = x_s \dots)$ loi globale (jointe)

$P(X_s = x_s | X_t = x_t, t \neq s)$ probabilité conditionnelle (locale)

Analyse Bayésienne en Traitement des Images

Loi du processus de formation des observations



- Critère MAP (Maximum A Posteriori)

$$P(X|Y) \propto P(Y|X)P(X)$$

- $P(Y|X)$: terme de vraisemblance (“attache aux données”)
- $P(X)$: terme a priori, choix d’un modèle pour la solution

Expression énergétique

- Loi du processus de formation des observations

$$P(Y = y|X = x) = \prod_{s \in S} P(Y_s = y_s|x) = \prod_{s \in S} P(Y_s = y_s|X_s = x_s)$$

- **Modèle a priori : propriétés désirées sur l'image réelle** \Rightarrow interaction entre un site et ses voisins (régularité des régions, ...) \Rightarrow X est un champ de Markov Théorème de Hammersley-Clifford

$P(X = x) = \frac{\exp -U(x)}{Z}$	distribution de Gibbs
-----------------------------------	-----------------------

$U(x) = \sum_{c \in \mathcal{C}} U_c(x)$	énergie globale
--	-----------------

$U_c(x) = U_c(x_s, s \in c)$	potentiel de cliques
------------------------------	----------------------

Distribution a posteriori

- nouvelle distribution de Gibbs

$$P(X = x|Y = y) = \frac{\exp -\mathcal{U}(x|y)}{Z'}$$

$$\mathcal{U}(x|y) = \sum_{s \in S} -\ln(P(Y_s = y_s|X_s)) + U(x)$$

$$\mathcal{U}(x|y) = \sum_{s \in S} V_c(y_s|x_s) + \sum_{\{s,t\}} V_c(x_s, x_t)$$

$$\max_{x \in \Omega} \Pr(X = x|Y = y) \Leftrightarrow \min_{x \in \Omega} \mathcal{U}(x|y)$$

Exemples de modèles markoviens

○ Segmentation

Modèle d'Ising : champ binaire ($E = \{0, 1\}$)

Modèle de Potts : champ avec plusieurs classes ($E = \{0, \dots, K\}$)

$$V_c(x_s, x_t) = \beta \delta(x_s \neq x_t)$$

○ Restauration

$$V_c(x_s, x_t) = \phi(x_s - x_t)$$

– modèle gaussien (quadratique)

$$\phi(u) = u^2$$

– Geman et Mac Clure 85

$$\phi(u) = \frac{u^2}{1 + u^2}$$

– Hebert et Leahy 89

$$\phi(u) = \log(1 + u^2)$$

– Charbonnier 94

$$\phi(u) = 2\sqrt{1 + u^2} - 2$$

– modèle TV (Variation Totale)

$$\phi(u) = |u|$$

Champs de Markov et optimisation par coupes minimales (graphcuts)

- Analyse bayésienne et modèles markoviens
- Optimisation

Méthodes d'optimisation

○ Difficultés

Espace Ω des configurations énorme : $Card(\Lambda)^{(np \times nl)}$!

○ Méthodes

- Recuit simulé (Geman et Geman 84) : algorithme stochastique itératif, solution minimum global, mais lent
- ICM (Iterated Conditional Modes) : minimum local, très rapide
- Recherche de la coupe de capacité minimale : rapide et minimum global !
mais pour certaines énergies ...

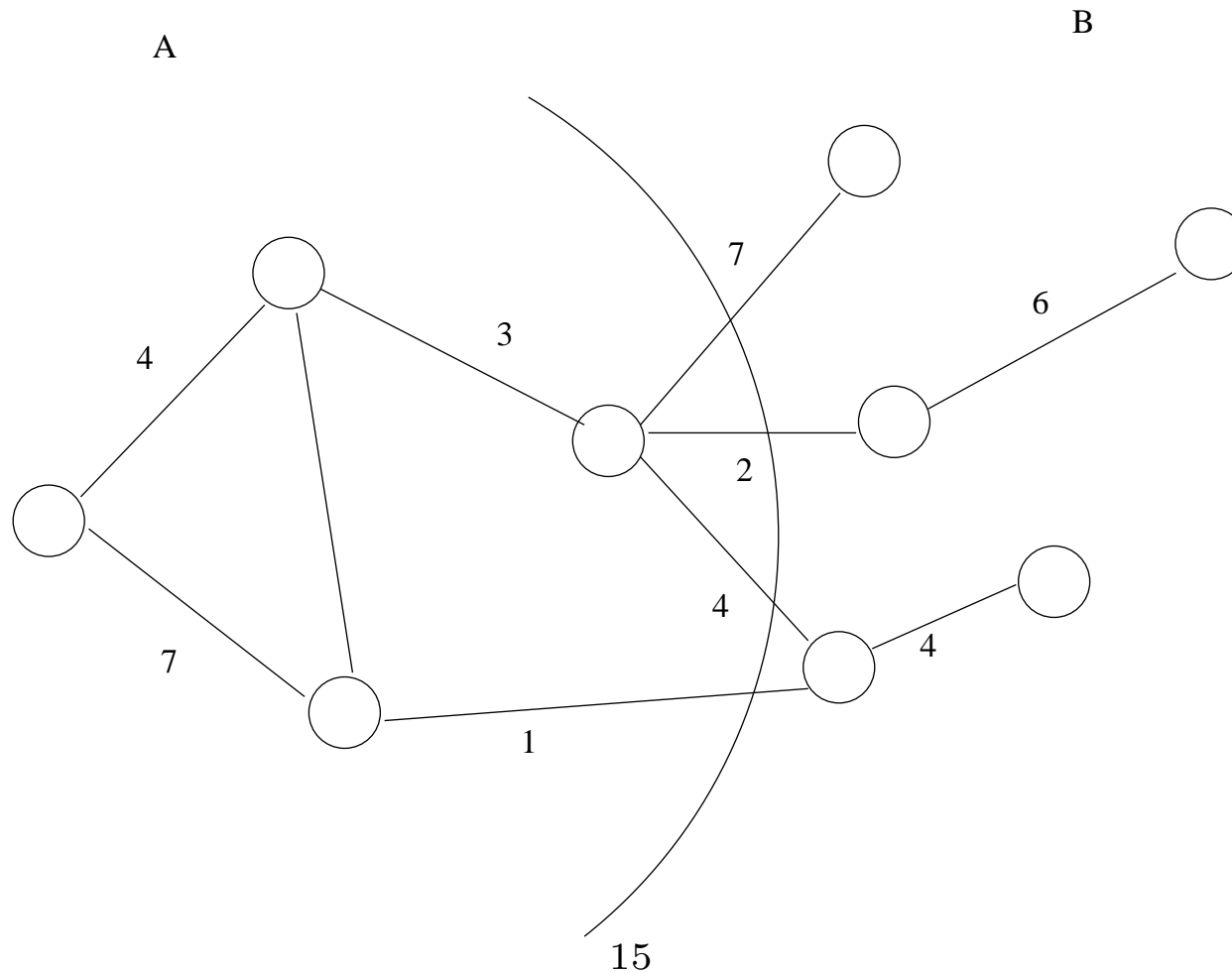
Méthodes d'optimisation par coupures minimales

- Introduction - rappels sur les graphes
- Cas binaire
- Algorithmes approchés
- Algorithmes exacts

Théorie des graphes et coupes

○ Coupe d'un graphe

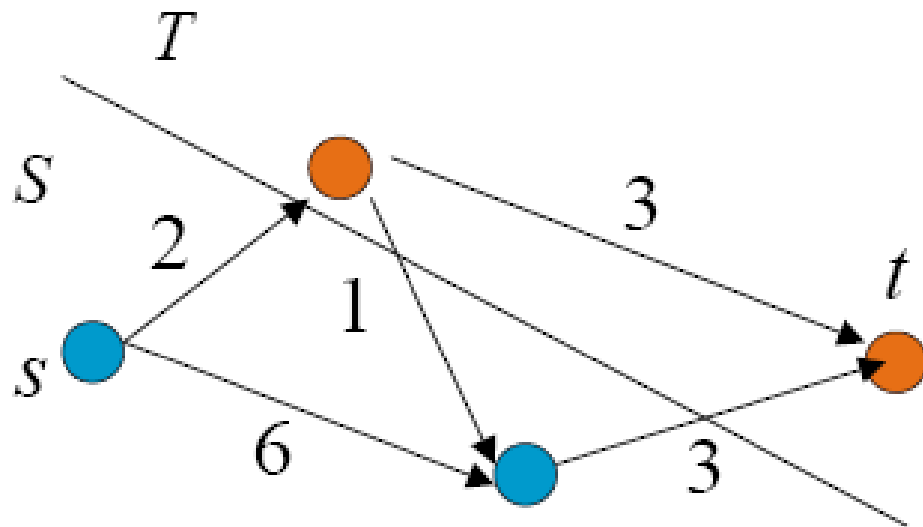
- graphe $G = (X, E)$
- partition en 2 parties A et B ($A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$)
- $cut(A, B) = \sum_{x \in A, y \in B} w(x, y)$



