Hauteurs des sous-schémas de dimension nulle de l'espace projectif

Hugues Randriambololona*

9 janvier 2004

1 Introduction

Soient K un corps de nombres, $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K, $\mathfrak{X}$ un schéma projectif sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ de fibre générique $\mathfrak{X}_K$ lisse, $\overline{\mathcal{L}}$ un faisceau inversible ample sur $\mathfrak{X}$ muni d'une métrique hermitienne à courbure positive, et μ une mesure strictement positive sur la variété analytique complexe $\mathfrak{X}(\mathbb{C})$ invariante sous l'action de la conjugaison complexe. Ceci permet, pour tout entier n, de munir l'espace des sections $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$ d'une structure de $\mathcal{O}_K$-module hermitien, au moyen des métriques $L^2(\mu)$. Relativement à ces données, on peut construire une théorie des hauteurs pour les sous-schémas fermés de $\mathfrak{X}$, comme suit.

Soit Σ un sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$. Pour tout entier n, notons

$$\mathrm{restr}_n : \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow \Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma) \tag{1.1}$$

l'application naturelle de restriction. L'image $\mathrm{im}(\mathrm{restr}_n)$ de cette application de restriction est un quotient du $\mathcal{O}_K$-module $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$, et peut être munie des métriques quotient des métriques L^2 sur $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$; on obtient ainsi un $\mathcal{O}_K$-module hermitien, noté $\overline{\mathrm{im}(\mathrm{restr}_n)}$.

Définition 1.1 *La n-ième hauteur du sous-schéma Σ est le degré d'Arakelov (normalisé comme en* (2.3) infra*) du $\mathcal{O}_K$-module hermitien $\overline{\mathrm{im}(\mathrm{restr}_n)}$:*

$$h(\Sigma; n) = \widehat{\deg}\, \overline{\mathrm{im}(\mathrm{restr}_n)}. \tag{1.2}$$

Remarquons que si l'entier n est suffisamment grand, l'application restr_n est surjective, et alors on a

$$h(\Sigma; n) = \widehat{\deg}\, \overline{\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)}, \tag{1.3}$$

où $\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)$ est muni des métriques quotient par restr_n des métriques L^2 sur $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$. En particulier, lorsque Σ est plat sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ de polynôme de Hilbert P et que l'entier n est régulier au sens de Castelnuovo-Mumford relativement à P, cette quantité coïncide avec la hauteur du point de Hilbert associé à Σ, relativement à un fibré en droites hermitien naturel sur le schéma de Hilbert correspondant.

* ÉNST – Dépt. INFRES – 46, rue Barrault – 75634 Paris Cedex 13 – randriam@enst.fr

Sous une forme légèrement différente, la notion de hauteur de sous-schéma introduite ici apparaît déjà dans [8]. Il y est remarqué que, lorsque l'on fait varier l'entier n, la quantité $h(\Sigma; n)$ doit pouvoir s'interpréter comme l'analogue arithmétique d'une fonction de Hilbert-Samuel pour Σ.

Le principal objet de ce texte est l'étude de cette «fonction de Hilbert-Samuel arithmétique» dans le cas particulier où $\mathfrak{X}$ est l'espace projectif associé à un $\mathcal{O}_K$-fibré vectoriel hermitien, muni du fibré en droites hermitien universel $\overline{\mathcal{O}(1)}$, et où Σ est un sous-schéma (fermé) de $\mathfrak{X}$ de dimension générique nulle plat sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Notons N la dimension générique de l'espace projectif $\mathfrak{X}$, l la longueur de Σ (*i.e.* le degré du morphisme fini et plat de projection de Σ sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$), r_t la longueur du t-ième jet de Σ, et $h([\Sigma])$ la hauteur du cycle associé à Σ. Après avoir introduit deux réels $h(C\Sigma)$, pouvant s'interpréter comme la hauteur du cône tangent de Σ, et $\operatorname{ramif}(\Sigma)$, mesurant la ramification de Σ, on obtient le résultat suivant :

Théorème 1.2 *Les hauteurs de Σ admettent un développement asymptotique de la forme*

$$\begin{aligned} h(\Sigma; n) \;=\; n.h([\Sigma]) \;+\; \sum_{0 \leqslant t \leqslant l} \frac{r_t}{2} \log \frac{(n+N)!}{N! t! (n-t)!} \\ +\; h(C\Sigma) - \log \operatorname{ramif}(\Sigma) \;+\; e(n) \end{aligned} \tag{1.4}$$

où le «terme d'erreur» $e(n)$ est un réel se comportant en $O(n^{-1})$ quand n tend vers l'infini.

On s'attache ensuite à étudier plus en détail le cas où le sous-schéma Σ est réduit, en relation avec la question suivante.

Soient $p_1, \ldots, p_l \in \mathbb{P}^N(K)$ des points de l'espace projectif standard. Après choix de coordonnées homogènes des p_i, notons $A_n : K[X_0, \ldots, X_N]_n \longrightarrow K^l$ l'application d'évaluation en les p_i, définie sur l'espace des polynômes homogènes de degré n. Notons aussi Σ l'adhérence schématique dans $\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}$ de la réunion des p_i. Avec un choix de métriques convenables, Michel Laurent montre dans [8] l'existence d'une constante, notée $\chi(\mathcal{O}_\Sigma)$ par analogie avec le cas géométrique, telle que la hauteur de (la puissance extérieure maximale de) l'application linéaire A_n admette le développement asymptotique suivant :

$$h\left(\bigwedge^l A_n\right) \underset{n \to \infty}{=} n.\sum_i h(p_i) \;+\; \chi(\mathcal{O}_\Sigma) \;+\; o(1). \tag{1.5}$$

Un problème soulevé et laissé ouvert dans [8] est d'expliciter cette constante $\chi(\mathcal{O}_\Sigma)$.

