C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. ?–?, 2001 – PXMA????.TEX –
Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Comportement asymptotique des hauteurs des sous-schémas de dimension nulle de l'espace projectif

Hugues RANDRIAMBOLOLONA

Ecole nationale supérieure des télécommunications, dépt. INFRES, équipe de mathématiques, 46, rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13
Etudiant en thèse à l'Université Paris-Sud, bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex
Courriel : randriam@enst.fr

(Reçu le jour mois année, accepté après révision le jour mois année)

Résumé. Dans ce texte on définit une notion de hauteur pour les sous-schémas d'une variété arithmétique projective. Dans le cas particulier des sous-schémas plats de dimension générique nulle de l'espace projectif, on établit pour ces hauteurs un analogue du théorème de Hilbert-Samuel ; plus précisément, on montre qu'elles admettent un développement asymptotique dont on explicite les trois premiers termes. Cette description fournit une réponse à une question posée par Michel Laurent à propos du terme constant du développement asymptotique des hauteurs de matrices d'interpolation. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Heights of zero-dimensional subschemes of projective space

Abstract. *In this text we define a notion of height for subschemes of a projective arithmetic variety. In the case of flat subschemes of generic dimension zero of projective space, we show that these heights verify an analogue of the Hilbert-Samuel theorem; more precisely, we give the first three terms of an asymptotic development for these heights. This brings an answer to a question of Michel Laurent concerning the constant term in the asymptotic development of heights of interpolation matrices.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction et définition des hauteurs de sous-schémas

Soient K un corps de nombres, $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K, $\pi : \mathfrak{X} \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ une variété arithmétique projective (cf. [2] ou [3]), et $\overline{\mathcal{L}}$ un faisceau inversible ample sur $\mathfrak{X}$ muni de métriques hermitiennes positives. On supposera en outre que la variété complexe $\mathfrak{X}(\mathbb{C})$ est munie d'une mesure strictement positive μ invariante sous l'action de la conjugaison complexe. Sous cette condition, pour tout entier n, on munit $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$ d'une structure de $\mathcal{O}_K$-module hermitien au moyen des métriques $L^2(\mu)$.

Soit Σ un sous-schéma de $\mathfrak{X}$. Pour tout entier n, notons

$$\operatorname{restr}_n : \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow \Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)$$

Note présentée par Prénom NOM

S0764-4442(00)0????-?/FLA

l'application de restriction. L'image $\mathrm{im}(\mathrm{restr}_n)$ de cette application de restriction est un quotient du $\mathcal{O}_K$-module $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$, et peut être munie des métriques quotient des métriques L^2 sur $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$. On obtient ainsi un $\mathcal{O}_K$-module hermitien, noté $\overline{\mathrm{im}(\mathrm{restr}_n)}$.

DÉFINITION 1.1. – *La n-ième hauteur du sous-schéma Σ (relativement à $\overline{\mathcal{L}}$) est le degré d'Arakelov normalisé du $\mathcal{O}_K$-module hermitien $\overline{\mathrm{im}(\mathrm{restr}_n)}$:*

$$h^{(n)}(\Sigma) = \widehat{\deg}\, \overline{\mathrm{im}(\mathrm{restr}_n)}.$$

Sous une forme légèrement différente, cette notion de hauteur de sous-schéma apparaît déjà dans [5]. Remarquons aussi que si l'entier n est suffisamment grand, l'application restr_n est surjective, et alors

$$h^{(n)}(\Sigma) = \widehat{\deg}\, \overline{\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)},$$

où $\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)$ est muni des métriques quotient par restr_n des métriques L^2 sur $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$. Si en outre Σ est plat sur $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ de polynôme de Hilbert P et si l'entier n est régulier au sens de Castelnuovo-Mumford relativement à P, la hauteur $h^{(n)}(\Sigma)$ s'interprète comme la hauteur du point de Hilbert associé à Σ, relativement à un fibré en droites hermitien naturel sur le schéma de Hilbert correspondant.

Par analogie avec le cas géométrique, on est en droit d'espérer que ces hauteurs de sous-schéma admettent un développement asymptotique

$$h^{(n)}(\Sigma) \underset{n\to\infty}{=} \frac{n^{\dim \Sigma}}{(\dim \Sigma)!} h([\Sigma]) + o(n^{\dim \Sigma}),$$

où $h([\Sigma]) = (\widehat{c_1}(\overline{\mathcal{L}})^{\dim \Sigma}.[\Sigma])$ est la hauteur (relativement à $\overline{\mathcal{L}}$) du cycle associé à Σ. En particulier pour $\Sigma = \mathfrak{X}$, on retrouve le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique de [4] et [6] (voir aussi [1] et [2]).

Dans une direction différente, cette Note s'intéresse aux termes suivants d'un tel développement asymptotique, lorsque $\mathfrak{X}$ est un espace projectif et Σ un sous-schéma plat de dimension générique nulle.

