

Conception de filtres ondelettes : Application à la compression d'images

Olivier Rioul

CNET Paris B
PAB/STC/SGV

38-40, rue du Général Leclerc
92131 Issy-Les-Moulineaux, France

Résumé. L'apport théorique essentiel des ondelettes pour le codage en sous-bandes est la propriété de régularité des bancs de filtres itérés en octaves. On présente ici un certain nombre d'outils qui vont rendre possible une étude exhaustive du rôle de la régularité pour des applications en compression d'images fixes, en compétition avec d'autres propriétés jugées utiles comme l'orthogonalité, la sélectivité en fréquence ou la linéarité de phase.

Abstract. The major novelty of wavelet theory for subband coding is the regularity property of octave-band iterated filter banks. In this paper, several tools are presented, which make a systematic study of regularity possible for still image compression problems. Regularity is balanced against other filter properties (orthogonality, frequency selectivity, linear phase response) which are believed to be useful for image coding.

1 Introduction

Cela fait maintenant quelques années que les ondelettes se sont imposées comme une technique digne d'intérêt pour de nombreux problèmes de traitement du signal. En particulier, dès les premiers travaux de S. Mallat [1], on a pressenti que les ondelettes pouvaient s'appliquer avec succès au codage d'images. Cette impression fut confirmée très tôt grâce à la reconnaissance du lien très fort existant entre schéma d'implantation par ondelettes et bancs de filtres, que ce soit en une ou deux dimensions (voir par exemple [2]). Ainsi, du point de vue de sa structure algorithmique, la TOD est identique à un banc de filtres itéré sur la branche passe-bas à chaque étape de décomposition, ce qui lui donne son caractère «multi-résolution». La théorie des bancs de filtres, antérieure à celle des ondelettes, avait déjà été appliquée avec succès dans des schémas de compression par transformée, et la transformée en ondelettes discrètes (TOD) s'inscrit donc parfaitement dans ce cadre.

Ce point de vue se confirme grâce à l'établissement d'un dictionnaire entre propriétés équivalentes des filtres et des ondelettes associées [3]. Ainsi l'utilisation de filtres RIF correspond aux d'ondelettes à support compact, les bancs de filtres CQF [4] aux ondelettes orthonormales, et, plus généralement, les bancs de filtres à reconstruction parfaite aux ondelettes bi-orthogonales. Les notions de décomposition sur des fonctions de base, d'échelle et de résolution trouvent également leur équivalents en termes de bancs de filtres discrets [5].

Au vu de cette correspondance, on peut affirmer que le seul apport réellement nouveau des ondelettes pour le codage est la notion de *régularité*, absente dans la théorie initiale des bancs de filtres. Cette notion fut introduite pour les filtres RIF par I. Daubechies [6], qui imposa des conditions particulières sur les coefficients des filtres afin d'obtenir des ondelettes régulières à support compact. La régularité, définie comme une contrainte de continuité des ondelettes ou de ses dérivées peut donc se transposer, au moins en partie, sur des contraintes portant sur les coefficients des filtres. Bien entendu, définir la régularité directement sur quelques coefficients de filtres discrets n'est pas facile. Néanmoins, des équivalences entre

régularité des ondelettes et contraintes sur les filtres ont été établies, et on déterminera dans cet article des ordres de régularité exacts calculés en fonction des coefficients de filtres quelconques, grâce aux algorithmes d'estimation décrites dans [7].

Que l'on se place du point de vue discret (réponses de filtres) ou continu (fonctions ondelettes), on a souvent présenté l'attrait de la régularité par des considérations *subjectives* : la régularité impose une évolution (temporelle ou spatiale) «douce» des fonctions de base décomposant le signal. On peut penser que cette propriété de «douceur» a effectivement un intérêt potentiel en codage, et motiver ainsi l'utilisation de filtres-ondelettes réguliers :

A l'analyse : Supposons qu'une portion «douce» d'un signal d'entrée x_n soit analysée par des filtres non-réguliers, dont les réponses impulsionnelles présentent des discontinuités. Ces discontinuités «artificielles» – qui ne sont pas dues au signal x_n lui-même – apparaissent dans les coefficients de la transformée. Par conséquent, la régularité permettrait une «meilleure» représentation du signal par les coefficients en ondelettes.

A la synthèse : Supposons maintenant qu'une erreur – comme par exemple une erreur de quantification – soit faite sur un coefficient en ondelettes correspondant à un certain niveau de résolution. Dans le signal reconstruit, cette erreur est perçue comme une perturbation proportionnelle à la fonction de base discrète correspondante. Dans des applications telles que le codage d'images, il est naturel d'imposer que cette perturbation soit «douce» : une perturbation présentant des discontinuités est probablement plus frappante à l'œil qu'une perturbation «douce», et ceci pour la même valeur de l'erreur quadratique moyenne, et donc pour le même niveau du rapport signal à bruit.

