Métriques de sous-quotient et théorème de Hilbert-Samuel arithmétique pour les faisceaux cohérents

Par *Hugues Randriambololona*, à Paris.

English abstract

The aim of this paper is twofold. First we prove a theorem of extension of sections of a coherent subquotient of a metrized vector bundle on a complex analytic space with control of the norms, without any of the smoothness assumptions that were needed in previously known analogous results. Then we show how to associate an arithmetic Hilbert-Samuel function to a coherent sheaf on an arithmetic variety — provided this coherent sheaf is a subquotient of a metrized vector bundle — and, using the classical arithmetic Hilbert-Samuel theorem and our extension theorem, we give the leading term of the so constructed arithmetic Hilbert-Samuel function.

MSC 2000 : 14G40, 32C35, 32F10, 32L10.

Introduction

Soient K un corps de nombres, $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{X}$ un schéma projectif sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ de fibre générique $\mathfrak{X}_K$ réduite, et $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module inversible ample dont les fibres sur l'espace analytique réduit $\mathfrak{X}(\mathbb{C})$ sont munies d'une métrique hermitienne continue à courbure semi-positive, invariante sous l'action de la conjugaison complexe.

Si $\mathcal{C}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent de support de dimension absolue $d \leqslant \dim\mathfrak{X}$, on note $[\mathcal{C}] \in Z_d(\mathfrak{X})$ le cycle associé à $\mathcal{C}$, défini comme suit :

$$[\mathcal{C}] = \sum_{x\in\mathfrak{X}_{(d)}} (\lg_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} \mathcal{C}_x)[x]$$

(où $\mathfrak{X}_{(d)}$ désigne l'ensemble des points de dimension d de $\mathfrak{X}$). La hauteur de ce cycle relativement à $\overline{\mathcal{L}}$ peut être définie comme le nombre d'intersection arithmétique $(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^d.[\mathcal{C}]) = \sum_{x\in\mathfrak{X}_{(d)}}(\lg_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} \mathcal{C}_x)(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_{|x})^d.[x])$, suivant la théorie de l'intersection arithmétique de Gillet et Soulé (cf. [6], et [14] pour la généralisation aux métriques non C^∞).

Supposons maintenant donnés un $\mathcal{O}_\mathfrak{X}$-module localement libre de type fini $\mathcal{E}$ dont les fibres sur $\mathfrak{X}(\mathbb{C})$ sont munies d'une métrique continue invariante sous la conjugaison complexe, un sous-$\mathcal{O}_\mathfrak{X}$-module cohérent $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, et un morphisme de $\mathcal{O}_\mathfrak{X}$-modules $p : \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{C}$ qui fait de $\mathcal{C}$ un quotient de $\mathcal{F}$, ou encore, un «sous-quotient» de $\mathcal{E}$. Pour tout entier n, le $\mathcal{O}_K$-module $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ peut être muni, au choix, des normes uniformes, ou bien, si $\mathfrak{X}(\mathbb{C})$ est muni d'une forme volume continue invariante sous la conjugaison complexe, des normes d'intégration L^2. Par considération des normes restreintes, on obtient aussi une structure de $\mathcal{O}_K$-module normé sur $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$, puis, par passage aux normes quotient de ces dernières, sur $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{C} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ si n est assez grand (on consultera le §3.5 pour plus de détails sur toutes ces constructions).

Le résultat principal de ce texte est la généralisation du «théorème de Hilbert-Samuel arithmétique» de [7] dans ce cadre des faisceaux cohérents munis de «normes de sous-quotient». On montre en effet :

Théorème A. — *Sous les hypothèses précédentes, le degré d'Arakelov du $\mathcal{O}_K$-module normé $\overline{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{C} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})}$ admet le développement asymptotique*

$$\widehat{\deg}\, \overline{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{C} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})} = \frac{n^d}{d!} (\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^d . [\mathcal{C}]) + o(n^d)$$

quand n tend vers l'infini.

Un problème lorsque l'on souhaite utiliser des faisceaux cohérents arbitraires dans un contexte arakelovien est que l'on ne dispose pas d'un moyen évident de les munir de structures métriques, comme c'est le cas pour les faisceaux localement libres. Tout faisceau cohérent étant quotient, et donc *a fortiori* sous-quotient, d'un faisceau localement libre, la construction proposée ici se veut un moyen de contourner cet inconvénient. Elle a en outre l'avantage de replacer dans un cadre commun les deux questions suivantes déjà apparues dans la littérature, auxquelles le théorème A apporte une réponse :

(i) Dans [7] paragraphe 5.3.2, où est déjà évoquée cette difficulté qu'il y a à généraliser à un faisceau cohérent quelconque le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique prouvé pour un faisceau localement libre (ainsi que le résultat d'existence de petites sections qu'il implique), il est aussi suggéré la possibilité de traiter le cas d'un *sous-faisceau* cohérent d'un faisceau localement libre hermitien, muni des normes restreintes ; ceci est bien un cas particulier du problème résolu ici, du moins en ce qui concerne le terme de degré maximal de cette formule de Hilbert-Samuel arithmétique.

(ii) Le faisceau structural $\mathcal{O}_\Sigma$ d'un sous-schéma fermé Σ de $\mathfrak{X}$ est naturellement muni d'une structure de *quotient* du faisceau structural $\mathcal{O}_\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{X}$, ce dernier disposant d'une structure métrique évidente ; en utilisant le théorème avec $\mathcal{C} = \mathcal{O}_\Sigma$ on obtient ainsi un théorème de Hilbert-Samuel arithmétique pour les hauteurs de sous-schémas, comme conjecturé dans [17] A.2.1.

Il serait intéressant d'examiner si le résultat obtenu ici ne dispose pas d'applications en théorie de l'approximation diophantienne, en autorisant par exemple l'utilisation de «fonctions auxiliaires» tordues par des sections d'un faisceau cohérent (non nécessairement localement libre).

Au moyen d'un dévissage, on montre que pour prouver le théorème en toute généralité, il suffit de le faire dans le cas particulier où $\mathcal{C}$ est de la forme $i_*\mathcal{M}$, où $i : Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$ est le morphisme d'immersion d'un sous-schéma fermé intègre Z de $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_Z$-module inversible. On se ramène alors à la version classique du théorème de Hilbert-Samuel arithmétique, ou plutôt à sa généralisation au cas singulier donnée dans [19], au moyen d'un résultat de comparaison de normes dont l'essentiel réside en l'énoncé de prolongement de sections holomorphes d'un fibré vectoriel métrisé sous-quotient avec contrôle des normes qui constitue le point (ii) du théorème suivant :

Théorème B. — *Soient X un espace analytique 1-convexe*[1] *réduit, $\overline{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module inversible hermitien à courbure strictement positive, $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre métrisé de type fini, $i : Y \hookrightarrow X$ un sous-espace analytique fermé réduit de X, et $\overline{V}$ un $\mathcal{O}_Y$-module localement libre métrisé de type fini. On suppose donnés un sous-$\mathcal{O}_X$-module cohérent F de E et un morphisme surjectif*

$$p : F \twoheadrightarrow i_*V$$

de $\mathcal{O}_X$-modules cohérents. Alors :

(i) Pour tout réel $\varepsilon > 0$ et pour tout compact non vide B de Y, il existe un réel $C > 0$ et un compact non vide A de X tels que pour tout $n \geqslant 0$, pour tout $s \in \Gamma(Y, V \otimes L^{\otimes n})$ et pour tout $\widetilde{s} \in \Gamma(X, F \otimes L^{\otimes n})$ vérifiant $p(\widetilde{s}) = i_*s$, on ait

$$\|\widetilde{s}\|_{L^\infty(A)} \geqslant Ce^{-n\varepsilon}\|s\|_{L^\infty(B)}.$$

[1] par exemple, compact, ou de Stein (cf. §§2.2–2.3)

(ii) Il existe un entier n_0 et, pour tout réel $\varepsilon > 0$ et pour tout compact non vide A de X, un réel $C' > 0$ et un compact non vide B de Y, tels que pour tout $n \geqslant n_0$ et pour tout $s \in \Gamma(Y, V \otimes L^{\otimes n})$ il existe $\widetilde{s} \in \Gamma(X, F \otimes L^{\otimes n})$ vérifiant $p(\widetilde{s}) = i_* s$ et

$$\|\widetilde{s}\|_{L^\infty(A)} \leqslant C' e^{n\varepsilon} \|s\|_{L^\infty(B)}.$$

On trouvera dans la littérature des énoncés de prolongement analogues à celui-ci (souvent dans le cas particulier $F = E$ et $V = E|_Y$) établis pour la plupart au moyen de la technique des estimées L^2 de Hörmander, et pouvant éventuellement donner un contrôle plus fort sur les normes, mais au prix de certaines hypothèses de lissité (voir par exemple [4], [15], ou encore [17], chap. 3) ou de la connaissance *a priori* de l'existence d'un prolongement convenable de s sur un voisinage donné de Y (cf. [19], sect. 2). L'originalité du résultat présenté ici est donc de s'affranchir totalement de ces hypothèses annexes. Pour y parvenir on utilise la théorie des espaces 1-convexes (après s'être placé sur le fibré en disques du dual $L^\vee$) et les techniques d'espaces de Fréchet de la théorie topologique des faisceaux cohérents sur un espace analytique complexe, suivant en cela la méthode introduite par Bost dans [2], app. A.

