

# UNE MÉTHODE SIMPLE DE CALCUL DE BANCS DE FILTRES/ONDELETTES BI-ORTHOGONALES

Hervé LE BIHAN\*, Pierre SIOHAN\*, Olivier RIOUL\*\* et Pierre DUHAMEL\*\*\*

\* CCETT, 4, rue du Clos Courtel, BP 59, 35512 Cesson-Sévigné, France

\*\* FRANCE TELECOM/CNET/PAB, 38-40, rue du Général Leclerc, 92131 Issy-Les-Moulineaux, France

\*\*\* TELECOM PARIS (ENST), Département Signal, 46, rue Barrault, 75013 Paris, France

## RÉSUMÉ

Nous présentons une nouvelle méthode de calcul de bancs de filtres RIF à phase linéaire, à deux sous-bandes et à reconstruction parfaite, qui génèrent des ondelettes bi-orthogonales régulières. L'importance de ce problème est liée à celle des applications potentielles des systèmes de décomposition et/ou reconstitution des signaux physiques (parole, son, images, etc.), pour le traitement, l'analyse ou le codage. Cette méthode permet un meilleur contrôle des réponses en fréquence, problème hautement non-linéaire dans cette approche, et met en avant l'importance d'un paramètre essentiel, négligé jusqu'ici, de décalage de bande de transition. Elle est de plus facilement mise en oeuvre et débouche sur un algorithme efficace où plusieurs critères sont envisageables. Enfin, la méthode proposée ici permet d'obtenir de nouvelles solutions «ondelettes» sur la base d'un compromis sélectivité/régularité tout en restant proche de l'orthogonalité.

## ABSTRACT

A new method for designing two-band perfect reconstruction FIR filter banks with linear phase is presented. Such filter banks generate regular (smooth) bi-orthogonal wavelets. This problem is important for applications involving decomposition and/or reconstruction techniques for processing, analysis or coding of signals such as speech and images. Our method gives a better control on the frequency response of the filters, which is a highly non-linear problem in this approach. It also stresses the role of an important parameter, the transition bandwidth offset, which was neglected so far. Moreover, this method is easily implemented with an efficient algorithm, for which various criteria can be considered. Finally, it provides new wavelet solutions with a good trade-off on regularity and frequency selectivity, while also being close to orthogonal.

## 1 Introduction

Le lien entre la théorie des ondelettes et les bancs de filtres RIF à reconstruction parfaite (itérés sur les branches passe-bas) est désormais bien établi (cf. par exemple [8]). Nous considérons ici le banc de filtres décrit à la figure 1, dans le cas le plus général : Aucune contrainte particulière ne relie les filtres d'analyse à ceux de synthèse. Les filtres calculés ici génèrent des ondelettes «bi-orthogonales» [8].

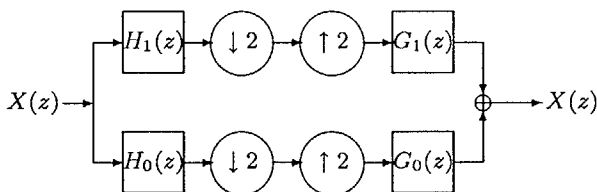


Figure 1 : Schéma du banc de filtres sous forme non-causale (filtres à phase nulle). La reconstruction parfaite impose les relations  $G_0(z) = H_1(-z)$  et  $G_1(z) = -H_0(-z)$ .

Notre but est d'obtenir un ensemble de filtres sélectifs  $G_0(z)$ ,  $G_1(z)$ ,  $H_0(z)$  et  $H_1(z)$  directement par leurs coefficients (structure transversale) ou par une structure en treillis [3]. Nous nous proposons également d'intégrer dans la procédure des contraintes permettant d'obtenir des ondelettes régulières.

La contrainte de reconstruction parfaite restreint le problème au calcul de deux filtres<sup>1</sup> parmi quatre (cf. figure 1), par exemple ceux passe-bas d'analyse  $H_0(z)$  et de synthèse  $G_0(z)$ . Nous imposons, de plus, que les filtres soient à phase linéaire. On sait alors [6] que la détermination d'un des filtres,  $H_0(z)$ , de longueur  $L$ , permet d'obtenir l'unique «complément bi-orthogonal»  $G_0(z)$  (de longueur  $L$  si  $L$  est pair,  $L - 2$  sinon), par résolution d'un système linéaire.