Bien entendu, ces considérations ne sont qu'hypothétiques. Il est donc nécessaire de les confirmer ou de les infirmer de manière *objective*. Afin de nous donner les moyens de le faire, cet article présente un certain nombre d'outils applicables dans un certain nombre de contextes.

L'étude sera menée à bien dans un cadre restreint : celui d'un schéma de compression par ondelettes décrit ci-dessous, où l'on explique les raisons des choix effectués. Les outils développés concernent principalement la conception de filtres réguliers, dans les cas orthonormal, où l'on essaie de réaliser des compromis optimaux entre régularité et d'autres propriétés jugées utiles pour le codage d'images (sélectivité en fréquence, linéarité de phase). L'objectif principal est donc d'apprécier quantitativement, en termes de compromis distorsion/gain de compression, les différents «ingrédients» (propriétés des filtres) qui paramétrisent la transformée en ondelettes.

2 Choix du schéma de compression

Afin de comprendre la démarche qui a guidé le travail présenté ici, il est utile de cadrer dès à présent l'étude en précisant les éléments constitutifs du schéma de compression utilisé pour les résultats. Il va de soi que les outils théoriques présentés dans la suite sont susceptibles d'être appliqués dans des schémas différents, où l'on peut suivre la même démarche.

Le choix du schéma de compression sera suffisamment élaboré pour que les résultats expérimentaux aient valeur de référence. Néanmoins, il est hors de propos d'optimiser particulièrement les différents éléments du système ou de comparer l'utilisation de la TOD avec celle d'autres types de transformées (TCD, ...) : cela nécessiterait la donnée d'une application précise. On se concentre uniquement ici sur l'influence des propriétés des filtres/ondelettes sur les performances de compression. Par conséquent, le schéma de compression a été choisi de telle sorte qu'elle permette d'effectuer des comparaisons réalistes (performance gain/distorsion) entre les différents choix des filtres utilisés dans une TOD.

On se restreint tout d'abord à un problème de compression d'image *fixe*. Les techniques mises en jeu interviennent périodiquement pour la compression de séquences d'images, et gardent donc tout leur intérêt dans des applications de transport ou stockage d'images animées. Le signal à coder est une image numérisée en niveaux de gris (composante de luminance) sur 8 bits par pixel (bpp). Elle apparaît donc en entrée du codeur comme une matrice de pixels, chaque pixel étant représenté par un entier entre 0 et 255. Le schéma choisi suit l'organisation classique d'un codeur par transformée, où trois éléments fondamentaux interviennent à tour de rôle (cf. figure 1) :

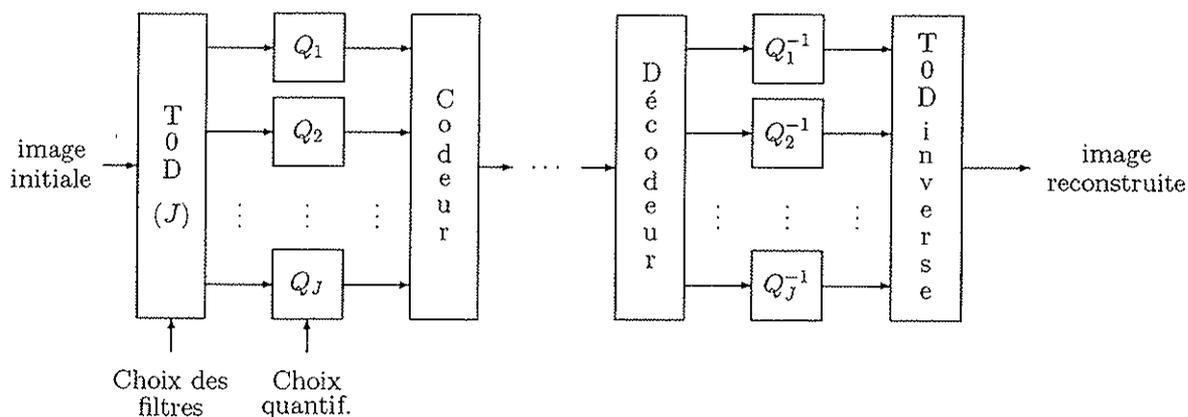


Figure 1: Schéma général de compression d'images fixes. La partie «codage» utilise tour à tour une TOD qui décompose l'image en composantes (sous-images) associées aux différentes sous-bandes, une *quantification* pour chaque sous-image, et un *codage* sans pertes. La partie «reconstruction» applique successivement les opérations inverses de décodage, de "quantification inverse", qui consiste à ramener les pixels numérisés dans l'intervalle d'amplitude initial, et la TOD inverse, qui reconstruit une image à partir des sous-images quantifiées.

La transformée en ondelettes elle-même, qui «met en forme» l'image initiale en la décomposant en sous-images plus ou moins décorréelées entre elles, afin qu'elle soit plus facile à coder. Après transformée, malgré une légère augmentation de la dynamique d'amplitude, les sous-images présentent des variances fortement réduites, ce qui facilite leur compression par quantification et codage entropique.