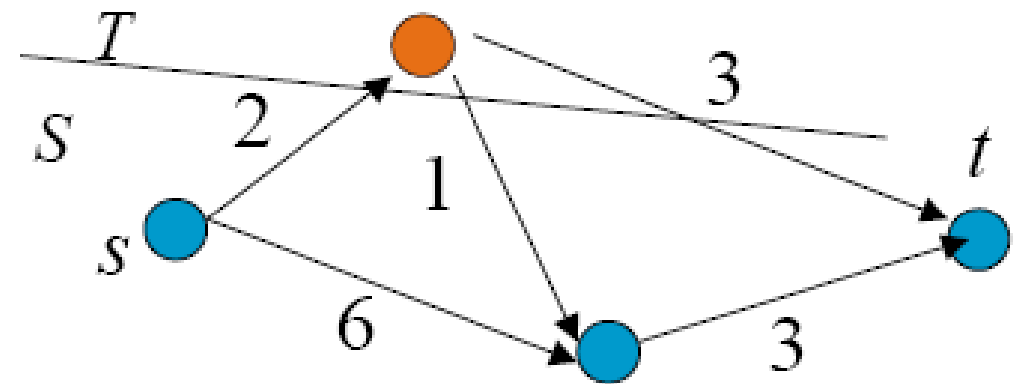
Théorie des graphes et coupes

- o Coupe d'un graphe avec nœuds terminaux

- ajout de deux nœuds : source s , puits t
- partition en 2 parties S et T , l'une contenant la source et l'autre le puits :
st-coupe
- $cut(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} w(x, y)$



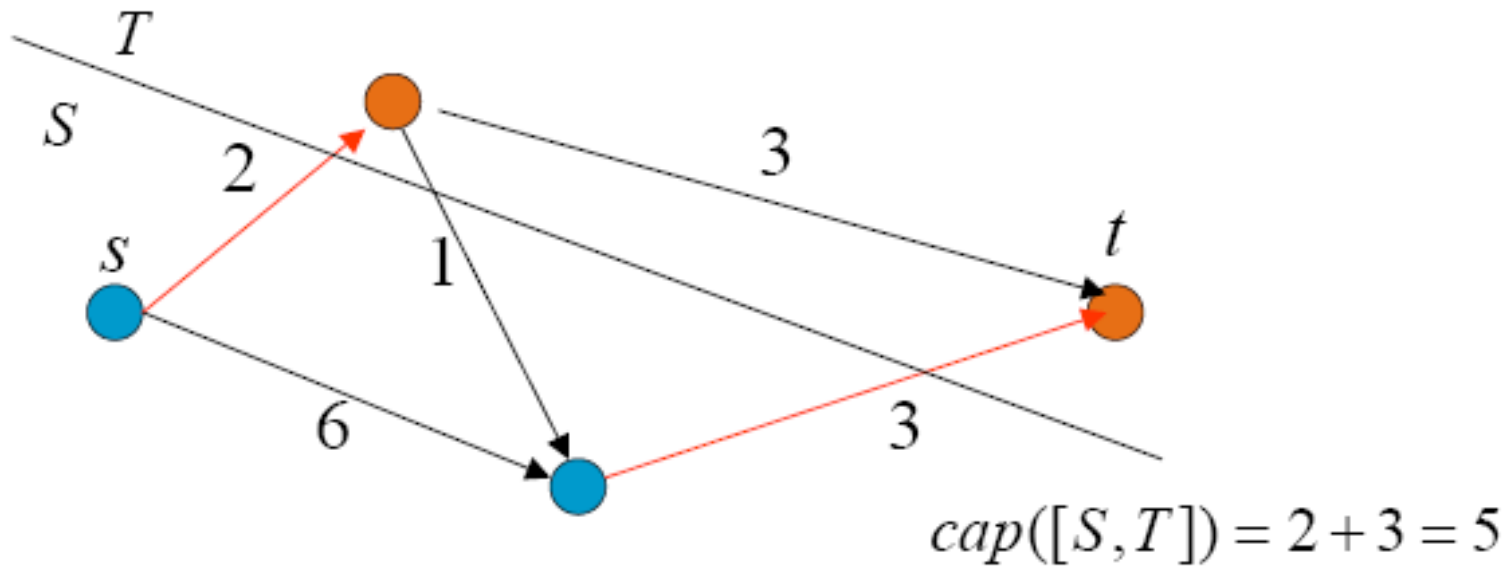
s-t cut



not a s-t cut

- **Coupe de capacité minimale**

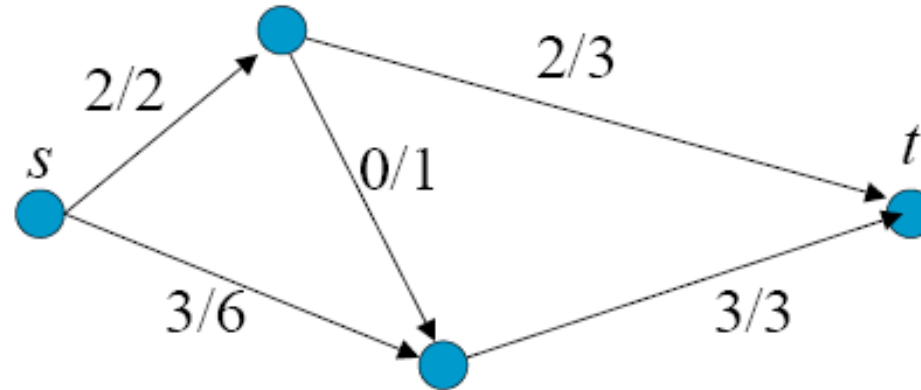
Parmi toutes les coupes séparant les nœuds terminaux celle de coût minimal



Théorie des graphes et coupes

○ Flot

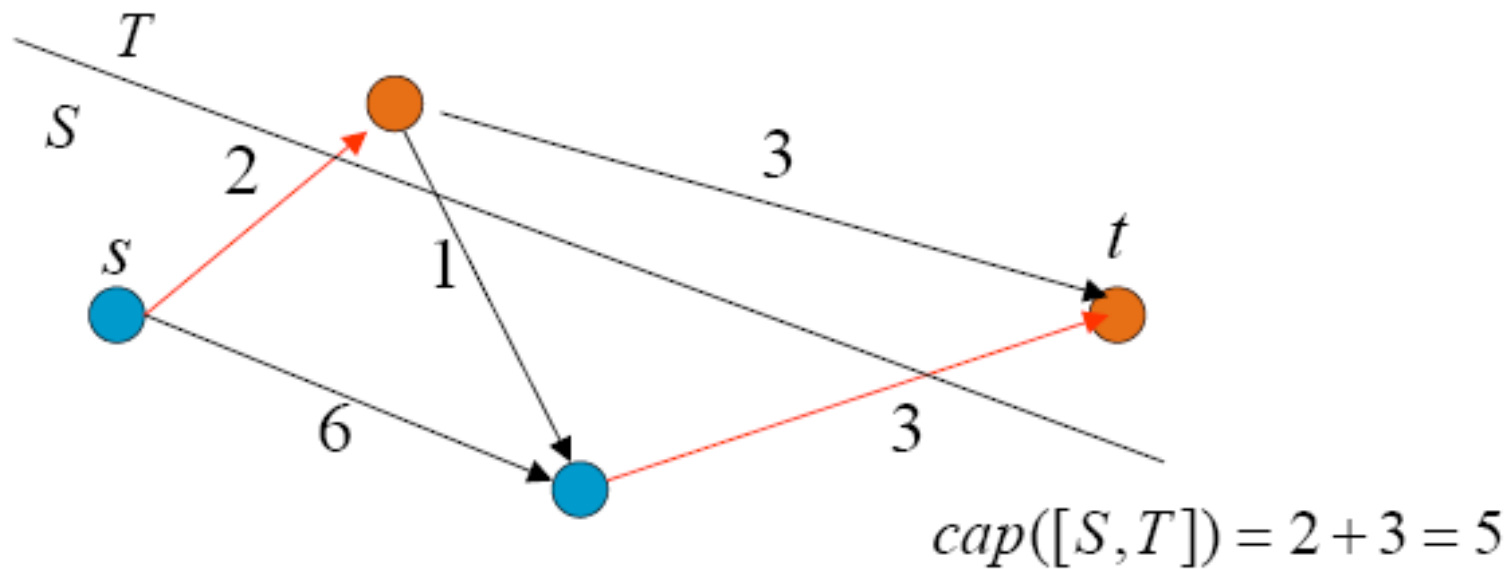
- $\text{flot}(p,q) \leq w(p,q)$
- en un nœud : flot entrant = flot sortant
- recherche du flot max entre s et t pour des capa données



An example of flow

○ **MinCut = MaxFlow**

- flot maximum = coupe de capacité minimale
- valeur du flot = coût de la coupe



Théorie des graphes et coupes

- **Algorithme de Ford et Fulkerson (62)**

notion de graphe résiduel et recherche de plus court chemin

algorithme en $O(nmc_{max})$ (n nombre de sommets, m nombre d'arcs et c_{max} capacité maximale des arcs)

- **Algorithme “Push - relabel” (Goldberg et Trajan)**

ne respecte plus flot entrant = flot sortant

algorithme en $O(n^3)$ ou $O(n^2\sqrt{m})$

Théorie des graphes et coupes

- **Algorithme spécifique TdI (Boykov et Kolmogorov)**

- construction de deux arbres, l'un partant de chaque nœud terminal
- rencontre des arbres : existence d'une chaîne augmentante
- mise à jour du graphe résiduel et itération

en pratique : beaucoup plus adapté aux graphes creux du traitement d'images !