L'idée simple consistant à calculer librement un des filtres,  $H_0(z)$ , par un algorithme classique de type Remez, puis à déduire son complément bi-orthogonal par résolution d'un système linéaire, n'est pas *a priori* satisfaisante : Ainsi, en imposant pour  $H_0(z)$  une bande de transition ( $f_1, f_2 = 1/2 - f_1$ ) symétrique par rapport à la demi-fréquence de Nyquist (caractéristique *demi-bande*), il est pratiquement impossible d'obtenir une bonne réponse fréquentielle du complément bi-orthogonal. Ceci a conduit certains auteurs [2, 3] à appliquer une optimisation non-linéaire générale sur les coefficients des deux filtres simultanément, que ce soit pour des structures transversales ou en treillis. Ces méthodes donnent des résultats satisfaisants, mais sont lourdes à mettre en oeuvre, et peuvent converger vers des minima locaux.

<sup>1</sup>La contrainte de para-unitarité, produisant des ondelettes orthogonales, permet de se ramener à un seul filtre. La construction d'ondelettes orthogonales (à phase non-linéaire) avec compromis sélectivité/régularité est traitée en [4].



## 2 Principe de la méthode.

L'idée de base de notre algorithme est d'introduire de nouveaux paramètres dans l'approche classique consistant à calculer le premier filtre  $H_0(z)$  indépendamment de son complément, ces paramètres étant optimisés en fonction d'un critère adéquat. Le paramètre essentiel qui a permis une amélioration, pour les raisons invoquées plus haut, est un paramètre de décalage,  $\Delta f$ , de la bande de transition ( $f_1 + \Delta f, f_2 + \Delta f$ ) par rapport à la demi-fréquence de Nyquist normalisée 0.25 : Les filtres bi-orthogonaux étant différents à l'analyse et à la synthèse, il est logique que les solutions bi-orthogonales les plus sélectives ne soient pas demi-bande ; il est donc nettement préférable d'imposer des caractéristiques en fréquence non-symétriques ( $\Delta f \neq 0$ ). (Cette remarque est valable quelle que soit la méthode choisie, et s'applique donc également aux procédures utilisant une description en treillis). De plus, nous avons également introduit des facteurs de pondération dans les bandes passante et atténuée pour obtenir un meilleur contrôle des caractéristiques fréquentielles des solutions obtenues.

L'ensemble de la procédure de synthèse s'organise donc ainsi :

1. On fixe le décalage  $\Delta f$  et le facteur de pondération en bande passante  $w$  à une valeur initiale. Les spécifications du premier filtre  $H_0(z)$  étant alors fixées, il est calculé par un algorithme de type Remez.
2. Son complément bi-orthogonal, ( $H_1(z)$  ou  $G_0(z)$ , indifféremment) est obtenu par inversion d'un système linéaire correspondant aux équations de reconstruction parfaite.
3. On reboucle itérativement les deux étapes précédentes, le réglage des paramètres  $\Delta f$  et  $w$  étant assuré par un algorithme d'optimisation non linéaire, afin de minimiser un critère de qualité portant sur l'ensemble des deux filtres.

L'itération s'arrête lorsque le critère choisi atteint un minimum. Les coefficients des filtres s'obtiennent directement à la fin de l'algorithme (solution transversale).

Deux minimisations imbriquées apparaissent ici (algorithme de Remez et optimisation non linéaire globale), et l'on peut craindre un temps de calcul élevé. Cependant, la première étape utilise un algorithme efficace (Remez) et on a initialisé systématiquement cet algorithme avec la solution  $H_0(z)$  provenant de l'itération précédente, ce qui l'accélère d'un facteur 6 en moyenne. De cette façon, la procédure totale est suffisamment efficace pour être utilisée en pratique. De plus, l'optimisation non linéaire ne porte, pour un critère donné, que sur une fonction numérique d'une ou deux variables, ce qui est relativement facile à maîtriser. Par exemple, on peut garantir, par inspection systématique, l'obtention d'un minimum global du critère.

Le problème est maintenant reporté sur le choix du critère d'optimisation, qui doit être simple à évaluer, tout en tendant à produire des filtres qui soient tous les deux sélectifs : C'est déjà le cas pour le filtre  $H_0(z)$ , qui est optimal en ce sens, puisque issu d'une procédure de Remez ; il reste donc à contrôler la sélectivité en fréquence de  $H_1(z)$ .