Conventions. — On utilisera la terminologie usuelle des espaces analytiques complexes (non nécessairement réduits) et des fonctions continues, C^∞, holomorphes, plurisousharmoniques, etc. sur ceux-ci, telle qu'elle est rappelée par exemple au début de [9] et de [16] (on gardera notamment à l'esprit le théorème 5.3.1 de [5], selon lequel les deux définitions raisonnables des fonctions plurisousharmoniques coïncident).

Les métriques (non nécessairement hermitiennes) sur les faisceaux analytiques localement libres seront toujours supposées continues. Un faisceau inversible hermitien $\overline{L}$ sur un espace analytique complexe sera dit à courbure semi-positive (resp. strictement positive) si, pour toute section l de L ne s'annulant pas sur un ouvert U, la fonction $-\log \|l\|$ est plurisousharmonique (resp. strictement plurisousharmonique) sur U.

Remerciements. — L'auteur remercie J.-B. Bost pour l'intérêt qu'il a manifesté à l'égard de ce travail et pour la version préliminaire de [2] qu'il a bien voulu lui communiquer.

1. Sous-quotients

1.1. — Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On rappelle que si M est un objet de $\mathcal{A}$, les sous-objets des quotients de M s'identifient naturellement aux quotients des sous-objets de M, ou encore aux gradués M_1/M_2 des filtrations à deux termes

$$M \supset M_1 \supset M_2. \tag{1.1.1}$$

De façon plus précise, on appelle *sous-quotient* de M la donnée d'une telle filtration (1.1.1). On remarquera que les sous-quotients des objets de $\mathcal{A}$ forment une catégorie additive (en générale non abélienne), un morphisme de $M \supset M_1 \supset M_2$ dans $N \supset N_1 \supset N_2$ étant un morphisme de M dans N qui envoie M_1 dans N_1 et M_2 dans N_2 ; un tel morphisme induit alors naturellement un morphisme entre les gradués M_1/M_2 et N_1/N_2.

Par restriction, les sous-quotients d'un objet M fixé forment aussi une catégorie, l'ensemble des morphismes de $M \supset M_1 \supset M_2$ dans $M \supset M'_1 \supset M'_2$ étant non vide si et seulement si M_1 est inclus dans M'_1 et M_2 dans M'_2, et alors par définition cet ensemble se réduit au seul morphisme déduit de l'identité de M. On prendra garde toutefois qu'il est alors possible que le morphisme induit de M_1/M_2 dans M'_1/M'_2 soit un isomorphisme sans pour autant que le morphisme de sous-quotients originel ne soit inversible ; une telle situation se produit par exemple lorsque M est un produit direct $A \times B$ et que l'on considère le morphisme naturel entre les sous-quotients $A \times B \supset A \times \{0\} \supset \{0\}$ et $A \times B \supset A \times B \supset \{0\} \times B$, les deux gradués associés s'identifiant naturellement à A.

Il sera commode pour la suite d'utiliser la notion de sous-quotient sous la forme suivante :

1.2. Définition. — Soient C et E deux objets d'une catégorie abélienne. On appelle *structure de sous-quotient de E sur C* la donnée d'un sous-quotient

$$E \supset E_1 \supset E_2 \tag{1.2.1}$$

de E et d'un isomorphisme

$$\varphi : C \xrightarrow{\sim} E_1/E_2 \tag{1.2.2}$$

de C sur le gradué associé.

1.3. — Ainsi, munir C d'une structure de sous-quotient de E équivaut encore à se donner, au choix :

(i) un sous-objet F de E et un morphisme surjectif $p : F \twoheadrightarrow C$ (prendre $F = E_1$ et p la surjection de noyau E_2 déduite de φ^{-1}) ;

(ii) un quotient Q de E et une injection $i : C \hookrightarrow Q$ (prendre $Q = E/E_2$ et i l'injection déduite de φ) ;

(iii) un complexe court

$$\mathcal{E} : E' \overset{i}{\hookrightarrow} E \overset{p}{\twoheadrightarrow} E'' \tag{1.3.1}$$

avec i injective, p surjective, et $p \circ i = 0$, et un isomorphisme

$$C \xrightarrow{\sim} H(\mathcal{E}) = \ker p / \operatorname{im} i \tag{1.3.2}$$

de C sur la cohomologie de $\mathcal{E}$ (prendre $E' = E_2$ et $E'' = E/E_1$).

Compte tenu de cette dernière caractérisation, on dira aussi parfois que les sous-quotients de E sont les objets de cohomologie de E.

Enfin on prendra garde, comme cela a déjà été signalé à la fin de 1.1, qu'il peut arriver qu'un même objet C admette plusieurs structures différentes de sous-quotient d'un même objet E.

1.4. — Soient E, F et G trois objets d'une catégorie abélienne. On va montrer que la donnée sur F d'une structure de sous-quotient de E et sur G d'une structure de sous-quotient de F détermine de façon naturelle sur G une structure de sous-quotient de E.

En effet, on dispose par hypothèse d'un isomorphisme $F \simeq E_1/E_2$ où $E_1 \supset E_2$ sont deux sous-objets de E et d'un isomorphisme $G \simeq F_1/F_2$ où $F_1 \supset F_2$ sont deux sous-objets de F. Par l'identification naturelle des sous-objets de E_1/E_2 aux sous-objets de E_1 contenant E_2, F_1 et F_2 se relèvent canoniquement en deux sous-objets $\widehat{F_1}$ et $\widehat{F_2}$ de E vérifiant les inclusions

$$E_1 \supset \widehat{F_1} \supset \widehat{F_2} \supset E_2, \tag{1.4.1}$$

de sorte que G peut bien être muni de la structure de sous-quotient de E définie par la filtration à deux termes $E \supset \widehat{F_1} \supset \widehat{F_2}$ et par l'isomorphisme composé $G \simeq F_1/F_2 \simeq \widehat{F_1}/\widehat{F_2}$.

1.5. Définition. — La structure de sous-quotient de E définie sur G au paragraphe précédent sera appelée *structure de sous-quotient composée* des structures de sous-quotient de E sur F et de F sur G.

Dans cette situation, on dira aussi parfois que G et F sont deux *sous-quotients emboîtés* de E.

1.6. — Soient $(K, |.|)$ un corps valué et E un K-espace vectoriel muni d'une norme $\|.\|$ compatible à $|.|$. Puisqu'un K-espace vectoriel V muni d'une structure de sous-quotient de E peut être vu, au choix, comme un sous-espace d'un quotient ou comme un quotient d'un sous-espace de E, il hérite naturellement d'une norme obtenue à partir de la norme de E en considérant respectivement la norme restreinte de la norme quotient ou la norme quotient de la norme restreinte. On se convaincra facilement que ces deux constructions donnent la même norme sur V ; de façon plus précise :

1.7. Définition. — Soient $(E, \|.\|)$ un $(K, |.|)$-espace vectoriel normé et V un K-espace vectoriel muni d'une structure de sous-quotient de E définie par une filtration $E \supset E_1 \supset E_2$ et un isomorphisme $\varphi : V \xrightarrow{\sim} E_1/E_2$. La norme de sous-quotient $\|.\|_{\mathrm{sq}}$ sur V est définie, pour $v \in V$, par la formule

$$\|v\|_{\mathrm{sq}} = \inf_{e \in E_1,\, \varphi(v) = \overline{e}} \|e\| \tag{1.7.1}$$

où l'on a noté $\overline{e}$ la classe dans E_1/E_2 de l'élément e de E_1.

Étudions comment cette construction se comporte relativement à la composition des structures de sous-quotient :

1.8. Proposition. — *Soient $(E, \|.\|_E)$ un $(K, |.|)$-espace vectoriel normé, F un K-espace vectoriel muni d'une structure de sous-quotient de E, et G un K-espace vectoriel muni d'une structure de sous-quotient de F. Alors la norme sur G sous-quotient de la norme sur F sous-quotient de $\|.\|_E$ coïncide avec la norme sur G sous-quotient de $\|.\|_E$ relativement à la structure de sous-quotient composée.*

On dira aussi que la formation des normes sous-quotient est transitive dans les sous-quotients emboîtés.