<http://www.adastral.ucl.ac.uk/~vladkolm/software.html>

Méthodes d'optimisation par coupures minimales

- Introduction - rappels sur les graphes
- Cas binaire
- Algorithmes approchés
- Algorithmes exacts

Cas binaire - modèle d'Ising (Greig et al. 89)

◦ Modèle d'Ising

deux étiquettes 0 (noir) et 1 (blanc)

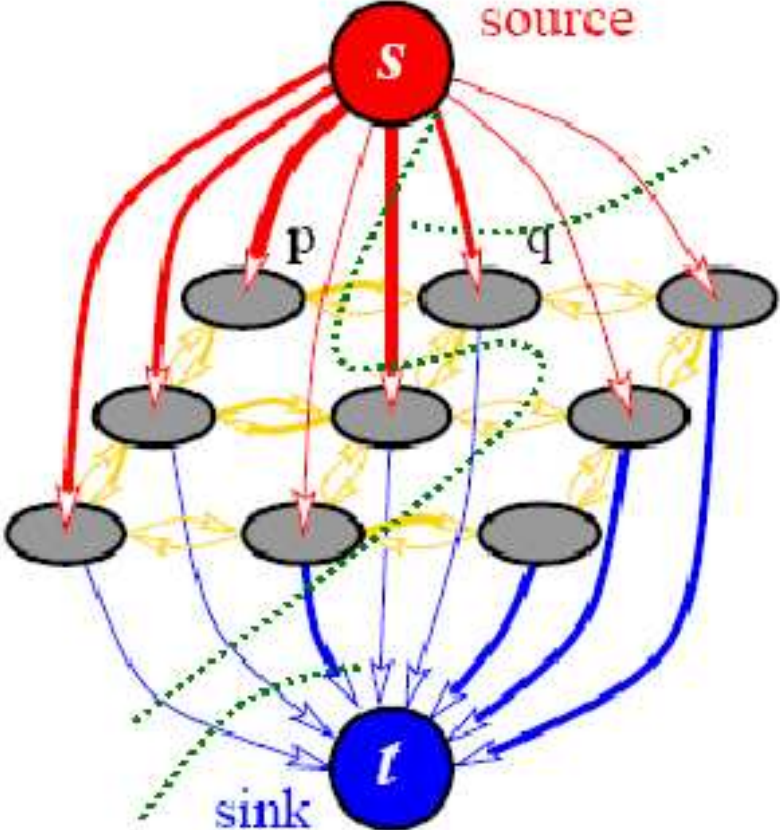
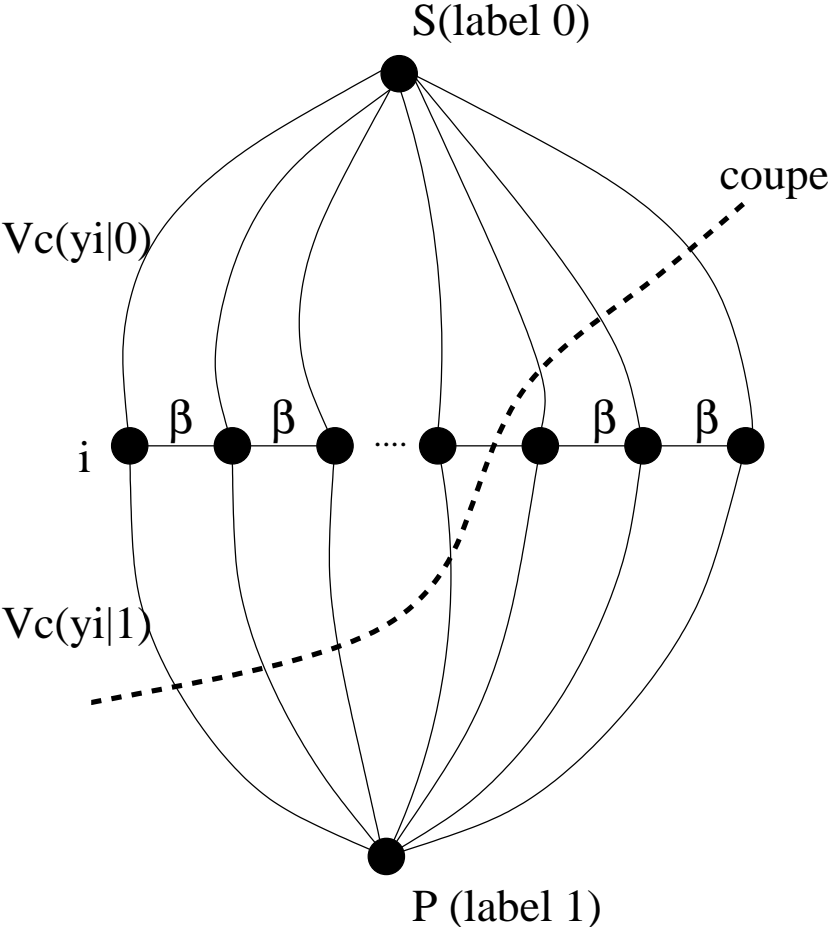
énergie :

$$U(x|y) = \sum_s V_c(y_s|x_s) + \sum_{(s,t)} \beta \delta(x_s \neq x_t)$$

◦ Création du graphe

- noeuds = tous les pixels p de l'image
- ajout de deux noeuds terminaux (source : label 0, puits : label 1)
- arcs :
 1. lien avec la source de poids : $w(p, s) = V_c(y_p|0)$
 2. lien avec le puits de poids : $w(p, t) = V_c(y_p|1)$
 3. si deux pixels p et q sont voisins en 4 connexité : arc de poids $w(p, q) = \beta$

Cas binaire 1D et 2D (Greig et al. 89)



Cas binaire - modèle d'Ising (Greig et al. 89)

- Calcul du coût d'une coupe

S l'ensemble des pixels liés à la source

T ensemble des pixels liés au puits

capacité de la coupe :

$$C(S, T) = \sum_{p \in S} V_c(y_p|1) + \sum_{p \in T} V_c(y_p|0) + \sum_{(s \in S, t \in T)} \beta$$

$\Rightarrow C(S, T) = U(x|y)$ pour un étiquetage x défini par

– si $p \in S$: $x_p = 1$

– si $p \in T$: $x_p = 0$

Cas binaire : généralisation (Kolmogorov et Zabih, 2004)