La difficulté essentielle est que l'on travaille à gabarit inconnu : Il est délicat de formuler des spécifications raisonnables pour  $H_1(z)$  qui soient compatibles avec la bi-orthogonalité. Néanmoins, ce problème peut être contourné assez facilement.

### 2.1 Critère de différence quadratique

Le critère à minimiser le plus simple à mettre en œuvre est la différence quadratique entre les deux filtres (à phase nulle)  $H_0(z)$  et  $G_0(z)$  :

$$\sum_n (h_0(n) - g_0(n))^2 \quad (1)$$

Ce critère peut être également écrit dans le domaine fréquentiel :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_0(e^{j\omega}) - G_0(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (2)$$

Le premier filtre étant sélectif en fréquence (optimalement au sens de Chebychev), ce critère garantira donc que son complément lui «ressemble», et est dans une certaine mesure également sélectif en fréquence.

Les deux solutions obtenues par ce critère étant proches, elles sont «presque» orthogonales : L'orthogonalité correspondrait au cas où  $H_0(z) = G_0(z)$ , ce qui est impossible à obtenir exactement ici (sauf cas trivial [8]). Elle est souvent considérée comme un avantage pour le codage [4], mais son utilité reste à prouver objectivement.

L'algorithme décrit ci-dessus se révèle plus facile à mettre en œuvre que ceux décrits dans des travaux antérieurs [2, 3], tout en donnant des résultats acceptables en termes de sélectivité en fréquence : Une solution obtenue est reportée à la figure 2, qui correspond à un exemple déjà traité dans [2] et [3].

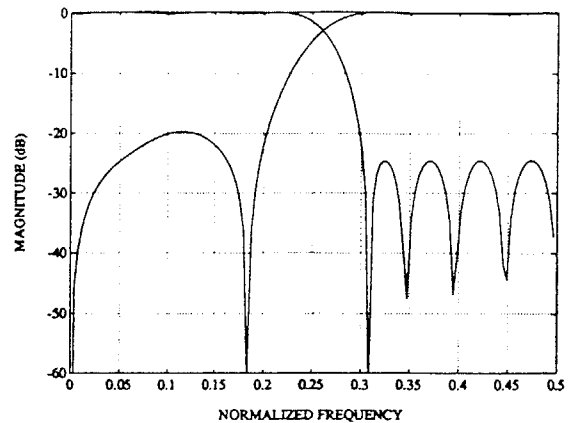


Figure 2 : Réponse en fréquence pour une solution ( $H_0(z), H_1(z)$ ), de longueurs égales à 22. La largeur de transition du filtre  $H_0(z)$  est  $f_2 - f_1 = 0.071$ , décalée de  $\Delta f = 0.0165$ , avec une pondération égale à  $w = 0.2$  dans la bande atténuée.

### 2.2 Critères de sélectivité

En examinant de plus près la solution de la figure 2, on s'aperçoit que le comportement fréquentiel du complément bi-orthogonal  $H_1(z)$  n'est pas totalement satisfaisant, en ce sens que le niveau et le nombre des lobes dans les bandes atténuées pour les deux filtres peuvent différer de manière

sensible. Il est d'ailleurs facile d'obtenir un résultat meilleur de ce point de vue, en modifiant quelque peu les valeurs des paramètres de l'algorithme. Un exemple, obtenu à partir de la solution de la figure 2, est donné à la figure 3. Le résultat est comparable avec ceux présentés dans [2, 3].

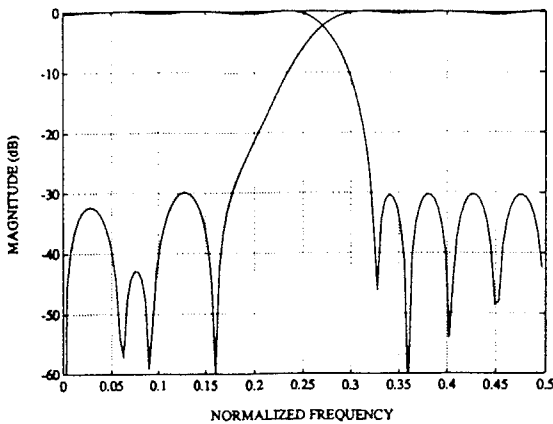


Figure 3 : Solution  $(H_0(z), H_1(z))$  obtenue à partir de la figure 2 avec d'autres paramètres :  $f_2 - f_1 = 0.071$ ,  $\Delta f = 0.0365$ ,  $w = 0.8$ .