La quantification est effectuée ici indépendamment pour chaque sous-image (on ne tient pas compte des résidus de corrélation inter-bande). Elle introduit un bruit de quantification qui va déterminer le niveau de distorsion obtenu après reconstruction de l'image.

Le codeur entropique qui complète le travail des quantificateurs par une technique de compression sans pertes (effectuée indépendamment pour chaque sous-image).

2.1 Choix de la transformée

Il existe de nombreux types de transformées en ondelettes implantées par banc de filtres (filtrage séparable, en quinconce, facteurs d'échantillonnage entiers ou rationnels, etc.). Cependant, l'étude précise du rôle de la régularité requiert une bonne maîtrise de techniques de conception de filtres incorporant ce paramètre. Aujourd'hui, on ne possède réellement cette maîtrise que dans le cas FIR monodimensionnel, en particulier pour des décompositions en deux sous-bandes. Le choix s'est donc porté sur la structure classique de TOD bidimensionnelle séparable (filtrage ligne/colonne) implanté par un banc de filtres RIF itérés en octaves.

Le traitement des bords choisi suppose l'image périodique. Ceci permet de conserver autant de points après transformée qu'avant sans perte d'information. D'autres traitements (prolongement par symétrie, ...) sont envisageables mais présupposent classiquement une troncature aux bords, si les filtres ne sont pas à phase linéaire (par exemple dans le cas orthogonal). Dans la procédure choisie ici, la troncature aux bords ne provoque pas de distorsion, qui n'est due qu'à la quantification. Une étude, liée aux ondelettes sur un intervalle et permettant une troncature aux bords sans perte d'information dans un contexte général est en cours [8].

Certains auteurs utilisent des mesures d'entropie ou de gain théorique en rapport signal à bruit par rapport au codage MIC afin de quantifier les performances de la transformée en compression. Cependant, les hypothèses utilisées pour obtenir ces mesures sont difficilement justifiables dans un contexte de fort taux de compression (0.1 à 1 bpp) où la taille des pas de quantification utilisée n'est pas négligeable par rapport à la dynamique des pixels. Plutôt que de se baser sur ces mesures, on préférera donc comparer les performances par l'intermédiaire d'une procédure de quantification/codage simple, mais réaliste.

2.2 Quantification et codage entropique

Notre choix s'est porté sur la quantification scalaire (pixel par pixel) uniforme. Son intérêt est qu'elle est facilement mise en œuvre. De plus, elle est complétée par un codeur entropique. Une autre solution consisterait à optimiser les pas non-uniformes des quantificateurs (ou les cellules de quantificateurs vectoriels) afin de minimiser la distorsion quadratique pour un signal donné. Mais ceci ne tient pas compte du codeur, et fait en partie le travail de celui-ci. L'association quantification uniforme + codage entropique reste une référence.

D'autres améliorations sont possibles dans le contexte «uniforme» : utilisation d'une «zone morte» pour les faibles valeurs du signal à quantifier, quantification vectorielle sur réseau, etc. Le cas vectoriel apporte un gain théorique relativement faible (< 0.8 dB) sur le rapport signal à bruit [5] pour des dimensions raisonnables (4, 8 ou 16), et son intérêt pourrait surtout être l'utilisation de codeurs adaptés à la structure vectorielle. Cette solution n'a pas été adoptée pour les résultats présentés ici en raison du choix simple du codeur entropique.

Le codeur entropique applique une technique de codage de Huffman global où chaque pixel est codé indépendamment de ses voisins, en fonction de la distribution statistique de la sous-image. Dans ce cas il est légitime de négliger le débit nécessaire pour transmettre la table de codage. Ainsi trois critères pour le débit binaire donnant le gain de compression ont pu être testés : débit binaire sans codeur (alloué aux quantificateurs), débit binaire obtenu par codage de Huffman, et calcul de l'entropie pixel par pixel.

2.3 Allocation optimale de débits binaires

Tous les éléments constitutifs du schéma de compression utilisé ici ont été décrits. Une fois ce choix de structure établi, il reste une latitude quant au choix des paramètres de la transformée en ondelettes (choix des filtres et du nombre total d'itérations) et du nombre de bits alloué dans les quantificateurs pour chaque sous-bande (détermination des pas des quantificateurs).

Le but de ce travail est de quantifier l'influence du choix des filtres et d'effectuer des comparaisons les plus justes possibles entre les différents filtres. Ainsi, plutôt que d'imposer une fois pour toutes des contraintes sur les débits binaires alloués aux quantificateurs et sur le nombre de sous-bandes, on a préféré *optimiser* ces paramètres en fonction des filtres (et éventuellement de l'image). Cette optimisation permet de réaliser le meilleur compromis entre gain total de compression et distorsion sur l'image reconstruite.