- Formulation de l'énergie

$$U(x|y) = \sum_s V_c(y_s|x_s) + \sum_{(s,t)} V_c(x_s, x_t)$$

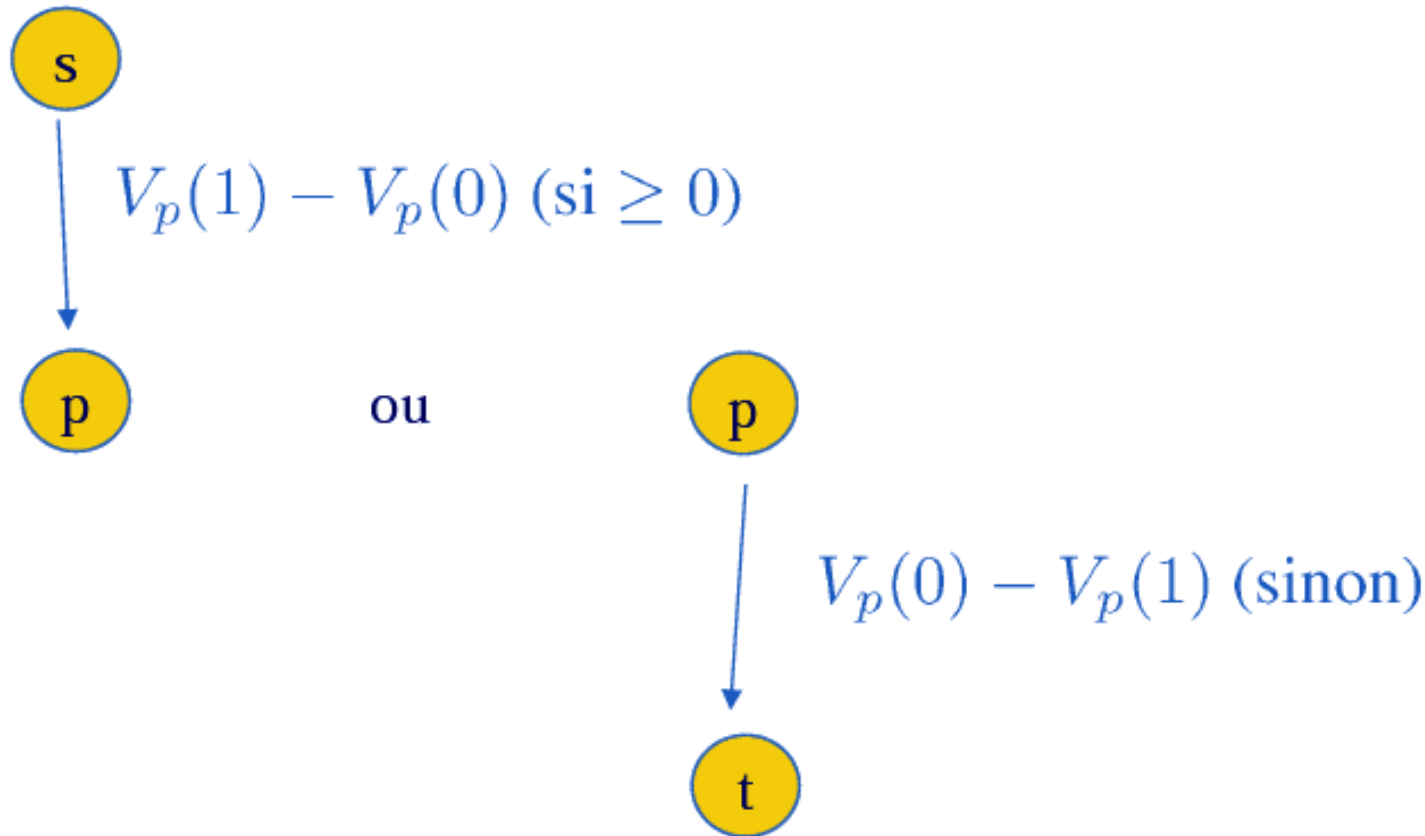
- Condition pour que l'énergie soit graphe-représentable

$$V_c(0,0) + V_c(1,1) \leq V_c(0,1) + V_c(1,0)$$

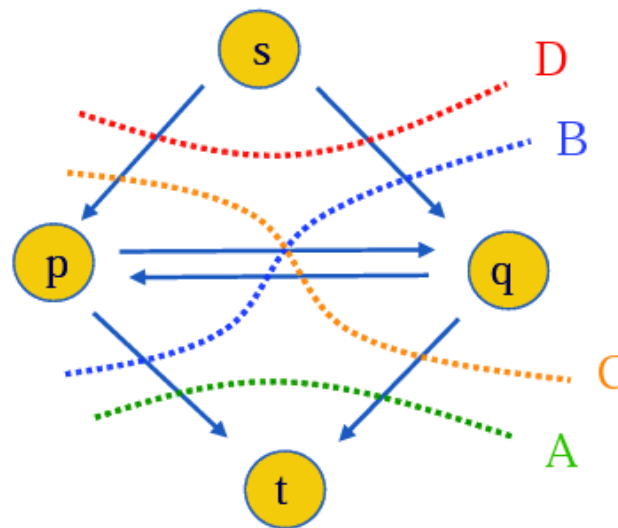
V_c fonctions “sous-modulaires”

Construction du graphe (Kolmogorov et Zabih, 2004)

(si $p \in S$ $x_p = 0$)



Construction du graphe (Kolmogorov et Zabih, 2004)

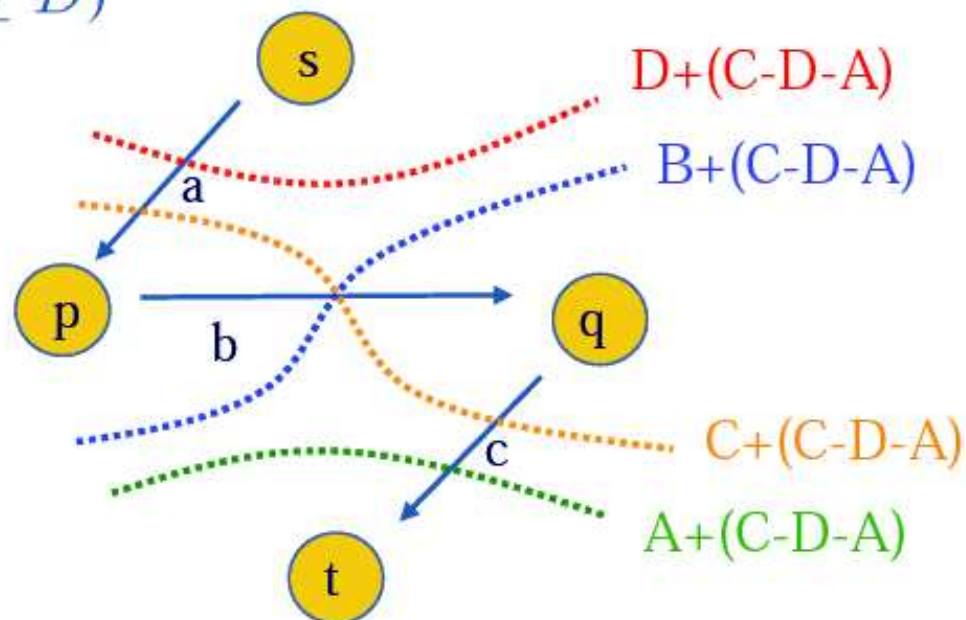


$$A = V(0, 0), B = V(0, 1), C = V(1, 0), D = V(1, 1)$$

\Rightarrow Arcs ?

Construction du graphe (Kolmogorov et Zabih, 2004)

(Cas $C \geq A$ et $C \geq D$)



$$a = C - A, b = B + C - D - A, c = C - D$$

On a bien $b \geq 0$ car

$$V(0,0) + V(1,1) \leq V(0,1) + V(1,0)$$

soit

$$A + D \leq B + C$$

Méthodes d'optimisation par coupures minimales

- Introduction - rappels sur les graphes
- Cas binaire
- Algorithmes approchés
- Algorithmes exacts

Extension au cas de la classification (Boykov et al, 2001)

$$U(x|y) = \sum_p V_c(y_p|x_p) + \sum_{(p,q)} V_c(x_p, x_q)$$

$x_p \in E$ ensemble monodimensionnel fini

- **Idée** : se ramener au cas ... binaire!
- **Contraintes sur la fonction de régularisation**

V_c est une métrique ou une semi-métrique

Semi-métrique $\forall \alpha, \beta \in E^2$:

- $V_c(\alpha, \beta) = V_c(\beta, \alpha) \geq 0$
- $V_c(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

Métrique si en plus $V_c(\alpha, \beta) \leq V_c(\alpha, \gamma) + V_c(\gamma, \beta)$

Exemples : quadratique tronquée (semi-), modèle de Potts, norme tronquée

- **Limites**

solution approchée (minimum local)

Extension au cas de la classification : $\alpha - \beta$ swap

○ Définition de l' $\alpha - \beta$ swap

- étiquetage = partition de l'image $\mathbf{P} = \{P_l | l \in E\}$ avec $P_l = \{p \in I | x_p = l\}$
- $\alpha - \beta$ swap : mouvement d'une partition \mathbf{P} à une partition \mathbf{P}' telle que $P_l = P'_l \forall l \neq \alpha, \beta$ (certains pixels étiquetés α sont étiquetés β et vice-versa)

○ Optimisation de l' $\alpha - \beta$ swap par coupe minimale

- construction d'un graphe à partir des seuls pixels étiquetés α ou β ($S_{\alpha\beta}$)
- ajout de deux nœuds terminaux l'un pour α , l'autre pour β
- arcs :

1. lien avec le nœud α de poids :

$$w(p, \alpha) = V_c(y_p | \alpha) + \sum_{q | q \in N_p, q \notin S_{\alpha\beta}} V_c(\alpha, x_q)$$

2. lien avec le nœud β de poids :