Démonstration. Notons $E \supset E_1 \supset E_2$ et $F \supset F_1 \supset F_2$ les filtrations et $p : E_1 \twoheadrightarrow F$ et $q : F_1 \twoheadrightarrow G$ les projections de noyaux E_2 et F_2 définissant les structures de sous-quotient considérées. Notons aussi $\widehat{F_1}$ et $\widehat{F_2}$ les sous-espaces de E relevant F_1 et F_2 comme en (1.4.1), de sorte que $\widehat{F_1}$ (resp. $\widehat{F_2}$) est l'ensemble des éléments de E dont l'image par p appartient à F_1 (resp. F_2) et que l'application composée $q \circ (p|_{\widehat{F_1}})$ de $\widehat{F_1}$ sur G est bien une projection de noyau $\widehat{F_2}$ et définit la structure de sous-quotient composée. Alors, par construction, notant $\|.\|_F$ la norme sur F sous-quotient de $\|.\|_E$, et $\|.\|_G$ la norme sur G sous-quotient de $\|.\|_F$, on a pour $g \in G$:

$$\begin{aligned} \|g\|_G &= \inf_{f \in F_1,\, q(f)=g} \|f\|_F \\ &= \inf_{f \in F_1,\, e \in E_1,\, q(f)=g,\, p(e)=f} \|e\|_E \\ &= \inf_{e \in \widehat{F_1},\, q(p(e))=g} \|e\|_E, \end{aligned} \tag{1.8.1}$$

ce qui correspond bien à la norme de g pour la structure de sous-quotient composée. □

Il sera aussi utile de pouvoir comparer les deux normes sous-quotient de deux normes sur un même espace :

1.9. Proposition. — *Soient C un réel, E un K-espace vectoriel muni de deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ vérifiant l'inégalité*

$$\|.\| \leqslant C\|.\|' \tag{1.9.1}$$

et V un K-espace vectoriel muni d'une structure de sous-quotient de E. Alors les normes sous-quotient $\|.\|_{\mathrm{sq}}$ de $\|.\|$ et $\|.\|'_{\mathrm{sq}}$ de $\|.\|'$ sur V vérifient

$$\|.\|_{\mathrm{sq}} \leqslant C\|.\|'_{\mathrm{sq}}. \tag{1.9.2}$$

Démonstration. L'inégalité (1.9.1) passe à la borne inférieure dans (1.7.1). □

2. Prolongement de sections holomorphes avec contrôle des normes

2.1. — On rappelle (cf. [11], chap. V §6) que si X est un espace analytique complexe et $\mathcal{C}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, il existe une unique topologie de Fréchet sur l'espace des sections globales $\Gamma(X, \mathcal{C})$, appelée topologie canonique, qui rende continues toutes les applications de localisation

$$\Gamma(X, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}_x \tag{2.1.1}$$

en les fibres $x \in X$, lorsque le module $\mathcal{C}_x$ sur l'algèbre analytique locale $\mathcal{O}_{X,x}$ est muni de la topologie canonique au sens de [13] (*i.e.* de la «Folgentopologie» de [10]). On dispose en outre des propriétés suivantes :

(i) Si X est réduit, et si $\overline{\mathcal{E}}$ est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre métrisé de type fini, la topologie canonique sur $\Gamma(X, \mathcal{E})$ coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur les compacts (cela résulte par exemple de [11] V §6 th. 8, du caractère local de la condition définissant la topologie canonique, et des compatibilités évidentes aux sommes directes).

(ii) Si $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ est un sous-$\mathcal{O}_X$-module cohérent, la topologie canonique sur $\Gamma(X, \mathcal{C}')$ est la topologie induite par la topologie canonique sur $\Gamma(X, \mathcal{C})$ pour l'inclusion naturelle (cela résulte de l'assertion analogue pour la topologie canonique sur les fibres : [10] II §2.7 Satz 9, pp. 97–99).

(iii) Si $i : Z \hookrightarrow X$ est un sous-espace analytique fermé et si $\mathcal{D}$ est un $\mathcal{O}_Z$-module cohérent, l'identification naturelle de $\Gamma(Z, \mathcal{D})$ et de $\Gamma(X, i_*\mathcal{D})$ est un homéomorphisme pour les topologies canoniques sur ces espaces (c'est une conséquence directe des définitions).

2.2. — On utilisera aussi dans cette partie la théorie des espaces 1-convexes élaborée dans [1] et [16] (et dont on peut faire remonter l'origine, pour la partie qui nous servira, aux idées introduites au cours de la solution par Grauert du problème de Levi, [8]). On suivra ici la présentation de [18] :

Proposition-définition. — *Soit X un espace analytique complexe. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe sur X une fonction d'exhaustion continue qui est strictement plurisousharmonique hors d'un certain compact.

(ii) L'espace X est holomorphiquement convexe et admet un sous-ensemble analytique compact sans points isolés maximal.

(iii) L'espace X est une modification propre (au sens de [9]) d'un espace de Stein en un nombre fini de points.

(iv) Pour tout faisceau analytique cohérent F sur X et tout entier $q \geqslant 1$, le groupe de cohomologie $H^q(X, F)$ est de dimension finie.

Si l'une de ces conditions est vérifiée, on dit que X est 1-convexe.

Si X est 1-convexe, l'espace de Stein Y introduit en (iii) est unique (à isomorphisme près) ; c'est le réduit de Cartan-Remmert de X. Le sous-ensemble analytique compact maximal de (ii) est alors le support du lieu exceptionnel S de la modification $X \longrightarrow Y$, et pour tout faisceau analytique cohérent F sur X et tout entier $q \geqslant 1$ on dispose d'un isomorphisme naturel $H^q(X, F) \simeq H^q(S, F|_S)$. En outre, parmi les fonctions d'exhaustion continues dont l'existence est assurée par (i), il en est une qui est strictement plurisousharmonique en tout point du complémentaire de S.

L'implication (i)$\Longrightarrow$(iv), qui est la seule dont nous aurons réellement besoin ici, est prouvée dans [1]. Les autres résultats découlent de [16], th. V, et des caractérisations classiques des espaces de Stein. On pourra consulter [18] pour un exposé synthétique de tout ceci.

2.3. — Parmi les exemples élémentaires d'espaces 1-convexes on trouve les espaces de Stein d'une part, et les espaces compacts d'autre part. Tout sous-espace fermé d'un espace 1-convexe est 1-convexe.

Un autre procédé de construction d'espaces 1-convexes dont nous aurons besoin est celui qui suit.

2.4. — Pour tout espace analytique complexe réduit X et pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible L muni d'une métrique hermitienne continue $\|.\|$, on note $V(X, L)$ l'espace total du fibré en droites dual $L^\vee$ et, pour tout réel $r > 0$, $D_r(X, L)$ son fibré en disques ouverts de rayon r, relativement à la norme duale $\|.\|^\vee$. Notons aussi

$$\pi : D_r(X, L) \twoheadrightarrow X \tag{2.4.1}$$

la projection naturelle et

$$\iota : X \hookrightarrow D_r(X, L) \tag{2.4.2}$$

la section nulle. Alors :

2.5. Proposition. — *Avec ces notations, si X est 1-convexe et si la métrique continue $\|.\|$ sur L est à courbure strictement positive, le fibré en disques $D_r(X, L)$ est lui aussi 1-convexe.*

Démonstration. Supposons donnée une fonction d'exhaustion continue φ sur X strictement plurisousharmonique hors d'un compact K, et considérons aussi une fonction strictement convexe continue $\chi : [-\infty, \log r[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ tendant vers 0 en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $\log r$. Alors il découle de l'hypothèse de stricte positivité sur la courbure de $\|.\|$ que la fonction ψ définie pour $z \in D_r(X, L)$ par la formule

$$\psi(z) = \varphi(\pi(z)) + \chi(\log \|z\|^\vee), \tag{2.5.1}$$

continue et exhaustive sur $D_r(X, L)$, est bien strictement plurisousharmonique hors du compact $\iota(K)$. $\square$

Rappelons enfin la version suivante du théorème de l'application ouverte de Banach (cf. p. ex. [3], I §3, cor. 3 p. I.19 et ex. 4 p. I.28) :

2.6. Théorème. — *Soient E et F deux espaces de Fréchet et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue à conoyau de dimension finie. Alors le sous-espace $u(E)$ de F est fermé et l'application $u : E \longrightarrow u(E)$ est ouverte. En particulier, pour toute semi-norme continue p sur E il existe une semi-norme continue q sur F telle que, pour tout y dans $u(E)$, il existe x dans E vérifiant*

$$u(x) = y \tag{2.6.1}$$

et

$$p(x) \leqslant q(y). \tag{2.6.2}$$

Énonçons maintenant le résultat principal de cette section :

2.7. Théorème B. — *Soient X un espace analytique 1-convexe réduit, $\overline{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module inversible hermitien à courbure strictement positive, $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre métrisé de type fini, $i : Y \hookrightarrow X$ un sous-espace analytique fermé réduit de X, et $\overline{V}$ un $\mathcal{O}_Y$-module localement libre métrisé de type fini. On suppose donnés un sous-$\mathcal{O}_X$-module cohérent F de E et un morphisme surjectif*

$$p : F \twoheadrightarrow i_* V \tag{2.7.1}$$

de $\mathcal{O}_X$-modules cohérents. Alors :

(i) Pour tout réel $\varepsilon > 0$ et pour tout compact non vide B de Y, il existe un réel $C > 0$ et un compact non vide A de X tels que pour tout $n \geqslant 0$, pour tout $s \in \Gamma(Y, V \otimes L^{\otimes n})$ et pour tout $\widetilde{s} \in \Gamma(X, F \otimes L^{\otimes n})$ vérifiant $p(\widetilde{s}) = i_* s$, on ait

$$\|\widetilde{s}\|_{L^\infty(A)} \geqslant C e^{-n\varepsilon} \|s\|_{L^\infty(B)}. \tag{2.7.2}$$