Ce comportement s'explique par le fait que le critère précédent ne porte pas directement sur la minimisation de l'erreur de Chebyshev de  $H_1(z)$ , alors que celle-ci est effectuée pour  $H_0(z)$  par un algorithme de Remez. Il serait donc logique d'utiliser un autre critère permettant un meilleur contrôle de la réponse fréquentielle du complément bi-orthogonal  $H_1(z)$  (ou  $G_0(z)$ ). Deux critères ont été testés dans cette optique : Le premier est la norme de l'erreur de Chebyshev du complément bi-orthogonal  $G_0(z)$  dans la bande passante, le deuxième est celle du filtre produit  $P(z) = G_0(z)H_0(z)$  qui ne permet qu'un contrôle indirect sur la sélectivité en fréquence de  $G_0(z)$  mais qui semble posséder de meilleures propriétés de convergence.

Le problème se reporte alors sur la détermination de la bande passante de l'un ou l'autre filtre, qui est inconnue a priori et qu'on est donc amené à déterminer numériquement. Le danger est qu'il est alors possible de converger vers une solution dont la bande atténuée (déterminée de cette manière) tend vers zéro, notamment lorsque la réponse fréquentielle devient monotone. Des variantes sont en cours d'étude qui devraient permettre un meilleur contrôle de la sélectivité en fréquence des deux filtres simultanément.

### 3 Contraintes de régularité et ondelettes

Le but de ce paragraphe est d'intégrer des contraintes de régularité sur les ondelettes bi-orthogonales [8] associées aux deux filtres passe-bas  $H_0(z)$  et  $G_0(z)$ . Une contrainte classique [8], nécessaire pour obtenir un ordre de régularité supérieur à  $K$  [4, 5], est d'imposer au moins  $K$  zéros à  $z = -1$  dans le filtre passe-bas. Ceci peut être vu comme une contrainte de platitude (d'ordre  $K$ ) de la réponse fréquentielle à la fréquence de Nyquist.

Toute la difficulté est donc d'imposer, dans notre méthode, des zéros à  $z = -1$  à la fois dans  $H_0(z)$  et  $G_0(z)$ . Tout d'abord, le filtre  $H_0(z)$  est déterminé librement par un algorithme de type Remez. Il est très facile de modifier cet

algorithme pour prendre en compte la contrainte de platitude d'ordre  $K$ . Il reste à imposer une contrainte similaire sur son complément bi-orthogonal lors de la détermination de celui-ci (étape 2 de l'algorithme). Reprenons donc plus en détail cette détermination.

Si la longueur de  $H_0(z)$ ,  $L$ , est impaire, on en déduit un unique complément bi-orthogonal  $G_0(z)$  de longueur  $L' = L - 2$  par résolution d'un système linéaire de taille  $(L - 1)/2 \times (L - 1)/2$  correspondant aux équations de reconstruction parfaite. Appelons  $\mathbf{A}_0$  cet algorithme de détermination sans contrainte de platitude ( $K = 0$ ).

Dans le cas où  $L$  est pair, il existe un complément bi-orthogonal unique de longueur  $L' = L$ . L'algorithme qui le détermine, appelé  $\mathbf{A}_1$ , se déduit immédiatement du précédent ( $\mathbf{A}_0$ ). En effet, puisque la longueur des filtres (symétriques) est paire, ces filtres admettent nécessairement chacun un zéro à  $z = -1$ . On peut donc écrire  $H_0(z) = (1 + z^{-1})H(z)$  et  $G_0(z) = (1 + z^{-1})G(z)$ . D'après la condition de reconstruction parfaite :

$$H_0(z)G_0(z) - H_0(-z)G_0(-z) = 2z^{-(L+L')/2} \quad (3)$$

on voit que le couple formé des filtres de longueur impaire,  $(1 + z^{-1})^2 H(z)$  et  $G(z)$  est également solution, où  $G(z)$  se détermine à partir de  $(1 + z^{-1})^2 H(z)$  par l'algorithme  $\mathbf{A}_0$ . Il suffit donc, pour déterminer  $G_0(z)$ , de d'ajouter un zéro à  $z = -1$  à  $H_0(z)$ , d'appliquer  $\mathbf{A}_0$ , et d'ajouter encore un zéro à  $z = -1$  au résultat.