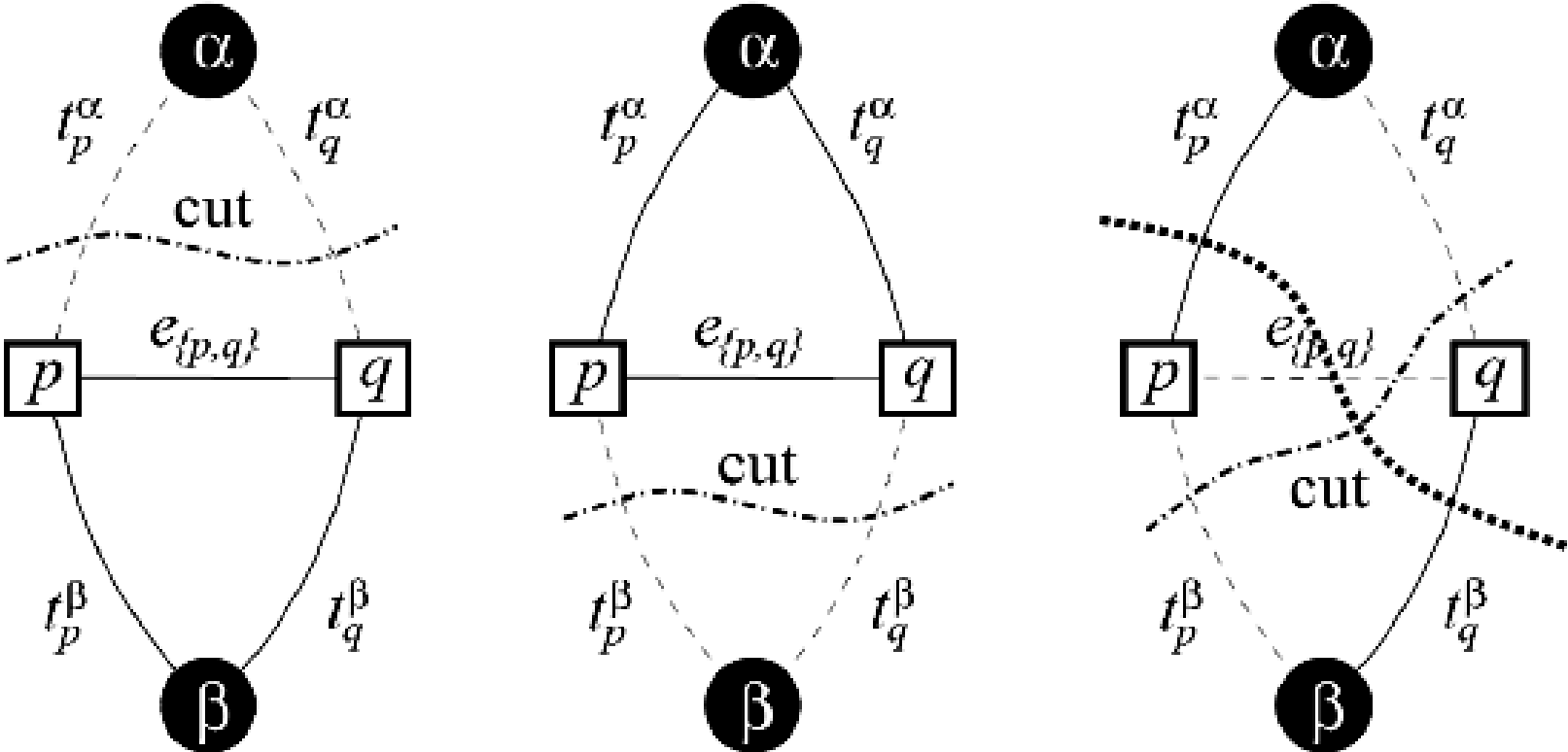
$$w(p, \beta) = V_c(y_p | \beta) + \sum_{q | q \in N_p, q \notin S_{\alpha\beta}} V_c(\beta, x_q)$$

3. si deux pixels p et q sont voisins en 4 connexité et dans $S_{\alpha\beta}$: arc de poids

$$w(p, q) = V_c(\alpha, \beta)$$

- l'étiquette finale d'un pixel correspond au lien coupé

Extension au cas de la classification : $\alpha - \beta$ -swap



Extension au cas de la classification : α -expansion

○ Définition de l' α expansion

● α -extension : mouvement d'une partition \mathbf{P} à une partition \mathbf{P}' telle que les pixels étiquetés à α le restent et d'autres peuvent prendre l'étiquette α

○ Optimisation de l' α -expansion par coupe minimale (V_c doit être une métrique)

- construction d'un graphe à partir de tous les pixels
- ajout de deux nœuds terminaux l'un pour α , l'autre pour $\bar{\alpha}$
- l'étiquette finale d'un pixel correspond au lien coupé

Extension au cas de la classification : α -expansion

- Optimisable par graph-cut

α label 0

$\bar{\alpha}$ label 1 (pixel p garde le label $x_p = \bar{\alpha}(p)$, pixel q garde le label $x_q = \bar{\alpha}(q)$)

Condition de sous modularité :

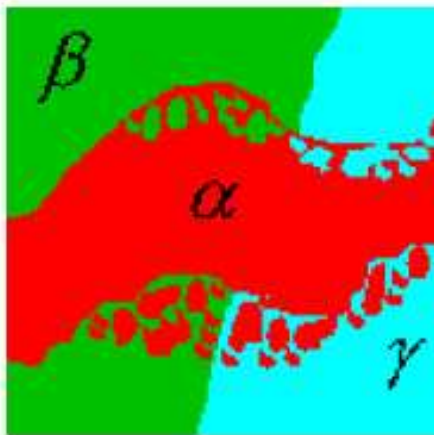
$$V_c(0, 0) + V_c(1, 1) \leq V_c(0, 1) + V_c(1, 0)$$

$$\Rightarrow V_c(\alpha, \alpha) + V_c(\bar{\alpha}(p), \bar{\alpha}(q)) \leq V_c(\alpha, \bar{\alpha}(p)) + V_c(\bar{\alpha}(q), \alpha)$$

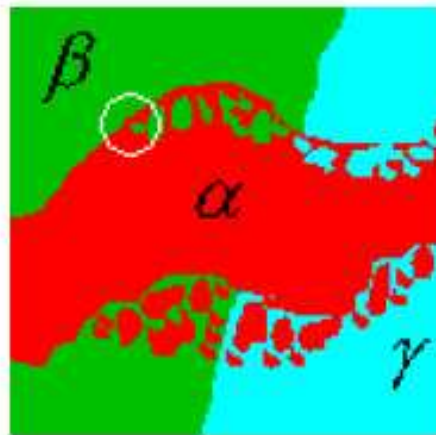
$$\Rightarrow 0 + V_c(x_p, x_q) \leq V_c(\alpha, x_p) + V_c(x_q, \alpha)$$

vérifié car V_c est une métrique!

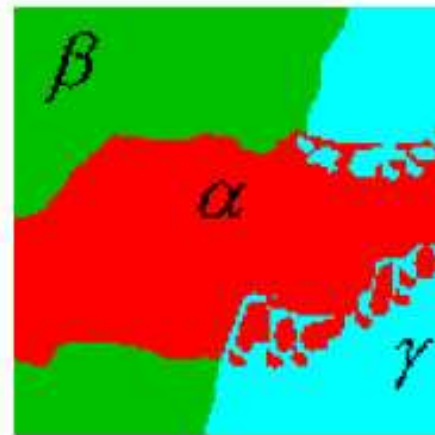
Illustrations (Boykov et al. PAMI 2001)



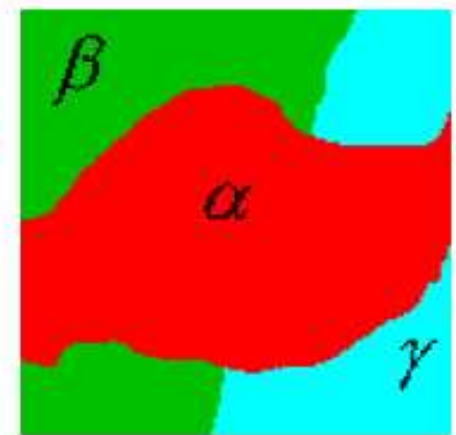
(a) initial labeling



(b) standard move



(c) α - β -swap



(d) α -expansion

Résultats

○ Algorithmes

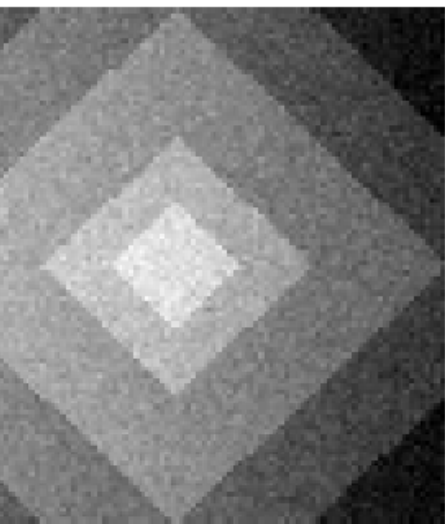
- $\alpha - \beta$ swap : énergie semi-métrique
- α -extension : énergie métrique