(ii) Il existe un entier n_0 et, pour tout réel $\varepsilon > 0$ et pour tout compact non vide A de X, un réel $C' > 0$ et un compact non vide B de Y, tels que pour tout $n \geqslant n_0$ et pour tout $s \in \Gamma(Y, V \otimes L^{\otimes n})$ il existe $\widetilde{s} \in \Gamma(X, F \otimes L^{\otimes n})$ vérifiant $p(\widetilde{s}) = i_* s$ et

$$\|\widetilde{s}\|_{L^\infty(A)} \leqslant C' e^{n\varepsilon} \|s\|_{L^\infty(B)}. \tag{2.7.3}$$

La preuve de ce théorème, directement adaptée de [2], va occuper les paragraphes 2.8 à 2.14. Indiquons brièvement les principales étapes du raisonnement. On commence par identifier les sections de $F \otimes L^{\otimes n}$ et de $V \otimes L^{\otimes n}$, pour n variable, à des sections des relevés de F et de V au fibré en disques unité de l'espace total de $L^\vee$, qui sont munis de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Relevant aussi la surjection p au fibré en disques, on obtient ainsi un morphisme entre espaces de Fréchet, dont on montre au moyen de l'hypothèse de 1-convexité qu'il est à conoyau de dimension finie. La première inégalité énoncée dans le théorème traduit alors la continuité de ce morphisme, tandis que la seconde s'obtient en lui appliquant le théorème de l'application ouverte. Donnons maintenant les détails de cette démonstration :

2.8. — Conservons les notations introduites en 2.4, en posant pour alléger l'écriture

$$D(X) = D_1(X, L) \tag{2.8.1}$$

et, si A est une partie de X, $D_r(A, L)$ l'ensemble des points de $D_r(X, L)$ dont l'image par la projection canonique π est dans A ; on adoptera aussi les notations analogues sur Y. Remarquons notamment que $D_r(Y, L)$ s'identifie au produit fibré de $D_r(X, L)$ et de Y au-dessus de X. On notera encore

$$i : D(Y) \hookrightarrow D(X) \tag{2.8.2}$$

l'immersion fermée naturelle.

Par 2.1(i), la famille de semi-normes

$$\|.\|_{D(X),A,r} = \|.\|_{L^\infty(D_r(A,L),\pi^*E)} \tag{2.8.3}$$

(resp. $\|.\|_{D(Y),B,r} = \|.\|_{L^\infty(D_r(B,L),\pi^*V)}$), pour A compact non vide de X (resp. B compact non vide de Y) et $r \in]0, 1[$, définit la topologie de Fréchet canonique sur $\Gamma(D(X), \pi^*E)$ (resp. sur $\Gamma(D(Y), \pi^*V)$).

La projection $\pi : D(X) \twoheadrightarrow X$ étant plate, l'injection $F \hookrightarrow E$ sur X se relève en $\pi^*F \hookrightarrow \pi^*E$ sur $D(X)$ et, passant aux sections globales, il résulte de 2.1(ii) que la topologie canonique sur

$$\Gamma(D(X), \pi^*F) \hookrightarrow \Gamma(D(X), \pi^*E) \tag{2.8.4}$$

est encore définie par la famille des semi-normes $\|.\|_{D(X),A,r}$.

2.9. — Remarquons que l'action naturelle du groupe $\mathbb{G}_m$ sur $V(X, L)$, définie par l'action des homothéties sur les fibres de $L^\vee$, se restreint en une action continue du groupe unitaire $U(1) = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| = 1\}$ sur $D(X)$. Pour tout entier k notons alors

$$\Gamma(D(X), \pi^*E)_k \subset \Gamma(D(X), \pi^*E) \tag{2.9.1}$$

le sous-espace formé des sections analytiques f de π^*E sur $D(X)$ vérifiant

$$f(uz) = u^k f(z) \tag{2.9.2}$$

pour tous $u \in U(1)$ et $z \in D(X)$, où l'on a identifié les fibres $(\pi^*E)_z$ et $(\pi^*E)_{uz}$ à leur image commune $E_{\pi(z)} = E_{\pi(uz)}$ par π.

Notons aussi

$$q_k : \Gamma(D(X), \pi^*E) \twoheadrightarrow \Gamma(D(X), \pi^*E)_k \tag{2.9.3}$$

la projection définie par la formule

$$q_k(f)(z) = \int_0^1 e^{-2i\pi kt} f(e^{2i\pi t}z)dt \ \in E_{\pi(z)}. \tag{2.9.4}$$

Pour tous A compact de X et $r \in]0,1[$ on a clairement

$$\|q_k(f)\|_{D(X),A,r} \leqslant \|f\|_{D(X),A,r}, \tag{2.9.5}$$

de sorte que q_k est continue.

Remarquons enfin que le sous-espace $\Gamma(D(X), \pi^*E)_k$ s'identifie naturellement à l'espace $\Gamma(X, E \otimes L^{\otimes k})$ des sections analytiques de $E \otimes L^{\otimes k}$ sur X, cette identification associant à l'élément $s \in \Gamma(X, E \otimes L^{\otimes k})$ la section analytique f de π^*E sur $D(X)$ définie pour $z \in D(X)$ par

$$f(z) =< s(\pi(z)), z^{\otimes k} > \in E_{\pi(z)}, \tag{2.9.6}$$

où $s(\pi(z))$ appartient à la fibre $(E \otimes L^{\otimes k})_{\pi(z)}$ et où $z^{\otimes k}$ est considéré comme un élément de la droite complexe $L^{\vee \otimes k}_{\pi(z)}$. Avec ces notations, on a alors clairement

$$\|f\|_{D(X),A,r} = r^k \|s\|_{L^\infty(A)} \tag{2.9.7}$$

pour tous A compact de X et $r \in]0,1[$.

2.10. — De la même façon, on dispose d'une action continue naturelle de $U(1)$ sur $\Gamma(D(X), \pi^*F)$ (resp. sur $\Gamma(D(Y), \pi^*V)$) à laquelle sont encore associés des sous-espaces propres $\Gamma(D(X), \pi^*F)_k$ (resp. $\Gamma(D(Y), \pi^*V)_k$) s'identifiant naturellement à $\Gamma(X, F \otimes L^{\otimes k})$ (resp. à $\Gamma(Y, V \otimes L^{\otimes k})$) et des projections q_k définies par les mêmes formules, de sorte que les inégalités et égalités analogues à (2.9.5) et (2.9.7) restent valides.

Remarquons notamment que l'inclusion (2.8.4) est compatible à toutes ces constructions.

2.11. — En utilisant à nouveau la platitude de π pour relever sur $D(X)$ la suite exacte courte $0 \longrightarrow \ker p \longrightarrow F \longrightarrow i_*V \longrightarrow 0$, et en passant à la cohomologie, on obtient une suite exacte

$$\Gamma(D(X), \pi^*F) \longrightarrow \Gamma(D(X), \pi^*i_*V) \longrightarrow H^1(D(X), \pi^* \ker p) \tag{2.11.1}$$

où, par la proposition 2.5 et par la caractérisation 2.2(iv) des espaces 1-convexes, le groupe de cohomologie $H^1(D(X), \pi^* \ker p)$ est de dimension finie. Compte tenu de 2.1(iii), $\Gamma(D(X), \pi^*i_*V) = \Gamma(D(X), i_*\pi^*V)$ s'identifie homéomorphiquement à $\Gamma(D(Y), \pi^*V)$, et l'on en déduit une application linéaire continue

$$\rho : \Gamma(D(X), \pi^*F) \longrightarrow \Gamma(D(Y), \pi^*V) \tag{2.11.2}$$

à conoyau de dimension finie.

2.12. — La continuité de ρ implique que, pour tout réel $\varepsilon > 0$ et pour tout compact B de Y, il existe $C > 0$, $r \in]0, 1[$ et A compact de X tels que, pour tout $\widetilde{f} \in \Gamma(D(X), \pi^*F)$, posant $f = \rho(\widetilde{f})$, on ait

$$\|f\|_{D(Y),B,e^{-\varepsilon}} \leqslant C^{-1}\|\widetilde{f}\|_{D(X),A,r}. \tag{2.12.1}$$

Soient maintenant $n \geqslant 0$, $s \in \Gamma(Y, V \otimes L^{\otimes n})$ et $\widetilde{s} \in \Gamma(X, F \otimes L^{\otimes n})$ vérifiant $p(\widetilde{s}) = i_*s$. Si l'on note $f \in \Gamma(D(Y), \pi^*V)_n$ et $\widetilde{f} \in \Gamma(D(X), \pi^*F)_n$ les éléments qui leur sont associés par l'analogue de (2.9.6), la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(D(X), \pi^*F)_n & \xrightarrow{\rho} & \Gamma(D(Y), \pi^*V)_n \\ \| & & \| \\ \Gamma(X, F \otimes L^{\otimes n}) & \xrightarrow{(i_*)^{-1} \circ p} & \Gamma(Y, V \otimes L^{\otimes n}) \end{array} \tag{2.12.2}$$

implique qu'on a bien $f = \rho(\widetilde{f})$, et (2.9.7) et (2.12.1) donnent

$$\begin{aligned} \|\widetilde{s}\|_{L^\infty(A)} &= \|\widetilde{f}\|_{D(X),A,1} \\ &\geqslant \|\widetilde{f}\|_{D(X),A,r} \\ &\geqslant C\|f\|_{D(Y),B,e^{-\varepsilon}} \\ &= Ce^{-n\varepsilon}\|s\|_{L^\infty(B)}, \end{aligned} \tag{2.12.3}$$

ce qui démontre le point (i) du théorème.