Cette idée se généralise immédiatement à l'algorithme  $\mathbf{A}_K$ , qui permet à partir d'un filtre passe-bas  $H_0(z)$  de longueur  $L$  ayant  $K$  zéros à  $z = -1$ , de déterminer un complément bi-orthogonal  $G_0(z)$  ayant également  $K$  zéros à  $z = -1$ . Pour ce faire, il suffit d'ajouter  $K$  tels zéros à  $H_0(z)$ , d'appliquer  $\mathbf{A}_0$ , puis d'ajouter  $K$  zéros à  $z = -1$  au résultat. La longueur de  $G_0(z)$  est alors  $L' = L + 2(K - 1)$ . Imposer une forte contrainte de «platitude» augmente donc la dissymétrie des longueurs, bien que  $L$  et  $L'$  ne diffèrent que d'au plus 2 dans les cas  $K = 0, 1$ , ou 2.

Une étude est en cours pour quantifier l'intérêt d'un nombre différent de zéros à  $z = -1$  dans  $H_0(z)$  et  $G_0(z)$ . Un exemple utilisant la même valeur de  $K$  dans les deux filtres est présenté à la figure 4.

### 4 Solutions en treillis.

Le principe de notre méthode peut également s'appliquer avantageusement au calcul de solutions en treillis [3], dont l'intérêt est particulièrement sensible dans les systèmes de codage où les coefficients des filtres sont quantifiés : la représentation en treillis permet alors de conserver la reconstruction parfaite.

Des solutions sous forme de treillis ont d'ailleurs été proposées pour les bancs de filtres à phase linéaire et à reconstruction parfaite [7]. Le calcul des coefficients de ces filtres se traduit par un problème non linéaire difficile à résoudre. Pour contourner cette difficulté une technique d'identification a été développée [1] qui permet le calcul des coefficients du treillis à partir des coefficients de la réponse impulsionnelle du passe-bas. Ainsi, le calcul de la solution treillis peut s'effectuer à l'étape 2 de l'algorithme de la section 2 ou, pour réduire le temps global d'exécution, après obtention de la solution directe (transversale) optimale.

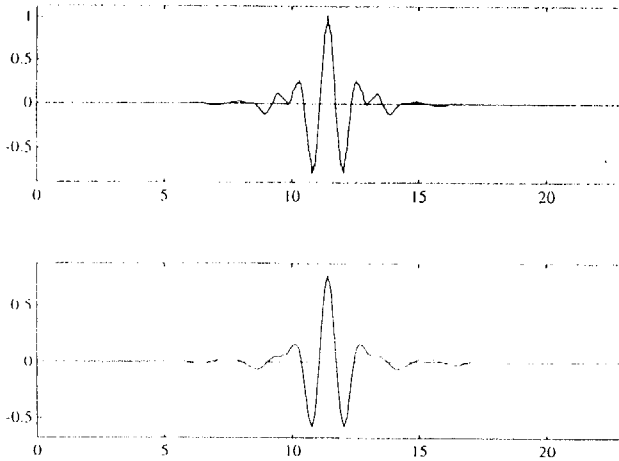


Figure 4 : Exemple d'ondelettes bi-orthogonales obtenues à partir d'une solution  $(H_0(z), G_0(z))$  de longueurs respectives 23 et 25. Les ordres de régularité (calculés grâce aux algorithmes donnés en [5]) sont 0.74 et 1.21, respectivement.

Nous rappelons ici le principe de cette identification dans le cas d'un filtre de longueur paire  $L = 2m$ . Une technique similaire est en cours d'étude pour le cas  $L$  impair.

Il est important de noter que les coefficients de la structure treillis, notés  $\alpha_k$ , déterminent simultanément les filtres  $H_0(z)$  et  $H_1(z)$ , et donc  $G_0(z)$ , ce qui permet de se dispenser du calcul du complément bi-orthogonal. En effet, si l'on prend la forme cascade donnée dans [7] :

$$\begin{pmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{pmatrix} = \mathbf{H}_p(z^2) \begin{pmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

où  $\mathbf{H}_p(z)$  est la matrice des composantes polyphases :

$$\mathbf{H}_p(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \prod_{k=1}^{m-1} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_k \\ \alpha_k z^{-1} & z^{-1} \end{pmatrix}.$$