Le critère sur le gain de compression est, par exemple, le débit binaire R (en bpp) obtenu après codage de Huffman. La qualité visuelle après reconstruction étant difficilement paramétrable par un critère objectif, on se contente de minimiser un critère de distorsion quadratique D (rapport signal à bruit «crête» en dB). La qualité visuelle obtenue est observée *a posteriori* sur écran.

La procédure d'optimisation, décrite dans un autre contexte dans [9], nous permet de résoudre exactement le problème de minimisation de D sous la contrainte $R \leq R_d$, où R_d est le débit binaire désiré, correspondant au gain de compression que l'on veut atteindre. Elle détermine à la fois les bits alloués aux quantificateurs et le nombre optimal de sous-bandes. Sans entrer dans les détails (voir [5] pour une dérivation adaptée à notre cas), cette procédure consiste, pour un *éventail de choix* donné sur chaque quantificateur associée à une sous-image $n^\circ i$, de trouver les paramètres de performance optimale sur l'enveloppe convexe des réalisations possibles dans le plan (R, D) . Le résultat sera d'autant plus précis que l'éventail de choix est grand. Pour la mise en œuvre, on exploite l'additivité de R entre les sous-bandes ($R = \sum_i R_i$) et également celle de $D = \sum_i D_i$, ce qui n'est valide que si la transformée est orthogonale [5]. Ceci permet de décomposer le problème en sous-problèmes dans chaque sous-image. Le procédé prend alors la forme de deux optimisations imbriquées [5, 9] qui convergent en pratique très rapidement, au bout de quelques itérations. L'allure de l'allocation de bits obtenue à l'optimum dépend étroitement du R_d visé. Pour un débit binaire autour de 0.5 bpp, elle est en accord avec celle généralement imposée pour de tels débits.

Une faiblesse possible de cette procédure est qu'il faut calculer à l'avance, pour l'ensemble donné des sous-images transformées, toutes les valeurs de (R_i, D_i) possibles dans chaque sous-image. Il y a donc un compromis à faire entre latitude de choix des pas de quantificateurs dans chaque sous-image (qui détermine la charge de calcul nécessaire) et précision des résultats. Nous avons pris ici un choix assez large : de 0 à 8 bpp pour chaque sous-image, avec un pas de 0.2 bpp, l'optimisation étant effectuée

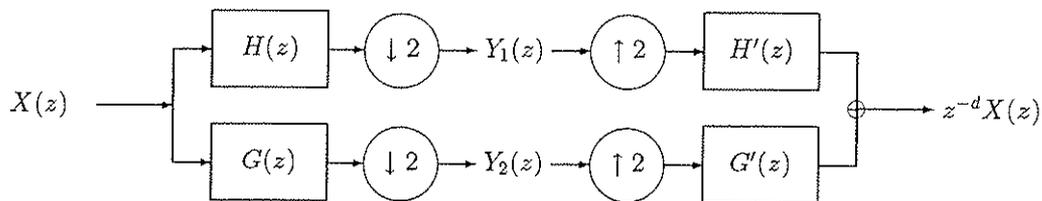


Figure 2: Un banc de filtres à deux sous-bandes et à reconstruction parfaite. Une fois qu'un tel banc de filtres a été construit, il suffit de l'itérer sur les sorties branches passe-bas pour obtenir la TOD.

en fonction de l'image initiale à coder, sans apprentissage. Des améliorations sont possibles suivant les applications visées : éventail de choix variable suivant les sous-images, possibilité d'apprentissage sur un ensemble d'images, etc.

3 Outils de synthèse de filtres-ondelettes

Ayant choisi notre système de compression et optimisé différents paramètres en fonction des filtres-ondelettes présents dans la transformée, nous sommes en mesure de quantifier objectivement l'influence des propriétés de ces filtres-ondelettes sur les performances de compression du système. Pour une image donnée, à chaque choix de filtres correspond, sans l'intervention d'aucun autre paramètre à fixer, à un niveau de performance en termes de compromis gain de compression/distorsion sur l'image codée.

Dans la suite de cet article, on présente un outil de synthèse de filtres orthogonaux permettant d'étudier les performances de filtres avec un éventail très large de propriétés et les meilleurs compromis possibles. Cette étape est nécessaire si l'on veut comparer correctement les rôles que ces différentes propriétés ont à jouer pour le codage. L'utilisation *ad-hoc* d'une seule famille de filtres (celle de Daubechies [6] par exemple) serait insuffisante au vu des différents compromis possibles.

Ces méthodes permettent d'obtenir de nouvelles familles d'ondelettes orthogonales à support compact avec une grande flexibilité de choix de contraintes.

3.1 Problématique de conception des filtres

Nous nous sommes restreints ci-dessus à un choix classique de la transformée en ondelettes, pour lequel le problème du choix des ondelettes se ramène au calcul de filtres RIF monodimensionnels à coefficients réels, dans un banc de filtres à reconstruction parfaite itéré en octaves. Cela signifie qu'il suffit de déterminer les quatre filtres de la figure 2 pour une étape de décomposition. La contrainte de reconstruction parfaite permet de se ramener à la détermination des deux filtres d'analyse passe-bas $G(z)$ et passe-haut $H(z)$ (cf. figure 2).