2. Enoncé du résultat principal

Soient $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_K$-module hermitien localement libre de rang $N+1$, $\mathbb{P}_E = \mathbf{Proj}\, \mathrm{Sym}^{\cdot}_{\mathcal{O}_K} E$ l'espace projectif des quotients de E localement libres de rang un, $\pi : \mathbb{P}_E \longrightarrow \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ le morphisme structural, et $\overline{\mathcal{O}_E(1)}$ le fibré en droites universel sur $\mathbb{P}_E$ muni des métriques quotient de la surjection $\overline{\pi^* E} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_E(1)$. On note ω_{FS} la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}_E(\mathbb{C})$, c'est-à-dire la forme de Chern de $\overline{\mathcal{O}_E(1)}$. On munit alors $\mathbb{P}_E(\mathbb{C})$ de la forme volume $\mu = (\omega_{FS})^N$. Enfin, le fibré cotangent holomorphe de $\mathbb{P}_E(\mathbb{C})$ est muni de l'unique métrique hermitienne qui soit invariante sous l'action du groupe unitaire de $\overline{E}$ et normalisée par la condition suivante : si les ϕ_j forment localement une base unitaire de $T^{1,0}\mathbb{P}_E(\mathbb{C})^*$, alors $\omega_{FS} = \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^N \phi_j \wedge \overline{\phi_j}$.

Soit Z un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_E$, plat de dimension relative zéro sur $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$, de support l'image P d'une section de $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ dans $\mathbb{P}_E$. Notons $\mathfrak{I}_{P,Z}$ et $\mathfrak{I}_{P,\mathbb{P}_E}$ les faisceaux d'idéaux définissant P comme sous-schéma fermé de Z et de $\mathbb{P}_E$, respectivement. Posons $\Omega = \Gamma(P, \mathfrak{I}_{P,\mathbb{P}_E}/\mathfrak{I}^2_{P,\mathbb{P}_E}) = \Gamma(P, \Omega^1_{\mathbb{P}_E/\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K}|_P)$. Si σ est un plongement de K dans $\mathbb{C}$, Ω_σ est l'espace cotangent à la variété complexe $(\mathbb{P}_E)_\sigma(\mathbb{C})$ en P_σ. Il peut donc être muni du produit scalaire hermitien défini par la structure kählérienne sur $(\mathbb{P}_E)_\sigma(\mathbb{C})$. Ceci définit une structure de $\mathcal{O}_K$-module hermitien sur Ω, et donc, par des constructions standard, sur ses puissances symétriques. On munit alors $\Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,Z}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,Z})$ des métriques quotient déduites de la surjection

$$\mathrm{Sym}^t(\Omega) = \Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,\mathbb{P}_E}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\mathbb{P}_E}) \twoheadrightarrow \Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,Z}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,Z}).$$

DÉFINITION 2.1. – *Avec ce choix de métriques, on définit la hauteur du cône tangent à Z en P comme*

$$h(C_P Z) = \sum_t \widehat{\deg}\, \overline{\Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,Z}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,Z})}.$$

Soit maintenant Σ un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_E$, plat de dimension relative zéro sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ (on ne fait plus d'hypothèse sur le support de Σ). Fixons un plongement $K \hookrightarrow \overline{K}$ de K dans sa clôture algébrique, et notons $p_1, \ldots, p_e \in \mathbb{P}_E(\overline{K})$ les points géométriques de la fibre générique de Σ. Posons

$$r_{t,p_i} = \dim_{\overline{K}} \Gamma(p_i, \mathfrak{I}^{\,t}_{p_i,\Sigma_{\overline{K},p_i}} / \mathfrak{I}^{\,t+1}_{p_i,\Sigma_{\overline{K},p_i}}) \qquad \text{et} \qquad m_{p_i} = \sum\nolimits_t r_{t,p_i} = \dim_{\overline{K}} \Gamma(\Sigma_{\overline{K},p_i}, \mathcal{O}_{\Sigma_{\overline{K},p_i}}).$$

On définit la hauteur du cycle associé à Σ comme le réel

$$h([\Sigma]) = \sum\nolimits_i m_{p_i} h(p_i)$$

où $h(p_i)$ est la hauteur (au sens usuel) du point p_i, relativement au fibré $\overline{\mathcal{O}(1)}$.