Le facteur d'échelle étant déterminé de manière à vérifier la condition de reconstruction parfaite, l'identification entre les coefficients restants des structures transversales, notés  $h_n$ , et le treillis revient à résoudre l'équation

$$H_0(z) = (1 \ 1) \cdot \mathbf{H}_p(z^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{h_0} H_r(z) \quad (5)$$

où  $H_r(z) = \sum_n h_n z^{-n}$  est le filtre résultant de l'optimisation par l'algorithme de Remez. Le filtre  $H_0(z)$  étant symétrique et  $\alpha_0$  étant implicitement égal à 1, l'identification résultant de (5) va se ramener à la résolution d'un système non linéaire de  $m - 1$  équations à  $m - 1$  inconnues.

Nous procédons alors par linéarisation en établissant une relation de récurrence entre deux problèmes de type (5) pour deux longueurs paires successives. Il en résulte un algorithme récursif, où à chaque étape  $p$  ( $3 \leq p \leq m - 1$ ), on se ramène à la résolution d'un système linéaire de taille  $p \times p$ . La charge de calcul résultante, bien que supérieure à celle nécessaire à la détermination directe sous forme transversale de  $H_1(z)$ ,

est sensiblement réduite par rapport à la technique proposée initialement [3].

Remarquons que par rapport à la structure habituelle du treillis de la prédiction linéaire dont les coefficients sont des nombres réels dont le carré est strictement inférieur à 1, les coefficients  $\alpha_k$  peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle, toutefois la situation où  $\alpha_k^2 = 1$  peut produire des «singularités» [3]. Par conséquent, la forme cascade (4) ne peut générer un ensemble complet de solution. Cependant il est généralement reconnu que d'un point de vue pratique ces singularités se rencontrent rarement [3, 7].

Nos simulations confirment ce point de vue : On observe généralement que les réponses fréquentielles des filtres obtenues après identification des structures en treillis se confondent avec celles de filtres initiaux (sous forme transverse).

## 5 Conclusion

Nous avons présenté une nouvelle méthode de calcul de bancs de filtres/ondelettes à phase linéaire, à deux sous-bandes et à reconstruction parfaite. L'originalité de cette méthode réside notamment dans l'utilisation d'un paramètre essentiel de décalage de bande de transition. Ses principaux avantages sont sa facilité de mise en œuvre, sa flexibilité (choix de critères), et un contrôle facilité sur les réponses en fréquence (qu'il reste à améliorer par l'utilisation de critères adéquats). Cette méthode nous permet de plus d'intégrer des contraintes afin d'obtenir des ondelettes bi-orthogonales régulières, et d'obtenir les solutions correspondantes sous forme de treillis. Comme perspective, la flexibilité de notre méthode nous permet d'envisager l'étude d'autres critères plus directement exploitables pour des applications de codage.

## Bibliographie

- [1] H. Le Bihan and P. Siohan, "Système de bancs de filtres RIF 2-D à reconstruction parfaite : Système à 4 sous-bandes," in *Proc. Int. Conf. Wavelets and Applications*, (Toulouse, France), June 1992. Actes en cours de publication.
- [2] B. R. Horng and J. A. N. Willson, "Lagrange multiplier approaches to the design of two-channel perfect reconstruction linear-phase FIR filter banks," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, (Albuquerque, USA), 1990, pp. 1731-1734.
- [3] T. Q. Nguyen and P. P. Vaidyanathan, "Two-channel perfect-reconstruction FIR QMF structures which yield linear-phase analysis and synthesis filters," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 37, no. 5, pp. 676-690, May 1989.
- [4] O. Rioul, "On the choice of "wavelet" filters for still image compression," in *ICASSP'93*, (Minneapolis, USA), vol. V, pp. 550-553.
- [5] O. Rioul, "Simple, optimal regularity estimates for wavelets," in *Proc. EUSIPCO'92*, (Bruxelles), pp. 937-940.
- [6] M. Vetterli, "Filter banks allowing perfect reconstruction," *Signal Processing*, vol. 10, no. 3, pp. 219-244, 1986.
- [7] M. Vetterli and D. Le Gall, "Perfect reconstruction FIR filter banks : Some properties and factorizations," *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, vol. 37, no. 7, July 1989.
- [8] M. Vetterli and C. Herley, "Wavelets and filter banks : Theory and design," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, pp. 2207-2232, 1992.