L'enseignement des probabilités à Telecom Paristech

L. Decreusefond

TPT

Le contexte

- Pas de résistance des matériaux, pas de mécanique, pas de thermodynamique, etc
- Mais, du traitement du signal et de l'image
- des communications numériques
- des réseaux et de l'informatique

Le cours de probabilités

- En tronc commun,
- 40 heures de cours/TD
- en petites classes

Compétences

- Formaliser mathématiquement un phénomène aléatoire
- Résoudre un problème formalisé en termes relevant de la théorie des probabilités

Document du groupe CTI

Ce qui n'est pas difficile (pédagogiquement)

- Dénombrements (ce n'est pas le cœur de l'enseignement)
- Les calculs de loi image par difféomorphisme
- Théorèmes abstraits admis (existence de la mesure de Lebesgue, classe monotone, ...) : existence d'un espace de probas qui rende compte d'une suite infinie de pile/face.

Hétérogénéité

- Des origines différentes : environ 150 étudiants,

  50% MP, 16% PC, 16% PSI, 2% TSI, 16% AST-L
- Des attendus différents : 15 % vont se lancer dans le parcours « Finances »

Qu'est-ce qui se caractérise par ...

- une fonction positive d'intégrale 1
- une fonction croissante, nulle en $-\infty$, qui vaut 1 en $+\infty$
- une fonction holomorphe sur le disque unité
- suites de nombres positifs de somme 1
- une transformée de Fourier ?

Une mesure

Indépendance et conditionnement

- La modélisation = variables aléatoires
- Les calculs = lois
- Calculs uni-dimensionnel : application des outils d'analyse (séries, intégrales)
- Somme de 2 v.a. indépendantes $\Longleftrightarrow$ convolution des 2 lois
- Dès que plus de 2 v.a. : représentation de la dépendance

Les probas en CPGE : une bonne idée ?

- Dans la continuité des enseignements de Terminale
- Un rafraîchissement des programmes
- Un autre mode de raisonnement
- Des mises en perspective du cours de maths : théorie des ensembles, séries génératrices, matrices
- Une réelle ouverture à la modélisation

Se limiter aux probas sur un espace dénombrable

Modèle binomial

Actif sûr

$$\begin{tikzcd} & X_0(1+r) \\ X_0 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Actif risqué

$$\begin{tikzcd} & S^u = S_0 u \\ S_0 \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & \\ & S^d = S_0 d \end{tikzcd}$$

Valeur du contrat :

$$\begin{cases} V^u & \text{si } S_1 = S^u \\ V^d & \text{si } S_1 = S^d. \end{cases}$$

Call européen

- $V^u = (S_0 u - K)^+$ et $V^d = (S_0 d - K)^+$.
- C'est la valeur d'une option d'achat (*call*) sur l'actif.

Une option d'achat de prix d'exercice K est le droit d'acheter l'actif sous-jacent au prix K à l'instant T.

  - Si le prix réel $S_0 u$ est supérieur à K, le détenteur du call exerce son droit d'achat et revend aussitôt. Il gagne donc $S_0 u - K$.
  - Sinon, le détenteur du call ne fait rien et donc ne gagne, ni ne perd.

Question

3 paramètres

- S_0 prix initial
- K prix d'exercice
- T maturité

2 questions

- Prix du contrat
- Stratégie de couverture

Principe

- X_0 : prix de vente du contrat
- α_0 : nombre de parts de l'actif S achetées à l'instant 0.

Fortune finale

$$X_1 = \alpha_0 S_1 + (1 + r)(X_0 - \alpha_0 S_0).$$

On veut que

$$X_1 = V_1.$$

Calculs

$S_1 = S_0 u$

$$V^u = \alpha_0 S_0 u + (1+r)(X_0 - \alpha_0 S_0).$$

$S_1 = S_0 d$

$$V^d = \alpha_0 S_0 d + (1+r)(X_0 - \alpha_0 S_0).$$

$$\iff \begin{cases} S_0(u-1-r)\alpha_0 & +\ (1+r)X_0 & = V^u \\ S_0(d-1-r)\alpha_0 & +\ (1+r)X_0 & = V^d \end{cases}$$

Résultats

$$\alpha_0 = \frac{V^u - V^d}{S_0(u-d)} = \frac{V^u - V^d}{S^u - S^d}.$$

$$X_0 = \frac{1}{1+r}\left(\frac{1+r-d}{u-d}\,V^u + \frac{u-1-r}{u-d}\,V^d\right) = \frac{1}{1+r}\,\mathbf{E}_p\left[V_1\right].$$

Commentaires

- Le prix et la stratégie de couverture ne dépendent pas de la probabilité *a priori*.
- Seuls deux paramètres comptent : u et d.
- Risque uniquement lié au modèle.
- Comment estimer u et d ?
- On ne peut pas envisager un modèle où l'actif peut prendre plus de 2 valeurs.