Afin de mesurer les effets de la propriété de régularité des ondelettes, il est nécessaire d'intégrer ce paramètre dans la conception de filtres avec un certain nombre d'autres critères, plus classiques, que l'on considère généralement comme utiles pour le codage :

- Sélectivité en fréquence (spécification d'un gabarit)
- Transformée (plus ou moins) orthogonale
- Filtres (plus ou moins, ou exactement) à phase linéaire
- Filtres courts

L'utilité de chaque propriété se base sur un certain nombre d'arguments pas toujours très objectifs et de « croyances communes » qui restent hypothétiques. Il en est de même pour la régularité, pour laquelle nous avons donné des arguments de type « psychovisuel » en introduction. De plus, certaines propriétés des filtres sont contradictoires : par exemple, dans notre cadre, il est bien connu qu'il est impossible de réaliser simultanément l'orthogonalité et la phase linéaire (sauf cas trivial $G(z) = (1 + z^{-1})/\sqrt{2}$). Notons que

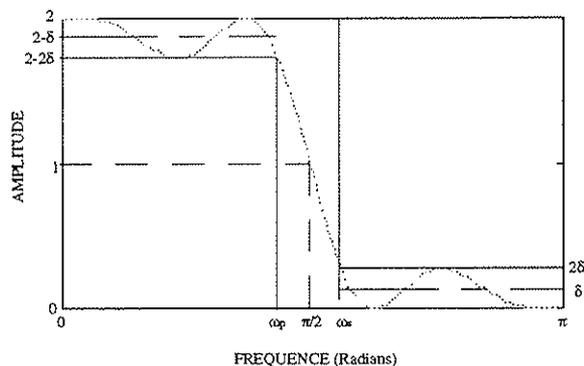


Figure 3: Gabarit du filtre passe-bas $P(e^{j\omega})$ utilisé pour le programme de Tchebichev.

pour nous, la contrainte d'orthogonalité est essentielle pour des raisons pratiques : elle permet d'utiliser la procédure d'allocation de débits binaires décrite plus haut.

Pour ces raisons, on traitera ici le cas orthogonal, avec un compromis optimal entre régularité et sélectivité en fréquence et avec différents choix de phase possibles (plus ou moins proche de la phase linéaire). Dans [5, 10], on aborde la conception de filtres à phase linéaire (donc non-orthogonaux), avec un meilleur compromis possible entre régularité et sélectivité, et la possibilité de se trouver optimalement proche du cas orthogonal.

On se limite à des procédures de synthèse basées sur la structure transverse des filtres RIF, les structures en treillis étant difficilement utilisables avec des contraintes de régularité. Par ailleurs, le critère exact de régularité portant sur les coefficients des filtres [7] est difficile à contrôler directement ou sur les réponses en fréquence. On se limitera à une contrainte de «platitude» des réponses en fréquence des filtres passe-bas autour de la fréquence de Nyquist, c'est à dire que l'on leur impose un certain nombre K de zéros à $z = -1$. Cette condition est nommée «moments nuls» par certains auteurs [1, 2]. En théorie, ce n'est qu'une condition nécessaire pour la régularité, mais en pratique, on constatera, en calculant *a posteriori* les ordres de régularité exacts grâce aux algorithmes fournis dans [7], qu'elle permet d'obtenir effectivement de la régularité (qui croît généralement avec K).

3.2 Cas orthogonal

La contrainte d'orthogonalité signifie que les filtres d'analyse et de synthèse sont les mêmes (à un retournement près) [2]. Il est facile de voir qu'il ne reste alors qu'un seul filtre à déterminer, disons le filtre passe-bas demi-bande d'analyse $G(z)$ de longueur L paire, pour lequel la condition d'orthogonalité se résume à [4, 2]

$$P(z) - P(-z) = 2$$

où $P(z) = G(z)G(z^{-1})$ est un filtre à phase nulle dont la réponse fréquentielle est positive : $P(e^{j\omega}) = |G(e^{j\omega})|^2$. Nous considérons dans la suite la synthèse de $P(z)$ qui détermine la réponse fréquentielle du filtre $G(z)$. La réponse en phase est obtenue à partir de la solution $P(z)$ par des méthodes classiques [6, 4], avec $2^{\lfloor L/4 \rfloor}$ choix de phases possibles.

Le compromis optimal entre régularité et sélectivité en fréquence peut être obtenue de la manière suivante (cf. figure 3) : On fixe un gabarit pour $P(z)$ en se donnant une largeur de bande de transition (symétrique autour de la fréquence $\omega = \pi/2$), et on cherche à minimiser la tolérance δ en bande atténuée sous les contraintes de spécification du gabarit et de régularité (qui revient à imposer $2K$ zéros à $z = -1$ dans $P(z)$). Ceci est un problème d'approximation au sens de Tchebichev : d'autres critères sont considérés dans [5]. Le filtre solution sera maximalelement sélectif en fréquence pour un niveau de régularité donné.

