



ESTIMATION PARAMÉTRIQUE

OLIVIER RIOUL

Spartacus Supérieur
Niveau Master
Collection Enseignement

Estimation paramétrique

OLIVIER RIOUL
2022

Spartacus
IDH

ISBN : 978-2-36693-122-8
© Spartacus-idh, Paris 2022

Table des matières

| | |
|---|-----|
| Liste des notations | 3 |
| Liste des exercices | 5 |
| Table des figures | 7 |
| Introduction | 9 |
| Plan du cours sur l'estimation statistique. | 10 |
| | |
| 1 Modèle statistique | 11 |
| 2 Conventions sur le modèle statistique. | 21 |
| 3 Fréquentiste vs. bayésien : deux approches opposées | 27 |
| 4 Estimation paramétrique et risque | 33 |
| 5 Compromis biais-variance | 41 |
| 6 Estimation non biaisée optimale | 47 |
| 7 Score et information de Fisher | 53 |
| 8 Borne de Cramér-Rao | 59 |
| 9 Maximum de vraisemblance | 73 |
| 10 Estimation linéaire | 93 |
| 11 Moindres carrés | 95 |
| 12 Le point de vue bayésien | 105 |
| 13 Erreur quadratique moyenne minimale | 111 |
| 14 Maximum a posteriori | 121 |
| 15 Estimation bayésienne linéaire | 139 |

Liste des notations

| | |
|---|---|
| $\mathcal{B}(p)$ | loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ |
| $\mathcal{B}(n, p)$ | loi binomiale de longueur n et de paramètre $p \in [0, 1]$ |
| $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$ | loi bêta de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. |
| $B(\alpha, \beta)$ | fonction bêta $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ |
| $\mathbb{B}(\hat{\theta})$ | biais |
| $D(p q)$ | divergence de Kullback-Leibler |
| $\mathbb{E}(\cdot)$ | espérance |
| $\mathcal{E}(\lambda)$ | loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (loi gamma $\Gamma(1, \lambda)$) |
| $\Gamma(\alpha)$ | fonction Gamma |
| $\Gamma(\alpha, \beta)$ | loi gamma de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. |
| $\Gamma^{-1}(\alpha, \beta)$ | loi inverse gamma de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. |
| J_{θ} | information de Fisher |
| $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ | loi normale (gaussienne) de moyenne μ et variance σ^2 |
| $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$ | loi normale de moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice de covariance \mathbf{C} |
| $\mathcal{P}(\lambda)$ | loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ |
| $\mathbb{P}(\cdot)$ | (loi de) probabilité |
| $R(\hat{\theta})$ | risque |
| $S_{\theta}(X)$ | score |
| θ | paramètre |
| $\hat{\theta}$ | estimateur |
| $\mathcal{U}[a, b]$ | loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ |
| $\mathbb{V}(\hat{\theta})$ | variance |

4

$|\cdot|$ norme euclidienne sur \mathbb{R}^n

$\|\cdot\|$ norme euclidienne sur \mathbb{R}^N

$X_N \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ convergence en loi (en distribution)

$X_N \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ convergence en probabilité

$X_N \rightarrow X$ *p.s.* convergence presque sûre

Liste des exercices

| | |
|---|-----|
| Un sondage | 15 |
| Le problème de la régression | 17 |
| Signal dans du bruit | 19 |
| Exemples de modèles dominés | 25 |
| Statistique suffisante, factorisation de Fisher | 31 |
| Estimateurs (in)admissibles | 39 |
| Avec ou sans biais | 45 |
| Théorème de Rao-Blackwell | 49 |
| Théorème de Lehmann-Scheffé. | 51 |
| Estimateurs efficaces | 63 |
| Bornes de Cramér-Rao généralisées | 65 |
| Non existence d'estimateurs optimaux. | 67 |
| Reparamétrisation et efficacité asymptotique | 69 |
| Pseudo-inverse et déconvolution | 71 |
| Non existence et non unicité du maximum de vraisemblance. | 79 |
| Consistance, biais et normalité asymptotiques et reparamétrisation | 81 |
| Estimateurs du maximum de vraisemblance | 83 |
| Performances asymptotiques de l'estimateur des moments | 85 |
| Divergence de Kullback-Leibler et consistance de l'estimateur du maximum de vraisemblance. | 87 |
| Normalité asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance | 91 |
| Moindres carrés et équations normales | 99 |
| Estimation d'amplitude dans du bruit corrélé | 101 |