Modèle à 3 périodes

- $S_0 = 4\,;\ r = 0,4$
- $u = 2$, $d = 1/2$ donc $p = 1/2$.
- Contrat = call européen maturité 3, prix d'exercice 6.

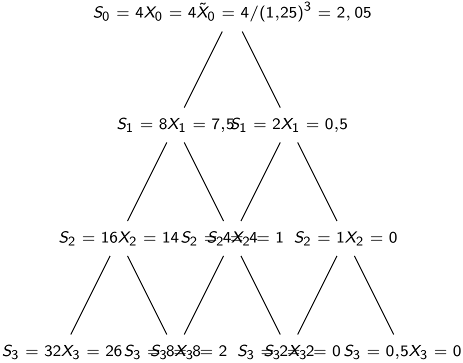

FIGURE: Evolution à 3 pas

Formules

Prix

$$\text{Prix} = \frac{1}{(1+r)^N} \mathbf{E}_p [V_N] .$$

Stratégie de couverture

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{E}_{1/2} [D_k V_N \mid \mathcal{F}_k]}{D_k S_k} .$$

Méthode

- Remonter l'arbre : trop long !
- Être malin !
- On suppose $r = 0$ (juste pour simplifier la présentation)

Objectif

- Il *suffit* de trouver $\gamma_0, \cdots, \gamma_N$ tels que

$$V_N = \mathbf{E}_{1/2}\left[V_N\right] X_0 + \sum_{j=0}^{N-1} \gamma_j (S_{j+1} - S_j).$$

Espace de Rademacher

- Aléa contenu dans $\Omega = \{-1, 1\}^N$
- $\{-1, 1\}^{\mathbf{N}}$=espace de rademacher
- $U_j(\omega) = \omega_j$
- Sous $\mathbf{P}_p$, les $(U_j, j \geq 1)$ sont iid de loi

$$\mathbf{P}_p(U_j = 1) = p = 1 - \mathbf{P}_p(U_j = -1)$$

Prix

- Si $U_j = 1$ alors $S_j = S_{j-1}u$
- Si $U_j = -1$ alors $S_J = S_{j-1}d$
- par conséquent

$$S_k = \left(\frac{u+d}{2}\right)^k \prod_{j=1}^{k}(1 + \frac{u-d}{u+d}\ U_j)$$

Objectif

- Il *suffit* de trouver $\gamma_0, \cdots, \gamma_N$ tels que

$$V_N = \mathbf{E}_{1/2}[V_N]\, U_0 + \sum_{j=0}^{N-1} \gamma_j (S_{j+1} - S_j).$$

Opérateur de différence

$$D_k F(U_1, \cdots, U_N) = \frac{1}{2}(F(U_k^+) - F(U_k^-)) = \mathbf{E}_{1/2}\left[U_k F \mid U_l,\ l \neq k\right]$$

où

$$\begin{aligned} U_k^+ &= (U_1, \cdots, U_{k-1}, \quad 1,\ U_{k+1}, \cdots) \\ U_k^- &= (U_1, \cdots, U_{k-1}, -1,\ U_{k+1}, \cdots) \end{aligned}$$

Exemple

$$D_k(1 + p_k U_k) = \frac{1}{2}(1 + p_k - (1 - p_k)) = p_k$$

Formule de Clark

Théorème

$$F = \mathbf{E}_{1/2}\left[F\right] + \sum_{k=1}^{N} \beta_k U_k.$$

$$\beta_k = \mathbf{E}_{1/2}\left[D_k F \,\middle|\, U_1, \cdots, U_{k-1}\right]$$

Définition

Les fonctions cylindriques sont les fonctions de la forme

$$F = \prod_{j=1}^{N} (1 + \rho_j U_j),$$

ρ_j déterministe.

L'espace vectoriel engendré par les fonctions cylindriques est dense dans L^2.