Un résolution efficace de ce problème peut se faire par une variante de l'algorithme d'échange de zéros de Remez, adaptée à notre cas et décrite en détail dans [11]. On peut ré-écrire $P(z)$ sous une forme intégrant simultanément les contraintes d'orthogonalité et de régularité, ce qui permet de mettre

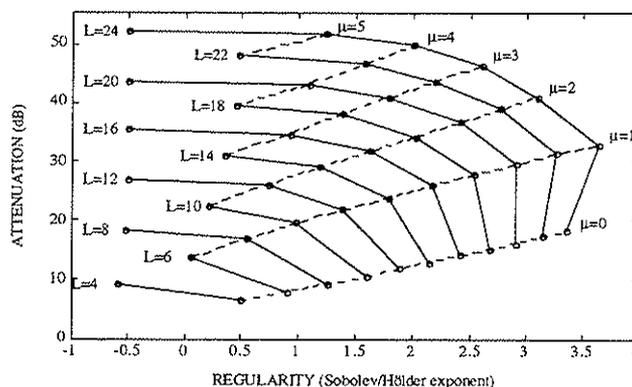


Figure 4: Atténuation dans la bande atténuée, en dB, en fonction de l'ordre de régularité. Les pointillés correspondent aux valeurs constantes de $\mu = L/4 - K/2$.

le problème d'optimisation initial sous la forme classique :

$$\min_{R(y)} \max_y |W(y)(D(y) - R(y))|$$

où on a posé $y = \cos^2 \omega$ pour ω en bande passante, $W(y) = \sqrt{y}(1-y)^K$ (fonction poids) et $D(y)W(y) = 2 - \delta - P_K(\sqrt{y})$ (fonction désirée). Le filtre $P_K(\cos \omega)$ est la solution de Daubechies (cas $K = L/2$).

Contrairement au cas classique, il est impossible d'utiliser des algorithmes standard tels que celui de Parks/McClellan, à cause des contraintes simultanées de régularité et de positivité de la réponse fréquentielle de $P(z)$, qui a pour conséquence de faire intervenir le paramètre de tolérance δ à minimiser dans l'expression donnant la fonction désirée $D(y)$. Il faut re-dériver un théorème d'alternance de Tchebichev et modifier l'algorithme de Remez de telle sorte que la valeur estimée de δ ainsi que le problème d'optimisation changent *simultanément* à chaque itération (ce qui est assez déroutant). On peut néanmoins démontrer rigoureusement que l'algorithme converge vers la solution optimale. Un programme MATLAB est donné dans [11], où les solutions sont obtenues au bout de 3 ou 4 itérations seulement pour des longueurs $L \leq 20$. Cette méthode se révèle donc très efficace en comparaison avec des méthodes basées sur la programmation linéaire [11].

Les caractéristiques des filtres obtenus sont résumées à la figure 4 : on obtient littéralement un large «éventail» de possibilités avec compromis optimal entre sélectivité fréquentielle et régularité. Comme cas particuliers extrêmes, on retrouve des solutions de Daubechies (platitude maximale : $K = L/2$) et de Smith-Barnwell (pas de contrainte de régularité : $K = 0$). Dans le cas général, les filtres obtenus seront «equiripple» (voir [5, 11]).

4 Résultats

On présente ici les résultats pour la batterie de filtres orthogonaux synthétisés comme expliqué ci-dessus, dont les longueurs L varient de 2 à 18, pour des ordres de «platitude» K compris entre 0 et $L/2$, et pour les trois largeurs de bande de transition normalisée $\Delta\omega = 0.0625, 0.1$ et 0.14 . Le compromis sélectivité en fréquence/régularité se voit sur la figure 4 pour une bande de transition fixe : elle croît globalement avec K à L fixé et avec L à $L/2 - K$ fixé. Augmenter la bande de transition améliore la régularité d'autant plus que $L/2 - K$ est grand. Le paramètre $L/2 - K$ correspond au nombre de degrés de liberté dans la conception des filtres.

Les images utilisées ici sont LENA de taille 256×256 pixels et BARBARA de taille 576×720 . Pour le schéma de compression choisi avec allocation optimale de débits binaires décrit au début de cet article, les performances d'un choix donné de filtres sont visualisées par une courbe donnant le rapport

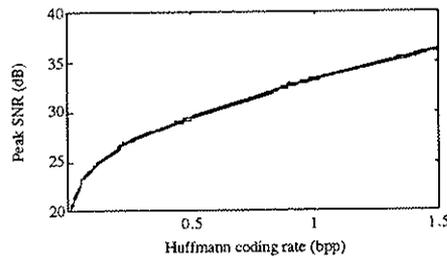


Figure 5: Influence de la phase. Courbes obtenues pour l'image LENA et pour les 8 solutions, ne différant que par la phase, correspondant à $L = 14$, $K = 5$ et $\Delta\omega = 0.14$. Les 8 courbes obtenues sont quasiment indiscernables à l'échelle de la figure.