○ Performances

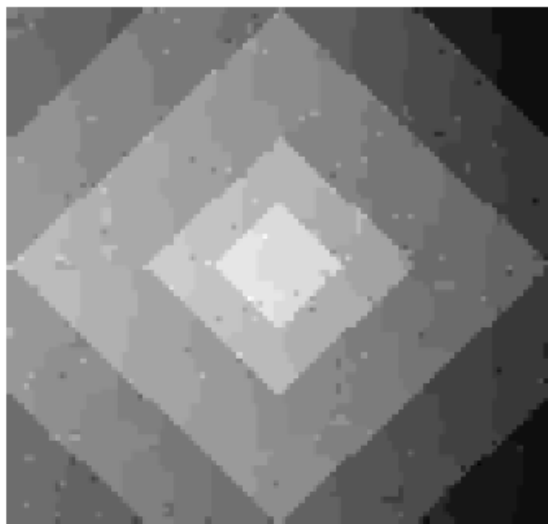
- converge vers un minimum local (plusieurs itérations)
- beaucoup plus rapide qu'un recuit simulé
- permet des mouvements beaucoup plus importants dans le paysage énergétique
- résultats théoriques sur la distance au minimum global

Illustrations (Boykov et al. PAMI 2001)

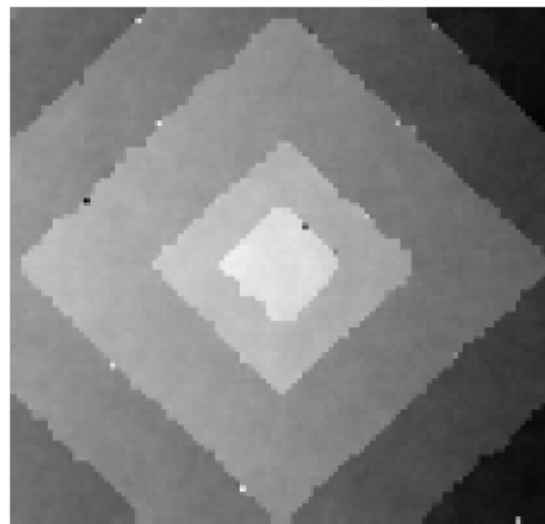
(E_2 Potts, E_1 quadratique tronquée)



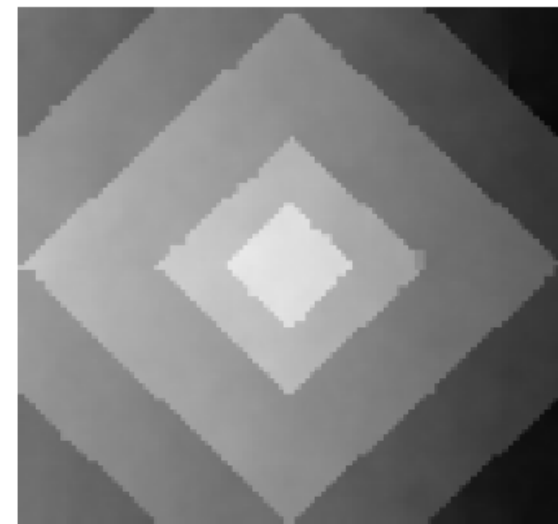
Diamond image (input)



Our method (E_2)



Annealing (E_1)



Our method (E_1)

Cas de la segmentation interactive : contraintes “hard”

○ Principe

L'utilisateur définit manuellement ce qui appartient à l'objet et au fond

⇒ minimisation de l'énergie d'une classification binaire avec contraintes “hard”
(= pixels qui ne peuvent changer de classe)

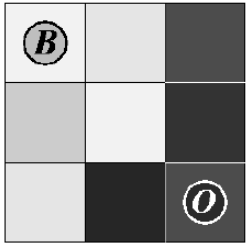
○ Méthode

Recherche de la coupe de capacité minimale avec des poids très élevés sur certains liens pour garantir qu'ils n'appartiendront pas à la coupe

○ Avantages

- permettent de bien gérer des contraintes difficiles à introduire dans un recuit simulé
- les zones définies permettent de faire l'apprentissage de l'attache aux données également
- algorithme très rapide si de nouvelles marques sont introduites

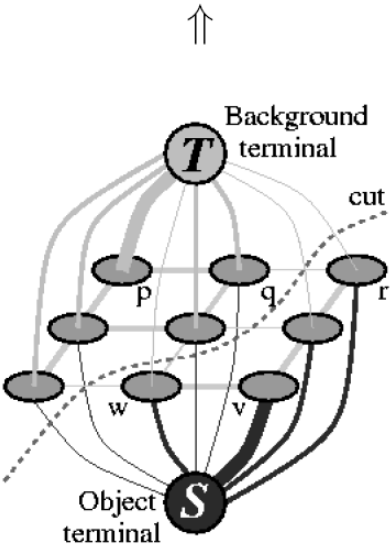
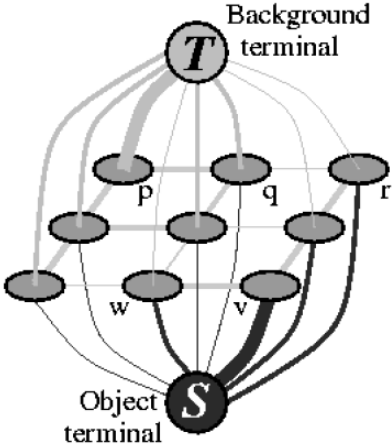
Construction du graphe (Boykov et Jolly, 2001)



(a) Image with seeds.



(d) Segmentation results.



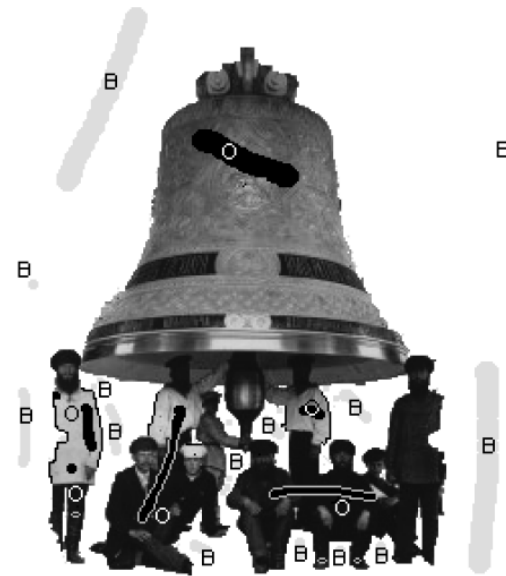
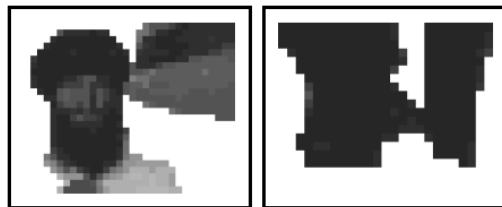
Poids du graphe (Boykov et Jolly, 2001)

edge	weight (cost)	for
$\{p, q\}$	$B_{\{p,q\}}$	$\{p, q\} \in \mathcal{N}$
$\{p, S\}$	$\lambda \cdot R_p(\text{"bkg"})$	$p \in \mathcal{P}, p \notin \mathcal{O} \cup \mathcal{B}$
	K	$p \in \mathcal{O}$
	0	$p \in \mathcal{B}$
$\{p, T\}$	$\lambda \cdot R_p(\text{"obj"})$	$p \in \mathcal{P}, p \notin \mathcal{O} \cup \mathcal{B}$
	0	$p \in \mathcal{O}$
	K	$p \in \mathcal{B}$

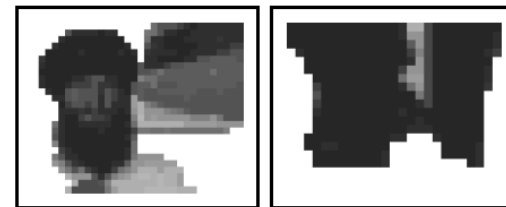
Illustrations (Boykov et Jolly, 2001)



(a) Original B&W photo



(b) Segmentation results

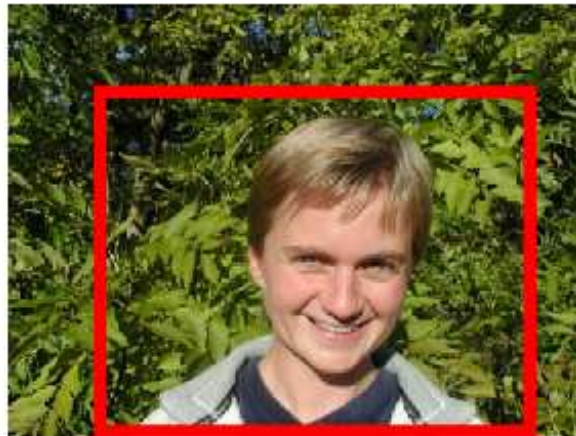


Méthodes interactives par coupes minimales

- **Grab-cut (Rother et al. 2004)**

- prise en compte de la couleur
- deux classes pour l'objet et le fond mais avec des mélanges de gaussiennes (plusieurs composantes du fond et de l'objet)
- terme de régularisation pondéré par le gradient entre pixels voisins
- apprentissage des paramètres des distributions de façon semi-supervisée : initialisation par l'utilisateur (définition du fond), puis itérativement après chaque optimisation par graph-cut