Preuve

- $\mathcal{F}_N = \sigma(U_1, \cdots, U_N)$, $F \in L^2 = L^2 - \lim_{N\to\infty} \mathbf{E}_{1/2}[F \,|\, \mathcal{F}_N]$
- $\mathbf{E}_{1/2}[F \,|\, \mathcal{F}_N] = F_N(U_1, \cdots, U_N)$
- $N = 1$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{E}_{1/2}[F_1(U_1)(1+\rho_1 U_1)] \ \forall \rho_1 \\ &= \frac{1}{2}[\rho_1 \ (F_1(1) - F_1(-1)) + F_1(1) + F_1(-1)] \end{aligned}$$

- Donc

$$F_1(1) - F_1(-1) = 0 \text{ et } F_1(1) + F_1(-1) = 0$$

donc $F_1 \equiv 0$

N quelconque

- $F_N^{\pm}(U_1, \cdots, U_{N-1}) = F_N(U_1, \cdots, U_{N-1}, \pm 1)$
- En notant $Z_N = \prod_{j=1}^N (1 + \rho_j U_j)$, pour tout ρ_N on a

$$0 = \mathbf{E}_{1/2}\left[F_N \prod_{j=1}^N (1 + \rho_j U_j)\right] = \rho_N \mathbf{E}_{1/2}\left[(F_N^+ - F_N^-) Z_{N-1}\right] + \mathbf{E}_{1/2}\left[(F_N^+ + F_N^-) Z_{N-1}\right]$$

- On conclut par récurrence

Itô-Clark

Pour $F \in L^2$, on a

$$F = \mathbf{E}_{1/2}\left[F\right] + \sum_k \mathbf{E}_{1/2}\left[D_k F \mid U_1, \cdots, U_{k-1}\right] U_k. \tag{1}$$

Preuve

- Par récurrence $Z_k = \prod_{j \le k}(1 + \rho_j U_j)$. $Z_k = 1 + \sum_{j=1}^{k} Z_{j-1}\rho_j U_j$
- Vrai pour $k = 0$ et $k = 1$.
- Si c'est vrai au rang k, on a

$$Z_{k+1} = Z_k(1 + \rho_{k+1}U_{k+1}) = (1 + \sum_{j=1}^{k} Z_{j-1}\rho_j U_j) + Z_k\rho_{k+1}U_{k+1}$$
$$= 1 + \sum_{j=1}^{k+1} Z_{j-1}\rho_j U_j.$$

- Donc c'est vrai pour $F \in \mathfrak{E}$.
- Il suffit de montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Theta \ : \ \mathfrak{E} \subset L^2 &\longrightarrow L^2(\Omega;\ l^2(\mathbf{N})) \\ F &\longmapsto \left(k \mapsto \mathbf{E}_{1/2}\left[D_k F \,|\, \mathcal{F}_{k-1}\right]\right) \end{aligned}$$

est prolongeable par continuité sur L^2.

- Or pour $F \in \mathfrak{E}$,

$$F = \mathbf{E}_{1/2}\left[F\right] + \sum_k \mathbf{E}_{1/2}\left[D_k F \,|\, \mathcal{F}_{k-1}\right] U_k$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{1/2}\left[(F - \mathbf{E}_{1/2}\left[F\right])^2\right] &= \mathbf{E}_{1/2}\left[\sum_k \mathbf{E}_{1/2}\left[D_k F \,|\, \mathcal{F}_{k-1}\right]^2\right] \\ &= \|\Theta F\|^2_{L^2(\Omega;\ l^2(\mathbf{N}))}. \end{aligned}$$

Conséquence

$$
\begin{aligned}
S_j &= S_{j-1}(1 + \frac{u-d}{u+d} U_j) \\
S_j - S_{j-1} &= S_{j-1} \frac{u-d}{u+d} U_j \\
D_j S_j &= \frac{1}{2} S_{j-1} \left[1 + \frac{u-d}{u+d} - (1 - \frac{u-d}{u+d}) \right] \\
&= S_{j-1} \frac{u-d}{u+d}
\end{aligned}
$$

$$
S_j - S_{j-1} = D_j S_j \, U_j
$$

Application à V_N

$$
\begin{aligned}
V_N &= U_0 + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{E}_{1/2}\left[D_j V_N \,|\, \mathcal{F}_j\right] U_j \\
&= U_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathbf{E}_{1/2}\left[D_j V_N \,|\, \mathcal{F}_j\right]}{D_j S_j} \quad (S_j - S_{j-1})
\end{aligned}
$$

Références

- On trouvera l'étude complète de l'espace de Rademacher à travers les chaos dans

N. Privault, *Stochastic analysis in discrete and continuous settings with normal martingales*, volume 1982 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, 2009.