Choisissons une extension finie L de K telle que les p_i soient définis sur L. Ce choix étant fait, pour tout i on notera $\Sigma^{(i)}_{\mathcal{O}_L}$ la fermeture dans $\mathbb{P}_{E,\mathcal{O}_L}$ du localisé $(\Sigma_{\mathcal{O}_L})_{p_i}$, et P_i la fermeture de p_i. Ainsi P_i est l'image d'une section de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_L$ dans $\mathbb{P}_{E,\mathcal{O}_L}$, $\Sigma^{(i)}_{\mathcal{O}_L}$ est un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_{E,\mathcal{O}_L}$ dont le support est égal à P_i, et $\Sigma_{\mathcal{O}_L}$ est réunion schématique des $\Sigma^{(i)}_{\mathcal{O}_L}$. Notons $\widetilde{\Sigma_{\mathcal{O}_L}}$ le schéma somme disjointe des $\Sigma^{(i)}_{\mathcal{O}_L}$, et $\nu : \widetilde{\Sigma_{\mathcal{O}_L}} \longrightarrow \Sigma_{\mathcal{O}_L}$ le morphisme naturel. Par construction, la restriction de ν à la fibre générique est un isomorphisme, de telle sorte que le $\mathcal{O}_{\Sigma_{\mathcal{O}_L}}$-module $\nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma_{\mathcal{O}_L}}} / \mathcal{O}_{\Sigma_{\mathcal{O}_L}}$ est de torsion. Remarquons aussi qu'on est dans les conditions d'application de la définition 2.1 avec $K = L$, $P = P_i$ et $Z = \Sigma^{(i)}_{\mathcal{O}_L}$. On pose alors :

$$h(C_{tot}\widetilde{\Sigma}) = \sum\nolimits_i h(C_{P_i}\Sigma^{(i)}_{\mathcal{O}_L}) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{ramif}^{\log}(\Sigma) = \frac{1}{[L:\mathbb{Q}]} \log \#\Gamma(\Sigma_{\mathcal{O}_L}, \nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma_{\mathcal{O}_L}}} / \mathcal{O}_{\Sigma_{\mathcal{O}_L}}).$$

On vérifie que ces deux quantités ne dépendent pas du choix de L.

THÉORÈME 2.2. – *Sous ces hypothèses et avec ces notations, les hauteurs du sous-schéma Σ admettent le développement asymptotique suivant :*

$$h^{(n)}(\Sigma) \underset{n\to\infty}{=} n.h([\Sigma]) \;+\; \sum\nolimits_{i,t} \frac{r_{t,p_i}}{2}.\log\left(\frac{(n+N)!}{N!t!(n-t)!}\right) \;+\; h(C_{tot}\widetilde{\Sigma}) - \operatorname{ramif}^{\log}(\Sigma) \;+\; O(n^{-1}).$$

Ainsi les hauteurs de Σ admettent un développement asymptotique dont le terme principal est linéaire en la hauteur du cycle associé à Σ, dont le terme suivant est logarithmique et ne dépend que des longueurs des jets de Σ en ses points à l'infini, et dont le terme constant comprend essentiellement la hauteur d'un "cône tangent total d'une désingularisation virtuelle" et le logarithme de la "ramification virtuelle" de Σ.

3. Survol de la preuve

Pour montrer le théorème 2.2, on ne perd pas de généralité en supposant que les p_i sont définis sur K. En notant $\nu_n^* : \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma) \longrightarrow \Gamma(\widetilde{\Sigma}, \mathcal{O}(n)|_{\widetilde{\Sigma}}) = \bigoplus_i \Gamma(\Sigma^{(i)}, \mathcal{O}(n)|_{\Sigma^{(i)}})$ l'application dont les composantes sont les applications de restriction, on trouve

$$h^{(n)}(\Sigma) = h(\nu_n^*) + \sum\nolimits_i h^{(n)}(\Sigma^{(i)})$$

où $h(\nu_n^*)$ est la hauteur de l'application linéaire ν_n^*. On vérifie aisément que ν_n^* est injective, que le cardinal de son conoyau ne dépend pas de n (et donc, pour $n = 0$, est égal à $\#\Gamma(\Sigma, \nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}} / \mathcal{O}_\Sigma)$, fournissant le terme $\operatorname{ramif}^{\log}(\Sigma)$), et que les normes à l'infini de ν_n^* décroissent exponentiellement avec n. Ceci ramène la démonstration du théorème au cas où le support de Σ est une section P de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$.

Sous cette hypothèse, on munit $\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))$ et $\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma)$ des filtrations données par l'ordre d'annulation en P, *i.e.* $Fil^t\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)) = \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathfrak{I}_P^t \mathcal{O}(n))$ et $Fil^t\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma) = \Gamma(\Sigma, \mathfrak{I}_P^t \mathcal{O}(n)|_\Sigma)$. Les gradués associés sont munis des métriques de sous-quotients. Par additivité du degré d'Arakelov dans les suites exactes courtes de $\mathcal{O}_K$-modules hermitiens, on a $h^{(n)}(\Sigma) = \sum_t \widehat{\deg}\, \overline{gr^t\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma)}$. Par ailleurs, on obtient par passage au quotient de l'application restr_n une surjection naturelle

$$b_{n,t} : gr^t\Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n)) \twoheadrightarrow gr^t\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma).$$