| | |
|--|-----|
| Moindres carrés séquentiel, moindres carrés non linéaire | 103 |
| Règle de succession de Laplace-Bayes | 107 |
| A priori de Jeffreys | 109 |
| Loi de la variance totale. | 115 |
| A priori normal en estimation d'amplitude dans du bruit gaussien | 117 |
| A priori de Dirichlet et lissage additif de Laplace | 119 |
| Comparaison entre estimateurs MMSE, MAP et ML | 127 |
| Comparaison entre estimations fréquentiste et bayésienne | 129 |
| Inégalité de van Trees | 131 |
| Consistance de l'estimation bayésienne | 133 |
| Théorème de Bernstein-von Mises | 135 |
| Erreur absolue moyenne minimale | 137 |
| Moindres carrés moyens et équations de Wiener-Hopf | 141 |
| Comparaison entre estimateurs LMMSE et ML | 143 |
| Lissage et filtrage de Wiener, prédiction linéaire | 145 |
| Révision sur l'estimation fréquentiste | 147 |
| Révision sur l'estimation statistique | 149 |

Table des figures

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Sondage par communes lors du deuxième tour d'une élection présidentielle. | 16 |
| 1.2 | Régression non linéaire | 18 |
| 1.3 | Régression linéaire | 18 |
| 1.4 | Signal dans du bruit gaussien | 20 |
| 2.1 | Une densité binomiale d'ordre 10 | 26 |
| 3.1 | Les fondateurs des écoles fréquentiste et bayésienne. | 27 |
| 3.2 | Réduction de dimensionnalité par statistique suffisante minimale. | 32 |
| 4.1 | Exemples de $MSE(\theta)$ d'estimateurs admissibles. | 40 |
| 5.1 | Biais et variance lors d'un tir sur cible. | 46 |
| 6.1 | Rao et Blackwell.. | 50 |
| 6.2 | Lehmann et Scheffé. | 52 |
| 8.1 | Estimation efficace par la moyenne. | 64 |
| 8.2 | Fréchet, Darmois, Cramér et Rao. | 66 |
| 8.3 | MSE de deux estimateurs suivant la valeur du paramètre. | 68 |
| 8.4 | Estimation asymptotiquement efficace. | 70 |
| 8.5 | Principe de la déconvolution dans du bruit additif | 72 |
| 9.1 | Densités bilatérales exponentielle (en rouge) et χ^2 à un degré de liberté (en bleu). | 80 |
| 9.2 | Relations entre consistance et sans biais asymptotique. | 82 |
| 9.3 | Maximum de log-vraisemblance pour le modèle de Bernoulli. | 84 |
| 9.4 | Rappel sur la méthode δ | 86 |
| 9.5 | Kullback et Leibler.. | 89 |
| 9.6 | Illustration d'une normalité asymptotique. | 92 |

| | | |
|------|---|-----|
| 11.1 | Projection orthogonale de l'observation sur un le sous-espace du modèle. . . | 100 |
| 11.2 | Illustration de l'estimation linéaire aux moindres carrés : on cherche la droite qui minimise la surface des carrés des erreurs. | 102 |
| 11.3 | Mémoire de Legendre sur la méthode des moindres quarrés, 1805. | 104 |
| 12.1 | Laplace et Bayes.. | 108 |
| 12.2 | A priori uniforme vs. a priori de Jeffreys pour le modèle binaire. | 110 |
| 13.1 | Variances intra-classes et inter-classes pour deux valeurs de X (classes) et une variance de θ donnée. | 116 |
| 13.2 | Densités normales a priori et a posteriori.. | 118 |
| 13.3 | Histogramme présentant des classes vides sans lissage de Laplace. | 120 |
| 14.1 | Comparaison entre MMSE, MAP et ML. | 128 |
| 14.2 | Effet d'une erreur de modèle a priori. | 130 |
| 14.3 | Harry Leslie Van Trees. | 132 |
| 14.4 | Joseph Leo Doob. | 134 |
| 14.5 | Bernstein et von Mises. | 136 |
| 14.6 | Médiane, moyenne et mode. | 138 |
| 15.1 | Wiener et Hopf. | 142 |
| 15.2 | Preuve du lemme d'inversion matriciel de Woodbury | 144 |
| 15.3 | Filtrage de Wiener pour débruiter un signal. | 146 |
| 15.4 | Flux de trafic entrant (en paquets mesurés) à un nœud d'un réseau en utilisant la distribution de Pareto pendant environ 500 secondes. | 150 |