Illustrations -GrabCut- (Rother, Kolmogorov et Blake, 2004)



Méthodes d'optimisation par coupures minimales

- Introduction
- Cas binaire
- Algorithmes approchés
- Algorithmes exacts

Cas de la restauration

○ Formulation énergétique

$$U(x|y) = \sum_p f(y_p|x_p) + \sum_{(p,q)} g(x_p - x_q)$$

attache aux données + régularisation

○ Choix de la fonction de régularisation

- quadratique $(x_p - x_q)^2$
- quadratique tronquée $\min((x_p - x_q)^2, k)$
- Phi-fonction (conditions sur les dérivées)
- variation totale (domaine continu $\int_{\Omega} |\nabla x|$)

Cas de la restauration - solution exacte (Ishikawa 2003)

V ensemble des pixels, L ensemble des étiquettes

○ Hypothèses sur g

g est une fonction **convexe** (sur les entiers)

○ Méthode

● Construction du graphe

- nœuds : $X = V \times L \cup \{s, t\}$ (u_{pi} nœud du pixel p pour le label i) ;
- arcs : de s à tous les nœuds pixels-premier label, puis de tous les pixels-label i aux pixels-label $i+1$, etc.
- poids des arcs “en colonnes” : $c(s, u_{p1}) = +\infty$, $c(u_{pi}, u_{pi+1}) = f(y_p|i)$,
 $c(u_{pk}, t) = f(y_p|k)$ ($c(u_{pi+1}, u_{pi}) = +\infty$ pour empêcher les boucles)

Cas de la restauration - solution exacte (Ishikawa 2003)

Terme de régularisation : arcs de pénalité

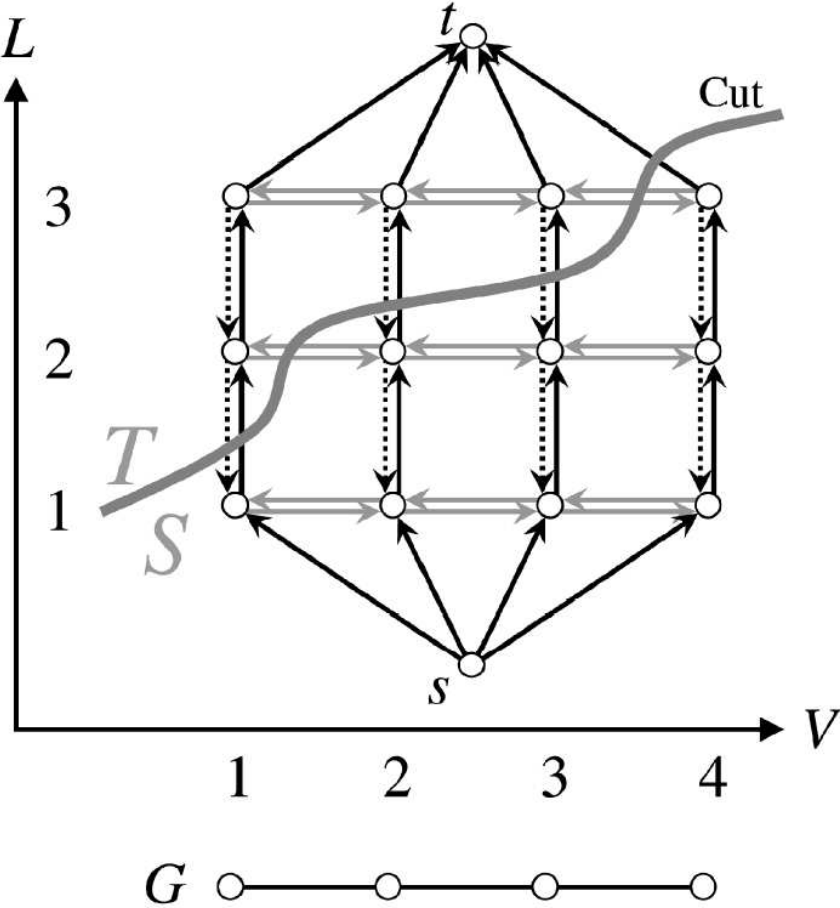
- Cas simplifié pour le modèle TV :

arcs de coût 0 sauf arcs “horizontaux” de coût 1 $\Rightarrow g(x_p - x_q) = |x_p - x_q|$

- Cas général :

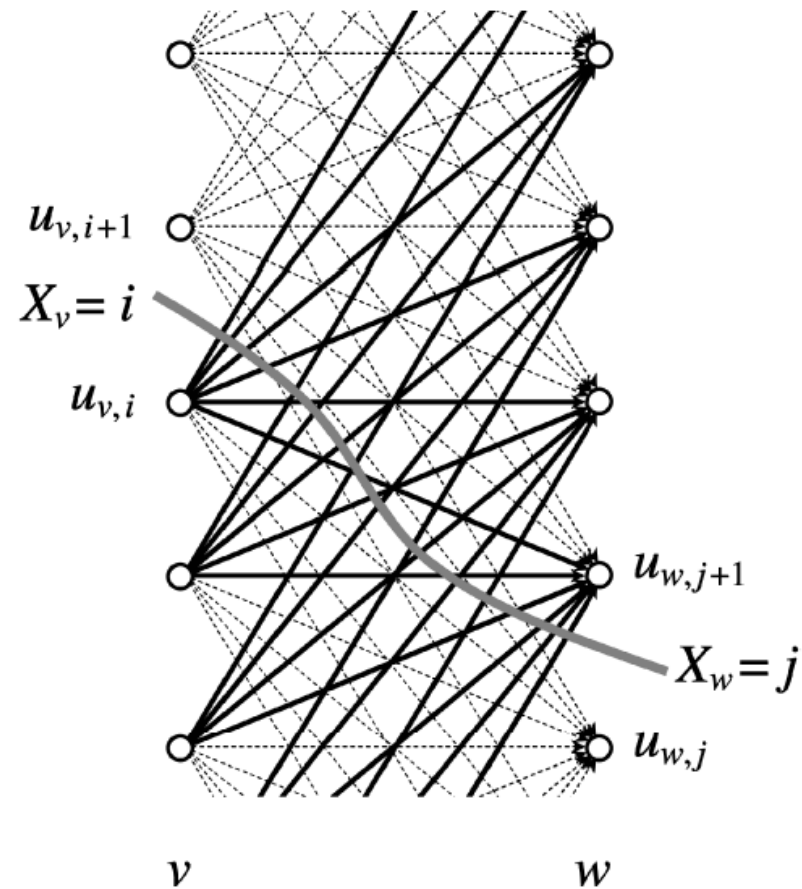
ensemble d’arcs liant les nœuds pixels -labels coupés par la coupe

Cas de la restauration - solution exacte (Ishikawa 2003)



Cas de la restauration - solution exacte (Ishikawa 2003)

- Cas général



Cas de la restauration - solution exacte (Ishikawa 2003)

- Terme de pénalité intervenant dans la coupe :

$$g(i, j) = \sum_{a=1}^i \sum_{b=j+1}^k c(u_{va}, u_{wb}) + \sum_{a=i+1}^k \sum_{b=1}^j c(u_{wb}, u_{va})$$

- **Proposition** : si $g(i, j)$ définie comme la somme des capacités des pixels adjacents ne dépend que de $i - j$, $g(i, j) = \tilde{g}(i - j)$ alors \tilde{g} est nécessairement convexe.