Le point crucial de la démonstration du théorème est alors le résultat de "presque-isométrie" suivant :

LEMME 3.1. – *Pour tout t et pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, les valeurs caractéristiques non nulles de $(b_{n,t})_\sigma$ restent dans un intervalle de la forme $[1 - O(n^{-1}), 1]$ lorsque n tend vers l'infini.*

4. Application aux hauteurs de matrices d'interpolation

Soient $p_1, \ldots, p_l \in \mathbb{P}^N(K)$ des points de l'espace projectif standard. Après choix de coordonnées homogènes des p_i, notons $A_n : K[X_0, \ldots, X_N]_n \longrightarrow K^l$ l'application d'évaluation en les p_i, définie sur l'espace des polynômes homogènes de degré n. Notons aussi Σ l'adhérence schématique dans $\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}$ de la réunion des p_i. Avec un choix de métriques convenables, Michel Laurent montre dans [5] l'existence d'une constante, notée $\chi(\mathcal{O}_\Sigma)$ par analogie avec le cas géométrique, telle que la hauteur de l'application linéaire A_n admette le développement asymptotique suivant :

$$h(A_n) \underset{n\to\infty}{=} n.\sum_i h(p_i) \;+\; \chi(\mathcal{O}_\Sigma) \;+\; o(1).$$

Un problème soulevé dans [5] est d'expliciter $\chi(\mathcal{O}_\Sigma)$ en termes de ramification de Σ sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$, par exemple en reliant cette constante au module des différentielles de Σ. C'est ce qu'on se propose de faire ici.

Compte tenu des normalisations de [5], on vérifie aisément qu'on a $h(A_n) = h^{(n)}(\Sigma) - \frac{l}{2}\log\binom{N+n}{N}$. On applique alors le théorème 2.2 au sous-schéma Σ. Puisque Σ est réduit, on a $r_{t,p_i} = 1$ si $t = 0$, $r_{t,p_i} = 0$ si $t \geqslant 1$, et $h(C_{tot}\widetilde{\Sigma}) = 0$, de telle sorte qu'en identifiant les termes restants on trouve

$$\chi(\mathcal{O}_\Sigma) = -\mathrm{ramif}^{\log}(\Sigma) = -\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\log \#\Gamma(\Sigma, \nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}/\mathcal{O}_\Sigma)$$

où $\nu : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$ est le morphisme de normalisation.

Utilisant le fait que l'ordre $\Gamma(\widetilde{\Sigma}, \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}})$ est auto-dual pour la forme bilinéaire trace sur la K-algèbre séparable $\Gamma(\widetilde{\Sigma}, \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}})_K = \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma)_K$, ceci peut aussi s'écrire

$$\chi(\mathcal{O}_\Sigma) = -\frac{1}{2.[K:\mathbb{Q}]}\log N(\mathfrak{d}_{\Gamma(\Sigma,\mathcal{O}_\Sigma)/\mathcal{O}_K})$$

où $N(\mathfrak{d}_{\Gamma(\Sigma,\mathcal{O}_\Sigma)/\mathcal{O}_K}) \in \mathbb{N}$ est la norme de l'idéal discriminant de $\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma)$ sur $\mathcal{O}_K$. Notamment, si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que Σ est localement intersection complète, on trouve, au moyen de la théorie des résidus et de la dualité de Grothendieck, que $N(\mathfrak{d}_{\Gamma(\Sigma,\mathcal{O}_\Sigma)/\mathcal{O}_K}) = \#\,\Gamma(\Sigma, \Omega^1_{\Sigma/\,\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K})$.

Remerciements. L'auteur remercie Jean-Benoît Bost pour ses nombreux conseils de mathématiques et de rédaction.

Références bibliographiques

[1] Abbes A., Bouche T., Théorème de Hilbert-Samuel "arithmétique", Annales Inst. Fourier (Grenoble) 45 (1995) 2, pp. 375-401.

[2] Bost J.-B., Théorie de l'intersection et théorème de Riemann-Roch arithmétiques, Séminaire Bourbaki 1990/91, exposé 731, Astérisque 201-203 (1992), pp. 43-88.

[3] Gillet H., Soulé C., Arithmetic intersection theory, Publications Math. IHES 72 (1990), pp. 94-174.

[4] Gillet H., Soulé C., An arithmetic Riemann-Roch theorem, Inventiones Math. 110 (1992), pp. 473-543.

[5] Laurent M., Hauteur de matrices d'interpolation, in: Philippon P. (Ed.), Approximations Diophantiennes et Nombres Transcendants, Luminy 1990, de Gruyter, 1992, pp. 215-238.

[6] Zhang S., Positive line bundles on arithmetic varieties, Journal Amer. Math. Soc. 8 (1995) 1, pp. 187-221.