2.13. — D'autre part, on peut aussi appliquer le théorème 2.6 à l'application ρ : on trouve ainsi que l'image $\mathrm{im}(\rho) = \rho(\Gamma(D(X), \pi^*F))$ de ρ dans $\Gamma(D(Y), \pi^*V)$ est fermée (de sorte que la topologie quotient sur $\operatorname{coker} \rho$ coïncide avec sa topologie usuelle de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie) et que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout compact A de X, il existe $C' > 0$, $r' \in]0, 1[$ et B compact de Y tels que, pour tout $f \in \mathrm{im}(\rho)$, il existe $\widetilde{f} \in \Gamma(D(X), \pi^*F)$ vérifiant $f = \rho(\widetilde{f})$ et

$$\|\widetilde{f}\|_{D(X),A,e^{-\varepsilon}} \leqslant C' \|f\|_{D(Y),B,r'}. \tag{2.13.1}$$

Par ailleurs, l'application ρ étant clairement $U(1)$-équivariante, on en déduit par passage au quotient une action continue de $U(1)$ sur $\operatorname{coker} \rho$. Ceci permet de considérer la décomposition

$$\operatorname{coker} \rho = \bigoplus_n (\operatorname{coker} \rho)_n \tag{2.13.2}$$

de ce conoyau en somme (finie !) de sous-espaces propres pour cette action, où $(\operatorname{coker} \rho)_n$ est l'espace propre associé au caractère $(u \mapsto u^n)$ de $U(1)$. Notons alors n_0 le plus petit entier tel que $(\operatorname{coker} \rho)_n$ soit nul pour $n \geqslant n_0$.

2.14. — Donnons-nous maintenant un réel $\varepsilon > 0$, un compact A de X, un entier $n \geqslant n_0$, et un élément $s \in \Gamma(Y, V \otimes L^{\otimes n})$ auquel par l'analogue de (2.9.6) on peut associer $f \in \Gamma(D(Y), \pi^*V)_n$. Puisque $(\operatorname{coker} \rho)_n$ est nul, f appartient à $\mathrm{im}(\rho)$, et par la discussion qui précède on peut écrire $f = \rho(\widetilde{f})$ où $\widetilde{f} \in \Gamma(D(X), \pi^*F)$ vérifie (2.13.1). L'application ρ étant compatible aux projections q_n, on a encore $f = \rho(q_n(\widetilde{f}))$ et, le diagramme (2.12.2) étant commutatif, notant $\widetilde{s} \in \Gamma(X, F \otimes L^{\otimes n})$ l'élément associé à $q_n(\widetilde{f})$, on trouve

$$p(\widetilde{s}) = i_* s \tag{2.14.1}$$

avec, par (2.9.5), (2.9.7) et (2.13.1),

$$\begin{aligned} \|\widetilde{s}\|_{L^\infty(A)} &= e^{n\varepsilon} \|q_n(\widetilde{f})\|_{D(X),A,e^{-\varepsilon}} \\ &\leqslant e^{n\varepsilon} \|\widetilde{f}\|_{D(X),A.e^{-\varepsilon}} \\ &\leqslant C' e^{n\varepsilon} \|f\|_{D(Y),B,r'} \\ &\leqslant C' e^{n\varepsilon} \|f\|_{D(Y),B,1} \\ &= C' e^{n\varepsilon} \|s\|_{L^\infty(B)}, \end{aligned} \tag{2.14.2}$$

ce qui démontre le point (ii).

La preuve du théorème étant achevée, indiquons maintenant comment celui-ci peut s'interpréter en termes de normes sous-quotient.

2.15. — Soient X un espace analytique *compact* réduit, $\overline{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module inversible hermitien à courbure strictement positive, $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre métrisé de type fini, $i : Y \hookrightarrow X$ un sous-espace analytique fermé réduit de X, et $\overline{V}$ un $\mathcal{O}_Y$-module localement libre métrisé de type fini.

On suppose le $\mathcal{O}_X$-module cohérent i_*V muni d'une structure de sous-quotient de E ; rappelons que ceci correspond à la donnée d'un isomorphisme $\varphi : i_*V \simeq E_1/E_2$ où $E \supset E_1 \supset E_2$ est une filtration à deux termes de E par des sous-$\mathcal{O}_X$-modules cohérents.

Le faisceau L étant ample, le morphisme naturel

$$\psi : \Gamma(X, E_1 \otimes L^{\otimes n})/\Gamma(X, E_2 \otimes L^{\otimes n}) \longrightarrow \Gamma(X, (E_1/E_2) \otimes L^{\otimes n}) \tag{2.15.1}$$

est inversible pour tout n assez grand, de sorte que le morphisme composé

$$\psi^{-1} \circ \varphi : \Gamma(X, i_*V \otimes L^{\otimes n}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, E_1 \otimes L^{\otimes n})/\Gamma(X, E_2 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) \tag{2.15.2}$$

munit $\Gamma(X, i_*V \otimes L^{\otimes n})$ d'une structure de sous-quotient de $\Gamma(X, E \otimes L^{\otimes n})$, relativement à la filtration

$$\Gamma(X, E \otimes L^{\otimes n}) \supset \Gamma(X, E_1 \otimes L^{\otimes n}) \supset \Gamma(X, E_2 \otimes L^{\otimes n}). \tag{2.15.3}$$

Ainsi le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\Gamma(X, i_*V \otimes L^{\otimes n}) = \Gamma(Y, V \otimes i^*L^{\otimes n})$ dispose-t-il :
- de la norme uniforme $\|.\|_{L^\infty(Y)}$ sur Y
- de la norme $\|.\|_{\mathrm{sq}, L^\infty(X)}$ provenant par la structure de sous-quotient de la norme uniforme sur X.

Alors :

2.16. Corollaire. — *Sous les hypothèses 2.15, il existe un entier n_0 et, pour tout réel $\varepsilon > 0$, deux réels $C > 0$ et $C' > 0$, tels que pour tout $n \geqslant n_0$ les deux normes sur $\Gamma(X, i_*V \otimes L^{\otimes n})$ ainsi construites vérifient les inégalités*

$$\|.\|_{\mathrm{sq}, L^\infty(X)} \geqslant Ce^{-n\varepsilon}\|.\|_{L^\infty(Y)} \tag{2.16.1}$$

et

$$\|.\|_{\mathrm{sq}, L^\infty(X)} \leqslant C'e^{n\varepsilon}\|.\|_{L^\infty(Y)}. \tag{2.16.2}$$

Démonstration. Notant $F = E_1$ et $p : F \twoheadrightarrow i_*V$ la projection définissant la structure de sous-quotient sur i_*V (suivant la caractérisation 1.3(i)), on se retrouve en position d'appliquer le théorème B. Compte tenu de la définition (1.7.1) des normes sous-quotient, l'inégalité (2.16.1) n'est autre qu'une traduction du point (i) du théorème où l'on a choisi $B = Y$, qui est bien compact puisque X l'est par hypothèse. De la même façon, l'inégalité (2.16.2) résulte du point (ii) du théorème avec $A = X$. $\square$

3. Théorème de Hilbert-Samuel arithmétique

3.1. — On supposera ici le lecteur familier avec le langage de la géométrie d'Arakelov. Néanmoins, afin d'éviter toute ambiguïté, on commence par rappeler certaines notions de base et préciser les normalisations qui seront utilisées.