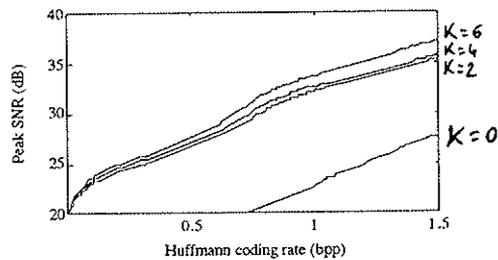


Figure 6: Influence de la régularité (platitudo). L'image codée est BARBARA, les courbes sont obtenues pour les 4 familles de filtres orthogonaux de longueur $L = 12$ et largeur de bande de transition $\Delta\omega = 0.0625$, correspondant aux valeurs $K = 0, 2, 4$ et 6 .

signal à bruit «crête» (PSNR en dB) en fonction du nombre de bits par pixel nécessaire, après codage de Huffman, pour coder tout l'image. Bien entendu, les résultats présentés ici ne sont valables que pour le schéma de compression simple choisi et pour des filtres orthogonaux. Cela constitue un ensemble restreint de conclusions susceptibles d'être affinées en suivant la démarche générale de cet article.

4.1 Influence de la phase

La figure 5 compare les performances de codage pour différents choix de phase dans le cas de filtres orthogonaux ayant des réponses fréquentielles *identiques*. L'effet de la phase est quasiment imperceptible du point de vue du rapport signal à bruit, quel que soit le débit binaire imposé. Cette observation est générale. L'influence de la phase ne peut donc s'apprécier ici que par des considérations psychovisuelles sérieuses sur la qualité de l'image reconstruite, faute de quoi s'engager serait hasardeux. Il faut noter qu'un des filtres utilisé pour produire la figure 5 possède une variation maximale de retard de groupe ne dépassant pas $1/2$ échantillon, ce qui le rend très proche de la phase linéaire.

Ainsi dans nos expérimentations (basé sur le critère *objectif* de distorsion quadratique), la phase n'a joué aucun rôle. Dans la suite on adoptera un choix ad-hoc de phase (phase maximale proche de la phase linéaire) [5, 11].

Dans la suite nous faisons ici un certain nombre d'expérimentations où on fait varier à chaque fois un seul paramètre, les autres étant fixés. Cette variation se traduit toujours par un compromis entre sélectivité en fréquence et régularité.

4.2 Régularité ou sélectivité ?

La figure 6 compare les performance de codage lorsque le degré de platitudo K varie. Dans le cas de cette figure, la régularité croît avec K , et les filtres sont irréguliers (ondelettes non continues, de type «fractal») lorsque $K = 0$. On observe clairement une influence globale pour de nombreux débits binaires imposés :

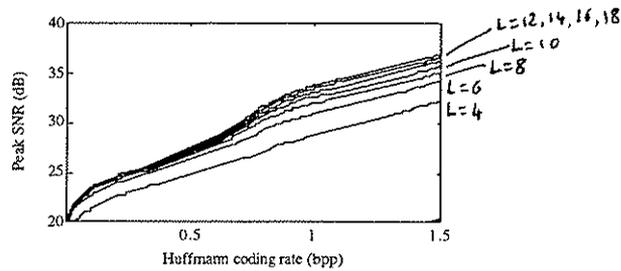


Figure 7: Influence de la longueur. Courbes obtenues pour l'image BARBARA, et pour des filtres satisfaisant à $K = L/2 - 2$ de différentes longueurs ($L = 4$ à 18), et même largeur de bande de transition $\Delta\omega = 0.0625$.

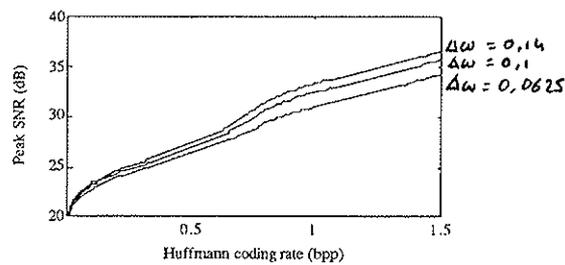


Figure 8: Influence des largeurs de bandes de transition. L'image codée est BARBARA, les filtres orthogonaux ($L = 12$ et $K = 2$) utilisés ont pour largeur de bande de transition $\Delta\omega = 0.0625$, 0.1, et 0.14.

enfait, plus les filtres sont réguliers et moins sélectifs, meilleur est la performance. La chute en dB observée lorsque $K = 0$ a d'ailleurs déjà été observé par Kronander [12], et ses conclusions s'accordent avec nos résultats : une «bonne» sélectivité en fréquence (au sens classique de Tchébichev) n'est pas essentielle pour le codage d'images.