Réciproquement si g est convexe alors on peut définir les capacités des arcs de pénalités par :

$$c(u_{vi}, u_{wj}) = \frac{\tilde{g}(i - j + 1) - 2\tilde{g}(i - j) + \tilde{g}(i - j - 1)}{2}$$

la capacité devient nulle pour des différences de labels suffisamment grandes

NB : pas de contrainte sur le terme d'attache aux données

Cas de la restauration - solution exacte (Darbon, Sigelle 2006)

$$U(x|y) = \sum_p f(y_p|x_p) + \sum_{(p,q)} w_{pq}|x_p - x_q|$$

○ Principe

Décomposition de x sur ses ensembles de niveaux (versions seuillées de x)

⇒ reformulation sous forme de champs de Markov binaires

⇒ formule de reconstruction sous certaines hypothèses

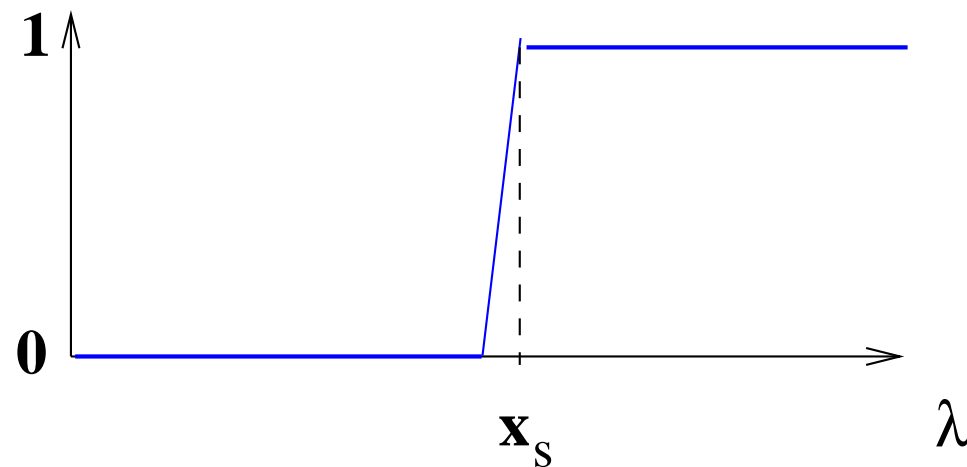
Décomposition en ensembles de niveaux

- Définitions

$$x_s^\lambda = \mathbb{1}_{x_s \leq \lambda}$$

$$x_s = \min\{\lambda / x_s^\lambda = 1\}$$

$x^\lambda = \{x_s^\lambda\}$ coupe de niveau λ



Décomposition en ensembles de niveaux

- Reformulation de l'énergie en fonction des coupes

- Terme de régularisation :

$$TV(x) = \sum_{\lambda=0}^{L-2} \sum_{(s,t)} w_{st} |x_s^\lambda - x_t^\lambda|$$

$$TV(x) = \sum_{\lambda=0}^{L-2} \sum_{(s,t)} w_{st} [(1 - 2x_t^\lambda) x_s^\lambda + x_t^\lambda]$$

- Terme d'attache aux données :

$$f(y_s|x_s) = g_s(x_s) = \sum_{\lambda=0}^{L-2} (g_s(\lambda + 1) - g_s(\lambda)) \underbrace{\mathbb{1}_{\lambda < x_s}}_{(1-x_s^\lambda)} + g_s(0)$$

Décomposition en ensembles de niveaux

- Reformulation de l'énergie en fonction des coupes

$$U(x|y) = \sum_{\lambda=0}^{L-2} E^\lambda(x^\lambda)$$

$$E^\lambda(x^\lambda) = \sum_{(s,t)} w_{st} [(1 - 2x_t^\lambda)x_s^\lambda + x_t^\lambda] + \sum_s (g_s(\lambda + 1) - g_s(\lambda)) (1 - x_s^\lambda) + g_s(0)$$

Optimisation par ensembles de niveaux

$E^\lambda(x^\lambda)$: champ **binaire** avec modèle d'Ising (ferro-magnétisme)

Soit \hat{x}^λ le minimiseur global de $E^\lambda(x^\lambda)$ à λ fixé

Pour que $\{\hat{x}^\lambda\}_{0 \leq \lambda \leq L-1}$ donne le minimum global de $U(x|y)$ il faut que :

$$\hat{x}^\lambda \leq \hat{x}^\mu \quad \forall \lambda < \mu$$

La solution optimale est alors donnée par :

$$\forall s \quad \hat{x}_s = \min\{\lambda / \hat{x}_s^\lambda = 1\}$$

Conditions sur les énergies et graphes associés

- **Condition de convexité sur les énergies conditionnelles locales**

- propriété de reconstruction assurée par des optimisations séparées sur les ensembles de niveaux
- algorithme très rapide par dichotomie sur l'ensemble des niveaux de gris

- **Attache aux données quelconque et régularisation nivelable**

- propriété de reconstruction assurée par l'ajout d'un terme de couplage entre les niveaux de gris $\sum_s \alpha H(x_s^\lambda - x_s^{\lambda+1})$
- graphe différent de celui d'Ishikawa mais de taille similaire

Exemples de résultats (Darbon, Sigelle)

bruit gaussien (L2+TV)



Exemples de résultats (Darbon, Sigelle)

bruit gaussien (L2+TV)



Exemples de résultats (Darbon, Sigelle)

bruit impulsif + TV



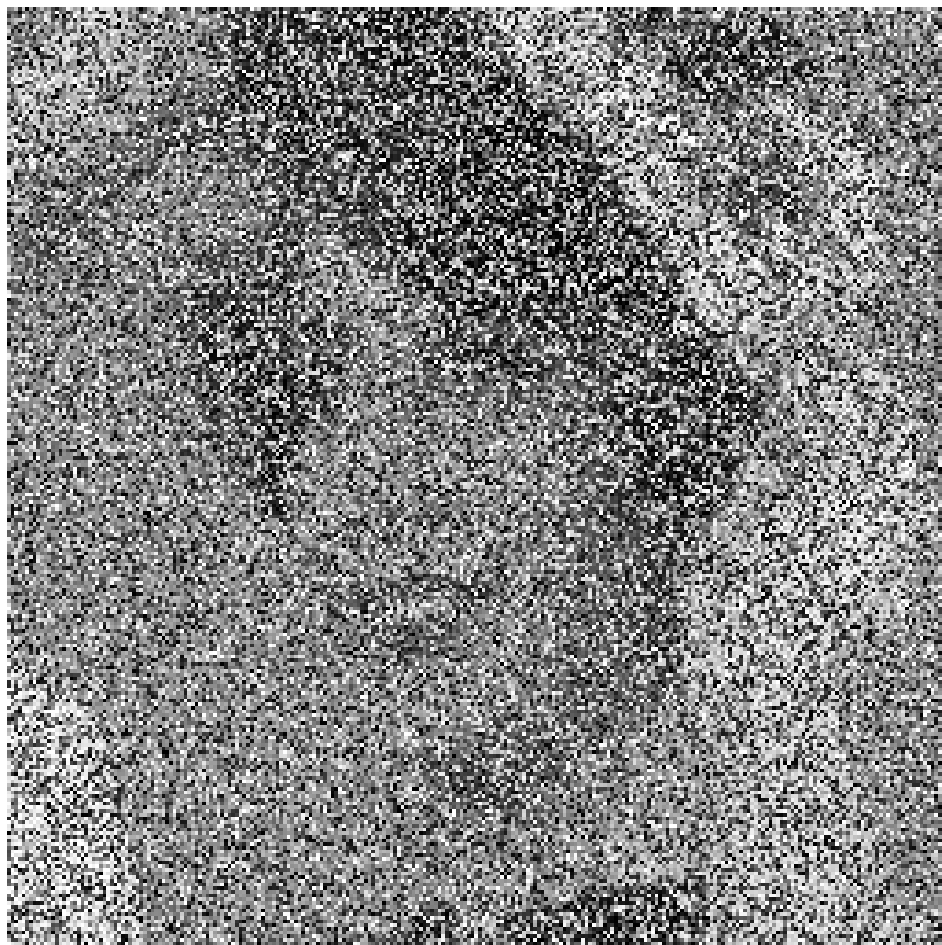
Exemples de résultats (Darbon, Sigelle)

bruit impulsif + TV



Exemples de résultats (Darbon, Sigelle)

bruit impulsif + TV



Récapitulatif

Auteurs	Espace	Régul.	Graphe	Optimum
Greig et al.	binaire	Ising	pixels + s,t	global
Kolmog. Zabih	binaire	sous-modulaires	pixels + s,t	global
Freedman	binaire	ordre 3		
Boykov et al.	ng	semi métrique	ss-ensbl +s,t	local*
		métrique	pixels +s,t	local*
Ishikawa	ng	convexe de $ x_s - x_t $	S*ng+s,t	global
Darbon et al.	ng	en.loc. convexe	dichotomie	global
		nivelable	S*ng+s,t	global

Bibliographies et figures

○ Références

- *Exact Maximum A Posteriori Estimation for Binary Images*, D. Greig, B. Porteous, H. Seheult, J. R. Statist. Soc. B, 1989
- *Fast Approximate Energy Minimization via Graph Cuts*, Y. Boykov, O. Veksler, R. Zabih, PAMI 2001
- *Grab-cut - Interactive Foreground Extraction using Iterated Graph Cut*, C. Rother, V. Kolmogorov, A. Blake, conf. SIGGRAPH 2004
- *What energy functions can be minimized via graph cuts ?*, V. Kolmogorov, R. Zabih, PAMI 2004
- *Exact Optimization for Markov Random Fields with Convex Priors*, Ishikawa, PAMI 2003
- *Image restoration with discrete constrained total variation*, J. Darbon et M. Sigelle, JMIV 2006.

○ Emprunts figures

- Exposé de R. Keriven, Ecole des Ponts, CERTIS, Journée du GdR Isis
- Image restoration with discrete Level Sets, M. Sigelle et J. Darbon, exposé INRIA