Soit K un corps de nombres d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$. Un $\mathcal{O}_K$-module normé $\overline{M}$ est la donnée d'un $\mathcal{O}_K$-module de type fini M et, pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, d'une norme $\|.\|_\sigma$ sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_\sigma = M \otimes_{\mathcal{O}_K,\sigma} \mathbb{C}$, ces normes formant une famille invariante sous l'action de la conjugaison complexe. Notons alors M_{tors} le sous-module de torsion de M, $M_{\mathrm{libre}} = M/M_{\mathrm{tors}}$ son plus grand quotient sans torsion, qui s'identifie à un réseau de $M_\mathbb{R} = M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$, et enfin $B \subset M_\mathbb{R}$ la boule unité de $M_\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $m \in M_\mathbb{R}$ dont les images par les applications naturelles $M_\mathbb{R} \longrightarrow M_\sigma$ sont de norme $\|m\|_\sigma \leqslant 1$ pour tout σ. Avec ces notations, la caractéristique d'Euler-Poincaré arithmétique de $\overline{M}$ est le réel

$$\widehat{\chi}\left(\overline{M}\right) = \log \# M_{\mathrm{tors}} - \log \mathrm{vol}(M_\mathbb{R}/M_{\mathrm{libre}}) \tag{3.1.1}$$

où le volume $\mathrm{vol}(M_\mathbb{R}/M_{\mathrm{libre}})$ est pris relativement à l'unique mesure de Haar sur $M_\mathbb{R}$ qui donne à B le volume 1. Par exemple, si $\overline{\mathcal{O}_K}^k$ est le $\mathcal{O}_K$-module libre canonique de rang k muni des métriques hermitiennes évidentes, on a $\widehat{\chi}\left(\overline{\mathcal{O}_K}^k\right) = -\log\left(\Gamma(k/2+1)^{r_1}\Gamma(k+1)^{r_2}\left(\pi^{-\frac{r_1+2r_2}{2}}2^{-r_2}D^{1/2}\right)^k\right)$, où r_1 et $2r_2$ sont les nombres de plongements réels et complexes de K dans $\mathbb{C}$, et D son discriminant absolu. On définit alors le degré d'Arakelov d'un $\mathcal{O}_K$-module normé $\overline{M}$ de rang $k = \dim_K M_K$ par la formule

$$\widehat{\deg}\,\overline{M} = \widehat{\chi}\left(\overline{M}\right) - \widehat{\chi}\left(\overline{\mathcal{O}_K}^k\right) \tag{3.1.2}$$

(cette notion n'est standard que dans le cas hermitien, mais on l'utilisera par commodité sous cette forme pour des normes quelconques), de sorte que

$$|\,\widehat{\deg}\,\overline{M} - \widehat{\chi}\left(\overline{M}\right)| \leqslant c.k\log k \tag{3.1.3}$$

où c est une constante ne dépendant que de K.

3.2. — On vérifie aisément que si $(\|.\|_\sigma)_\sigma$ et $(\|.\|'_\sigma)_\sigma$ sont deux familles de normes munissant un même $\mathcal{O}_K$-module de type fini M de deux structures de $\mathcal{O}_K$-module normé $\overline{M}$ et $\overline{M}'$, et si $C > 0$ est un réel tel que pour tout σ on ait

$$\|.\|_\sigma \leqslant C\|.\|'_\sigma, \tag{3.2.1}$$

alors

$$\widehat{\deg}\,\overline{M} \geqslant \widehat{\deg}\,\overline{M}' - \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}} M \log C \tag{3.2.2}$$

où $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}} M = \dim_{\mathbb{R}} M_{\mathbb{R}} = [K:\mathbb{Q}]\,\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_K} M$.

3.3. — Lorsque les normes $\|.\|_\sigma$ proviennent de produits scalaires hermitiens $(.,.)_\sigma$ sur M_σ, on dit que le $\mathcal{O}_K$-module normé $\overline{M}$ est un $\mathcal{O}_K$-module hermitien. On vérifie alors que le degré d'Arakelov de $\overline{M}$ peut aussi s'exprimer sous la forme

$$\widehat{\deg}\,\overline{M} = \log \#M/(s_1,\ldots,s_k) - \sum_\sigma \log \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_{\bigwedge^k M_\sigma} \tag{3.3.1}$$

où $s_1,\ldots,s_k$ sont des éléments de M dont les images dans le K-espace vectoriel M_K en forment une base, et où $\|.\|_{\bigwedge^k M_\sigma}$ est la norme hermitienne puissance extérieure k-ième de $\|.\|_\sigma$.

Si $\overline{M}$ est un $\mathcal{O}_K$-module hermitien, et si

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow 0 \tag{3.3.2}$$

est une suite exacte courte de $\mathcal{O}_K$-modules de type fini, les normes restreintes (resp. quotient) sur N (resp. sur Q) sont encore hermitiennes, et pour les structures de $\mathcal{O}_K$-modules hermitiens correspondantes on a

$$\widehat{\deg}\,\overline{M} = \widehat{\deg}\,\overline{N} + \widehat{\deg}\,\overline{Q}. \tag{3.3.3}$$

3.4. Définition — Soit X un espace analytique complexe réduit. On appelle *forme volume* sur X la donnée sur chaque composante irréductible de X d'une forme différentielle continue réelle positive de degré maximal, non nulle hors d'un fermé analytique strict (contenant notamment le lieu singulier de cette composante).

D'une forme volume sur X on déduit une mesure positive en prenant la somme des intégrales sur (le lieu lisse de) chaque composante.

Remarquons que tout espace analytique complexe réduit projectif admet une telle forme volume. On peut par exemple en construire une en fixant un plongement projectif et en munissant chaque composante de dimension k de la restriction de la puissance k-ième de la forme de Fubini-Study.

3.5. — Considérons maintenant $\mathfrak{X}$ un schéma projectif sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ de fibre générique $\mathfrak{X}_K$ réduite, $\overline{\mathcal{L}}$ un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module inversible ample hermitien à courbure semi-positive, et $\overline{\mathcal{C}}$ un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent muni d'une structure de sous-quotient d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module localement libre métrisé ; plus précisément, $\overline{\mathcal{C}}$ correspond à la donnée :

– d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathcal{C}$,
– d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module localement libre de type fini métrisé $\overline{\mathcal{E}}$,
– d'une filtration à deux termes $\mathcal{E} \supset \mathcal{E}_1 \supset \mathcal{E}_2$ de $\mathcal{E}$ par des sous-$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents, et
– d'un isomorphisme $\varphi : \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2$.

On dira que $\overline{\mathcal{C}}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent muni de métriques de sous-quotient.

Notons $d = \dim |\mathcal{C}|$ la dimension du support de $\mathcal{C}$ (ainsi $d \leqslant \dim \mathfrak{X}$) et

$$[\mathcal{C}] = \sum_{x \in \mathfrak{X}_{(d)}} (\lg_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} \mathcal{C}_x)[x] \tag{3.5.1}$$

le cycle de dimension d associé. On supposera enfin $\mathfrak{X}(\mathbb{C})$ muni d'une forme volume invariante sous l'action de la conjugaison complexe, définissant une mesure positive μ. On aura alors à considérer l'une des deux situations suivantes :

Hypothèse (L^∞) : pour tout entier n, $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ est muni d'une structure de $\mathcal{O}_K$-module normé au moyen des normes uniformes sur les $\mathfrak{X}_\sigma(\mathbb{C})$, soit

$$\|s\|_{L^\infty,\sigma} = \max_{x \in \mathfrak{X}_\sigma(\mathbb{C})} \|s(x)\| \tag{3.5.2}$$

pour $s \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma$.

Hypothèse $(L^2(\mu))$: pour tout entier n, $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ est muni d'une structure de $\mathcal{O}_K$-module normé (et même hermitien si $\overline{\mathcal{E}}$ l'est) au moyen des normes d'intégration $L^2(\mu)$ sur les $\mathfrak{X}_\sigma(\mathbb{C})$, soit

$$\|s\|_{L^2(\mu),\sigma} = \left(\int_{\mathfrak{X}_\sigma(\mathbb{C})} \|s(x)\|^2 d\mu(x) \right)^{1/2}. \tag{3.5.3}$$

Ces normes choisies, munissons alors $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ et $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ des normes restreintes, et $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})/\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ des normes quotient.

3.6. Définition — La fonction de Hilbert-Samuel arithmétique

$$h(\overline{\mathcal{C}}; .) : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{3.6.1}$$

du $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent muni de métriques de sous-quotient $\overline{\mathcal{C}}$ est donnée par la formule

$$h(\overline{\mathcal{C}}; n) = \widehat{\deg}\, \overline{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})/\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})}. \tag{3.6.2}$$

Si l'on veut préciser sous laquelle des hypothèses (L^∞) ou ($L^2(\mu)$) on s'est placé pour construire cette fonction de Hilbert-Samuel arithmétique, on pourra noter celle-ci $h_{L^\infty}(\overline{\mathcal{C}};.)$ ou $h_{L^2(\mu)}(\overline{\mathcal{C}};.)$, respectivement.

3.7. — Remarquons que, les normes $L^2(\mu)$ étant hermitiennes si la métrique sur $\mathcal{E}$ l'est, il résulte de (3.3.3) qu'on peut alors aussi écrire

$$h_{L^2(\mu)}(\overline{\mathcal{C}};n) = \widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{L}^{\otimes n})}_{L^2(\mu)} - \widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{E}_2\otimes\mathcal{L}^{\otimes n})}_{L^2(\mu)}. \tag{3.7.1}$$

L'égalité analogue pour les normes L^∞ n'a en revanche *a priori* pas de raison d'être vérifiée.