4.3 Filtres courts ou longs ?

La figure 7 illustre la dépendance de la longueur des filtres à $L - K/2 = 2$ fixé sur les performance de compression. Rappelons que le paramètre $L/2 - K$ correspond au nombre de degrés de liberté dans la conception des filtres : il vaudrait 0 pour les filtres de Daubechies. Globalement là aussi, les performances sont meilleures lorsque la longueur croît, ce qui fait aussi croître l'ordre de régularité. Néanmoins une asymptote est rapidement atteinte : on n'obtient pas d'amélioration sensible dès que L dépasse 10 ou 12, ce qui correspond à des ordres de régularité autour de 2. Utiliser donc des filtres très réguliers, donc très longs, ne semble pas utile pour ce schéma de compression. L'influence de régularité est surtout sensible pour des filtres courts.

4.4 Régularité ou nombre de moments nuls ?

On compare ici (figure 8) les performance de compression pour différentes bandes de transition imposées sur les filtres. Tous les autres paramètres sont fixés, en particulier la longueur et le degré de platitude K , aussi appelé nombre de moments nuls. Bien que K reste fixe, augmenter la bande de transition revient ici à augmenter la régularité à K fixé, car il provoque un «écrasement» plus important de la réponse fréquentielle du filtre passe-bas autour de la fréquence de Nyquist [5]. Ceci dit, cela n'améliore pas la sélectivité en fréquence, puisque la bande de transition s'élargit. On constate, là encore de manière globale (quel que soit le débit binaire imposé), que les performances s'améliorent lorsque la régularité croît. Ces résultats montrent qu'ici, le critère de régularité est plus pertinent que celui du nombre K de moments

nuls pour les performances de compression.

5 Conclusion

En se donnant un schéma simple, mais réaliste, de compression d'images fixes, on a mesuré, à l'aide de critères objectifs et bien définis (distorsion quadratique, ordres de régularité, etc.), l'influence de diverses propriétés de la transformée en ondelettes orthogonales sur le gain de compression. A cette fin, nous avons cherché à effectuer une étude aussi exhaustive que possible, en faisant varier chaque propriété des filtres plus ou moins indépendamment les unes des autres. On a pu ainsi montrer, d'une façon objective, l'utilité de la régularité dans notre cas de figure. D'autres comparaisons (critère quadratique de synthèse de filtres, filtres à phase linéaire, quantification vectorielle sur réseau) apparaissent dans [5, 13].

Ce travail suscite de nombreuses orientations et extensions possibles pour chacun des points étudiés. Les outils de base sont donnés, et permettent d'étendre cette étude à des systèmes de compression plus flexibles (transformée non séparable, changement d'échantillonnage rationnels, paquets d'ondelettes, bancs de filtres variant dans le temps, etc).

References

- [1] S. Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation", *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 11, pp. 674-693, July 1989.
- [2] O. Rioul and M. Vetterli, "Wavelets and Signal Processing", *IEEE SP Magazine*, Oct. 1991.
- [3] M. Vetterli and C. Herley, "Wavelets and filter banks : Theory and design", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, pp. 2207-2232, Sept. 1992.
- [4] M. J. T. Smith and T. P. Barnwell, "Exact reconstruction techniques for tree-structured subband coders", *IEEE Trans. ASSP*, pp. 434-441, vol. 34, June 1986.
- [5] O. Rioul, "Ondelettes régulières : Application à la compression d'images fixes", Thèse de Doctorat, ENST Paris, 1993.
- [6] I. Daubechies, "Orthonormal bases of compactly supported wavelets", *Comm. Pure Applied Math.*, vol. XLI, pp. 909-996, 1988.
- [7] O. Rioul, "A simple, optimal regularity estimate for wavelets", in Proc. EUSIPCO'92, pp. 937-940.
- [8] F. Déprez, O. Rioul, et P. Duhamel, "Border recovery for subband processing of finite-length signals. Application to time-varying filter banks", in Proc. ICASSP'94, accepté pour présentation.
- [9] K. Ramachandran et M. Vetterli, "Best wavelet packet bases in the rate-distortion sense", *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 2, pp. 160-175, Apr. 1993.
- [10] H. Le Bihan, P. Siohan, O. Rioul et P. Duhamel, "Une méthode simple de calcul de bancs de filtres/ondelettes bi-orthogonales", in Proc. GRETSI'93, pp. 443-446.
- [11] O. Rioul et P. Duhamel, "A Remez exchange algorithm for orthonormal wavelets", *IEEE Trans. CAS II*, à paraître.
- [12] T. Kronander, "Some aspects of perception-based image coding", PhD Thesis, Linköping University, Suède, 1989.
- [13] O. Rioul, "Regular wavelets : A discrete-time approach", *IEEE Trans. Signal Processing, Special issue on wavelets*, Dec. 1993.