3.8. — Dans tous les cas, remarquons aussi que, le faisceau $\mathcal{L}$ étant ample, le morphisme naturel

$$\psi : \Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{L}^{\otimes n})/\Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{E}_2\otimes\mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{X},(\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2)\otimes\mathcal{L}^{\otimes n}) \tag{3.8.1}$$

est inversible pour tout n assez grand, de sorte que le morphisme composé

$$\psi^{-1}\circ\varphi : \Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{C}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{L}^{\otimes n})/\Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{E}_2\otimes\mathcal{L}^{\otimes n}) \tag{3.8.2}$$

munit $\Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{C}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n})$ d'une structure de sous-quotient de $\Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n})$, relativement à la filtration

$$\Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n}) \supset \Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{L}^{\otimes n}) \supset \Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{E}_2\otimes\mathcal{L}^{\otimes n}). \tag{3.8.3}$$

Munissant alors $\Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{C}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n})$ d'une structure de $\mathcal{O}_K$-module normé au moyen des normes sous-quotient des normes sur $\Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n})$, on trouve :

$$h(\overline{\mathcal{C}};n) = \widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{C}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n})}. \tag{3.8.4}$$

La suite de l'exposé fera appel au résultat suivant :

3.9. Proposition. — *Soient X un espace analytique complexe projectif réduit et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample. Alors toute métrique continue à courbure semi-positive sur L est limite uniforme décroissante de métriques C^∞ à courbure strictement positive.*

Il s'agit du théorème 4.6.1 de [14], où X est supposé lisse. Remarquons toutefois que la preuve donnée dans [14] n'utilise cette hypothèse de lissité que pour montrer que toute fonction plurisousharmonique continue sur X est localement limite uniforme décroissante de fonctions plurisousharmoniques C^∞. Or, puisqu'une fonction sur un espace analytique complexe est plurisousharmonique si et seulement si elle peut s'écrire localement comme restriction d'une fonction plurisousharmonique sur un espace lisse, ce résultat reste vrai en général.

3.10. Proposition. — *Soient X un espace analytique complexe compact réduit muni d'une forme volume μ, $\overline{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module inversible hermitien, et $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre métrisé. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes $c_\varepsilon > 0$ et $C_\varepsilon > 0$ telles que pour tout $n \geqslant 0$ et pour tout $s \in \Gamma(X, E \otimes L^{\otimes n})$, on ait*

$$c_\varepsilon e^{-n\varepsilon} \|s\|_{L^\infty(X)} \leqslant \|s\|_{L^2(X,\mu)} \leqslant C_\varepsilon e^{n\varepsilon} \|s\|_{L^\infty(X)}. \tag{3.10.1}$$

Ce résultat constitue une variante du lemme 30 de [7] (qui donne un encadrement plus fort mais sous des hypothèses plus restricitves), auquel il pourrait d'ailleurs se ramener par diverses réductions. Toutefois, comme le referee anonyme l'a suggéré à l'auteur, il est intéressant de remarquer que cette proposition admet, dans cette généralité, une preuve directe, utilisant les techniques développées au cours de la preuve du théorème B :

Démonstration. On commence par remarquer que, dans l'espace des sections d'un fibré vectoriel métrisé sur un espace analytique complexe réduit D muni d'une forme volume ν, la convergence $L^2(\nu)$ sur les compacts implique la convergence uniforme sur les compacts (en effet, ν étant strictement positive hors d'un fermé analytique F contenant le lieu singulier de chaque composante irréductible de D, si l'on suppose convergence L^2 sur tout compact, la convergence uniforme sur un compact ne rencontrant pas F est assurée par la formule de Cauchy, et la convergence uniforme sur un compact arbitraire s'en déduit par principe du maximum).

Considérons alors $D = D_1(X, L)$ le fibré en disques unité de l'espace total de $L^\vee$, et $p : D \twoheadrightarrow X$ la projection naturelle. On munit D d'une forme volume ν comme suit : si U est un ouvert suffisamment petit de X, $p^{-1}(X)$ s'identifie au produit de U et du disque unité de $\mathbb{C}$, et l'on définit ν sur cet ouvert comme le produit de μ et de la mesure de Lebesgue ; le résultat obtenu est indépendant du choix des trivialisations.

Si maintenant $s \in \Gamma(X, E \otimes L^{\otimes n})$ s'identifie à $f \in \Gamma(D, p^*E)$ comme en 2.9, on a alors par un calcul immédiat

$$\|f\|_{L^\infty(D_r(X,L))} = r^n \|s\|_{L^\infty(X)} \tag{3.10.2}$$

et, posant $c_n = \left(\frac{\pi}{n+1}\right)^{1/2}$,

$$\|f\|_{L^2(D_r(X,L),\nu)} = c_n r^{n+1} \|s\|_{L^2(X,\mu)} \tag{3.10.3}$$

pour tout $r \in]0,1[$. Par ailleurs, la remarque initiale nous assure l'existence de $r' \in]0,1[$ et $C > 0$ tels que

$$\|.\|_{L^\infty(D_r(X,L))} \leqslant C \|.\|_{L^2(D_{r'}(X,L),\nu)}. \tag{3.10.4}$$

Prenant $r = e^{-\varepsilon}$ (et majorant r' par 1) on déduit de ces trois relations la première inégalité souhaitée, tandis que la seconde est évidente. $\square$

3.11. Corollaire. — *Avec les notations de 3.5 et 3.6, on a*

$$|h_{L^\infty}(\overline{\mathcal{C}}; n) - h_{L^2(\mu)}(\overline{\mathcal{C}}; n)| = o(n^d) \tag{3.11.1}$$

quand n tend vers l'infini.

Démonstration. Cela résulte de la proposition 1.9, de (3.2.2), de (3.8.4), de la proposition précédente, et du fait que d'après le théorème de Hilbert-Samuel géométrique, le rang du $\mathcal{O}_K$-module $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{C} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ est un polynôme en n de degré au plus $d - 1$. $\square$

3.12. Lemme. — *Soient X un schéma noethérien quasi-projectif*[2] *et $\mathcal{C}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. Alors $\mathcal{C}$ admet une filtration décroissante finie*

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \supset \mathcal{C}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{C}_N = 0 \tag{3.12.1}$$

telle que, pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$, il existe un sous-schéma fermé intègre Z_j de X, un $\mathcal{O}_{Z_j}$-module inversible $\mathcal{M}_j$ et un isomorphisme

$$\mathcal{C}_{j-1}/\mathcal{C}_j \simeq i_{Z_j *}\mathcal{M}_j \tag{3.12.2}$$

où i_{Z_j} est le morphisme d'immersion de Z_j dans X.

De façon plus précise, si un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample $\mathcal{L}$ est donné, on peut prendre les $\mathcal{M}_j$ de la forme $i_{Z_j}^* \mathcal{L}^{\otimes n_j}$ pour $n_j \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Procédant par induction noethérienne, on va montrer que si $\mathcal{C}'$ est un sous-$\mathcal{O}_X$-module cohérent de $\mathcal{C}$ maximal parmi ceux qui admettent une filtration vérifiant les propriétés énoncées dans le lemme, alors $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$. Dans le cas contraire, le $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ est non nul donc, par [12] IV 3.1.5, possède un cycle premier associé Z ; autrement dit, il existe un voisinage U du point générique z de Z dans X et une section s de $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ sur U de support $Z \cap U$ ([12] IV 3.1.3(b)). D'autre part, par la caractérisation [12] II 4.5.2(a) des faisceaux amples, on peut après restriction supposer $U = X_f$ où f est une section globale de $\mathcal{L}^{\otimes n}$ sur X, pour un certain entier n. Alors, par [12] I 9.3.1(ii), il existe un entier m tel que $s \otimes f^{\otimes m}$ se prolonge en une section globale de $(\mathcal{C}/\mathcal{C}') \otimes \mathcal{L}^{\otimes mn}$ sur X, de sorte que $s \otimes f^{\otimes m+1}$ définit une section globale de $(\mathcal{C}/\mathcal{C}') \otimes \mathcal{L}^{\otimes (m+1)n}$ de support Z, ou encore une injection

$$i_{Z*}\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{C}/\mathcal{C}', \tag{3.12.3}$$

[2] c'est-à-dire admettant un faisceau inversible ample

où l'on a posé $\mathcal{M} = i_Z^* \mathcal{L}^{\otimes -(m+1)n}$. Ainsi le sous-$\mathcal{O}_X$-module de $\mathcal{C}$ image inverse pour la projection canonique de l'image de (3.12.3) dans $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ contient $\mathcal{C}'$ et admet une filtration du type considéré, ce qui contredit l'hypothèse de maximalité faite sur $\mathcal{C}'$. $\square$

On est maintenant en mesure de prouver le «théorème de Hilbert-Samuel arithmétique» annoncé.

3.13. Théorème A. — *Avec les notations de 3.5 et 3.6, on a pour n tendant vers l'infini le développement asymptotique*

$$h(\overline{\mathcal{C}}; n) = \frac{n^d}{d!} (\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^d . [\mathcal{C}]) + o(n^d), \tag{3.13.1}$$

où le nombre d'intersection arithmétique généralisé $(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^d.[\mathcal{C}])$ est défini au sens de [14], §5.

Démonstration. Commençons par indiquer quelques réductions et simplifications :

- Par le corollaire 3.11, il est indifférent pour prouver le théorème de considérer les normes L^∞ ou $L^2(\mu)$.
- Le rang de $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{C} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ est un polynôme en n de degré au plus $d-1$, de sorte que changer de métrique sur $\mathcal{E}$ modifie $h(\overline{\mathcal{C}}; n)$ d'un terme en $O(n^{d-1})$; on peut donc supposer $\overline{\mathcal{E}}$ hermitien.
- Enfin, $(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^d.[\mathcal{C}])$ se calcule en approchant la métrique sur $\mathcal{L}$ par des métriques C^∞ à courbure strictement positive, comme la proposition 3.9 en assure la possibilité, tandis que, pour tout $\varepsilon > 0$, en remplaçant la métrique sur $\mathcal{L}$ par une métrique suffisamment proche, on modifie $h(\overline{\mathcal{C}}; n)$ d'un terme au plus εn^d ; choisissant ε arbitrairement petit, on voit qu'il suffit de prouver le théorème lorsque la métrique sur $\mathcal{L}$ est C^∞ à courbure strictement positive.

Le lemme 3.12 nous donne une filtration finie

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \supset \mathcal{C}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{C}_N = 0 \tag{3.13.2}$$

de $\mathcal{C}$ et, pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$, un sous-schéma fermé intègre $i_{Z_j} : Z_j \hookrightarrow \mathfrak{X}$ et un $\mathcal{O}_{Z_j}$-module inversible $\mathcal{M}_j$ tel que $i_{Z_j *}\mathcal{M}_j$ soit muni d'une structure de sous-quotient de $\mathcal{C}$

$$i_{Z_j *}\mathcal{M}_j \simeq \mathcal{C}_{j-1}/\mathcal{C}_j \tag{3.13.3}$$

et donc, par composition, d'une structure de sous-quotient de $\mathcal{E}$

$$i_{Z_j *}\mathcal{M}_j \simeq \widehat{\mathcal{C}_{j-1}}/\widehat{\mathcal{C}}_j \tag{3.13.4}$$

où

$$\mathcal{E}_1 = \widehat{\mathcal{C}_0} \supset \widehat{\mathcal{C}_1} \supset \cdots \supset \widehat{\mathcal{C}_N} = \mathcal{E}_2 \tag{3.13.5}$$

est la filtration relevant (3.13.2) via l'isomorphisme $\varphi : \mathcal{C} \simeq \mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2$. On notera $\overline{i_{Z_j *}\mathcal{M}_j}$ le $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent muni de métriques de sous-quotient ainsi obtenu. Par la proposition 1.8, les normes sur $\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{C}_{j-1}} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})/\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{C}_j} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ obtenues lorsqu'on le considère comme sous-quotient de $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})/\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ et celles obtenues lorsqu'on le considère comme sous-quotient de $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ coïncident ; une application répétée de (3.3.3) donne alors

(3.13.6)

$$\begin{aligned}
h_{L^2(\mu)}(\overline{\mathcal{C}}; n) &= \widehat{\deg}\, \overline{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})/\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})}_{L^2(\mu)} \\
&= \widehat{\deg}\, \overline{\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{C}_0} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})/\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{C}_1} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})}_{L^2(\mu)} + \cdots \\
&\qquad + \widehat{\deg}\, \overline{\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{C}_{N-1}} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})/\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{C}_N} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})}_{L^2(\mu)} \\
&= h_{L^2(\mu)}(\overline{i_{Z_1 *}\mathcal{M}_1}; n) + \cdots + h_{L^2(\mu)}(\overline{i_{Z_N *}\mathcal{M}_N}; n).
\end{aligned}$$

Les supports des $i_{Z_j *}\mathcal{M}_j$ étant tous de dimension au plus d, ceci implique que le théorème sera vrai pour $\overline{\mathcal{C}}$ dès lors qu'il sera vrai pour les $\overline{i_{Z_j *}\mathcal{M}_j}$. Ainsi on pourra maintenant supposer $\mathcal{C} = i_{Z*}\mathcal{M}$ où $i : Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$ est un sous-schéma fermé intègre de dimension d et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_Z$-module inversible. Si Z est inclus dans une fibre verticale de $\mathfrak{X}$, le résultat découle immédiatement du théorème de Hilbert-Samuel géométrique, $\mathcal{L}$ étant supposé relativement ample. On peut donc dorénavant supposer Z horizontal (plat sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$), et munir par ailleurs les fibres de $\mathcal{M}$ sur $Z(\mathbb{C})$ d'une métrique invariante quelconque.

Sous cette hypothèse, considérons un entier n suffisamment grand pour que le morphisme naturel

$$\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{X}, (\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) \simeq \Gamma(\mathfrak{X}, (i_*\mathcal{M}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) \tag{3.13.7}$$

soit surjectif. Le $\mathcal{O}_K$-module $\Gamma(\mathfrak{X}, (i_*\mathcal{M}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) = \Gamma(Z, \mathcal{M} \otimes i^*\mathcal{L}^{\otimes n})$ dispose alors

- des normes uniformes $\|.\|_{L^\infty(Z),\sigma}$ sur Z
- des normes $\|.\|_{\mathrm{sq},L^\infty(\mathfrak{X}),\sigma}$ provenant par la structure de sous-quotient des normes uniformes sur $\mathfrak{X}$.

Le corollaire 2.16 permet de comparer ces deux normes, et les mêmes arguments que ceux de la preuve du corollaire 3.11 donnent pour n tendant vers l'infini l'estimation

(3.13.8)
$$|\,\widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(Z,\mathcal{M}\otimes i^*\mathcal{L}^{\otimes n})}_{\mathrm{sq},L^\infty(\mathfrak{X})} - \widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(Z,\mathcal{M}\otimes i^*\mathcal{L}^{\otimes n})}_{L^\infty(Z)}| = o(n^d).$$

Puisque par définition on a $\widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(Z,\mathcal{M}\otimes i^*\mathcal{L}^{\otimes n})}_{\mathrm{sq},L^\infty(\mathfrak{X})} = h_{L^\infty}(\overline{\mathcal{C}};n)$, il suffit pour conclure de vérifier

$$\widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(Z,\mathcal{M}\otimes i^*\mathcal{L}^{\otimes n})}_{L^\infty(Z)} = \frac{n^d}{d!}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^d.Z) + o(n^d). \tag{3.13.9}$$

Or, compte tenu de (3.1.3), ceci n'est autre que le théorème 1.4 de [19]. □

Références

[1] *A. Andreotti* et *H. Grauert*, Théorème de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 193–259.

[2] *J.-B. Bost*, Germs of analytic varieties in algebraic varieties : canonical metrics and arithmetic algebraization theorems, *in* Conférence à la mémoire de Bernard Dwork (Bressanone, 2001), à paraître.

[3] *N. Bourbaki*, Espaces vectoriels topologiques, chapitres 1 à 5, Éléments de mathématique, Masson, Paris, 1981.

[4] *J.-P. Demailly*, On the Ohsawa-Takegoshi-Manivel L^2 extension theorem, *in* Complex Analysis and Geometry (Paris, 1997), Progr. Math. **188**, 47–82.

[5] *J. Fornaess* et *R. Narasimhan*, The Levi problem on complex spaces with singularities, Math. Ann. **248** (1980), 47–72.

[6] *H. Gillet* et *C. Soulé*, Arithmetic intersection theory, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **72**, 94–174.

[7] *H. Gillet* et *C. Soulé*, An arithmetic Riemann-Roch theorem, Invent. Math. **110** (1992), 473–543.

[8] *H. Grauert*, On Levi's Problem and the Imbedding of Real-Analytic Manifolds, Ann. Math. **68** (1958), 460–472.

[9] *H. Grauert*, Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann. **146** (1962), 331–368.

[10] *H. Grauert* et *R. Remmert*, Analytische Stellenalgebren, Grundlehren Math. Wiss. **176**.

[11] *H. Grauert* et *R. Remmert*, Theorie der Steinschen Räume, Grundlehren Math. Wiss. **227** ; traduction anglaise : Theory of Stein Spaces, Grundlehren Math. Wiss. **236**.

[12] *A. Grothendieck* et *J. Dieudonné*, Éléments de géométrie algébrique, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32**.

[13] *M. Jurchescu*, On the canonical topology of an analytic algebra and of an analytic module, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 129–153.

[14] *V. Maillot*, Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables, Mém. Soc. Math. France **80** (2000).

[15] *L. Manivel*, Un théorème de prolongement L^2 de sections holomorphes d'un fibré hermitien, Math. Z. **212** (1993), 107–122.

[16] *R. Narasimhan*, The Levi problem for complex spaces II, Math. Ann. **146** (1962), 195–216.

[17] *H. Randriambololona*, Hauteurs pour les sous-schémas et exemples d'utilisation de méthodes arakeloviennes en théorie de l'approximation diophantienne, Thèse, Université Paris 11 Orsay, 2002.

[18] *Vo Van Tan*, La classification des espaces 1-convexes, *in* Séminaire Pierre Lelong (Analyse) 1975/76, Lecture Notes in Math. **578**, 71–92.

[19] *S. Zhang*, Positive line bundles on arithmetic varieties, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), 187–221.

Hugues Randriambololona
Ecole nationale supérieure des télécommunications
46, rue Barrault
75634 Paris Cedex 13
France

`randriam@enst.fr`