Pour résoudre ce problème, on montre que, compte tenu des normalisations de [8], hauteur de matrice d'interpolation $h(A_n)$ et hauteur de sous-schéma $h(\Sigma; n)$ sont reliées par une formule simple de sorte que, après identification des termes correspondants dans (1.4) et (1.5), on trouve :

Proposition 1.3 *Le terme constant du développement asymptotique* (1.5) *vaut*

$$\chi(\mathcal{O}_\Sigma) = -\log \operatorname{ramif}(\Sigma) = -\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \log \# \Gamma(\Sigma, \nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}} / \mathcal{O}_\Sigma) \tag{1.6}$$

où $\nu : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$ est le morphisme de normalisation du schéma réduit Σ.

Utilisant le fait que l'ordre $\Gamma(\widetilde{\Sigma}, \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}})$ est auto-dual pour la forme bilinéaire trace sur la K-algèbre séparable $\Gamma(\widetilde{\Sigma}, \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}})_K = \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma)_K$, ceci peut aussi s'énoncer ainsi :

Proposition 1.4 *On a (supposant toujours Σ réduit) :*

$$\chi(\mathcal{O}_\Sigma) = -\frac{1}{2.[K:\mathbb{Q}]} \log N(\mathfrak{d}_{\Gamma(\Sigma,\mathcal{O}_\Sigma)/\mathcal{O}_K}) \tag{1.7}$$

où $N(\mathfrak{d}_{\Gamma(\Sigma,\mathcal{O}_\Sigma)/\mathcal{O}_K}) \in \mathbb{N}$ est la norme de l'idéal discriminant de $\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma)$ sur $\mathcal{O}_K$.

Notamment, si l'on suppose en outre que Σ est localement intersection complète, la théorie des résidus et de la dualité de Grothendieck permet d'exprimer cette norme en fonction du module des différentielles de Σ ; ainsi, on trouve :

Proposition 1.5 *Avec les mêmes notations, sous l'hypothèse supplémentaire que Σ est localement intersection complète, on a*

$$\chi(\mathcal{O}_\Sigma) = -\frac{1}{2.[K:\mathbb{Q}]} \log \# \Omega^1_{\Gamma(\Sigma,\mathcal{O}_\Sigma)/\mathcal{O}_K}. \tag{1.8}$$

Dans la dernière partie du texte, toujours sous l'hypothèse que le sous-schéma Σ est réduit (mais pas nécessairement localement intersection complète), on étudie plus précisément le terme d'erreur $e(n)$ introduit dans la formule (1.4), ce qui permet d'obtenir non plus seulement une estimation, mais de véritables bornes sur les hauteurs de matrices d'interpolation en grand degré. On obtient notamment le résultat suivant.

Proposition 1.6 *Soit Σ un sous-schéma réduit de l'espace projectif, fini et plat sur* $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, *et N_0 le plus petit entier tel que l'application de restriction* restr_{N_0} *(cf.* (1.1)*) soit de rang maximal. Alors, pour tout entier $n \geqslant N_0$, le terme d'erreur du développement asymptotique* (1.4) *admet une décomposition naturelle*

$$e(n) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \left(\sum_{\substack{\mathfrak{p} \text{ id. max.} \\ \text{de } \mathcal{O}_K}} \varepsilon_\mathfrak{p}(n) + \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}} \varepsilon_\sigma(n) \right) \tag{1.9}$$

en somme de termes locaux négatifs *presque tous nuls $\varepsilon_v(n)$ qui* décroissent en valeur absolue *lorsque n croît.*

Ce dernier point peut s'interpréter, aux places archimédiennes, comme un phénomène de croissance d'un angle dans une grande puissance tensorielle d'un espace hermitien, et aux places non-archimédiennes, comme un résultat de décroissance de la cohomologie. On en déduit aussi le résultat suivant concernant les hauteurs de matrices d'interpolation :

Corollaire 1.7 *Soient $(A_n)_{n \geqslant 0}$ la suite d'applications d'interpolation associée à la donnée de l points $p_1, \ldots, p_l$ de l'espace projectif et N_0 le plus petit entier tel que A_{N_0} soit de rang maximal. Alors, pour tous $n' \geqslant n \geqslant N_0$, on a*

$$h\left(\bigwedge^l A_{n'}\right) - h\left(\bigwedge^l A_n\right) \geqslant (n' - n) \sum_{i=1}^{l} h(p_i). \tag{1.10}$$

Remerciements. La plus grande partie de cette note est extraite des chapitres 1, 2 et 5 de la thèse effectuée par l'auteur sous la direction de J.-B. Bost. Quelques résultats nouveaux et inédits ont été rajoutés ultérieurement (formant essentiellement la section 5 de ce texte), et la rédaction du tout a été refondue à l'occasion d'un séjour à l'École polytechnique fédérale de Zürich.

Table des matières

2 Généralités sur les hauteurs de sous-schémas

2.1 Conventions et rappels élémentaires de géométrie d'Arakelov

Si K est un corps de nombres d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$, on note $\operatorname{Spm}\mathcal{O}_K$ l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{O}_K$, et pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm}\mathcal{O}_K$ de caractéristique résiduelle p on normalise la valeur absolue $\mathfrak{p}$-adique $|.|_\mathfrak{p}$ sur K en imposant que pour tout a on ait

$$|a|_\mathfrak{p} = |\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(a)|_p = [\mathcal{O}_{K_\mathfrak{p}} : a\mathcal{O}_{K_\mathfrak{p}}]^{-1}, \tag{2.1}$$

où $|.|_p$ est la norme p-adique usuelle sur $\mathbb{Q}$, et $K_\mathfrak{p}$ le complété de K en $\mathfrak{p}$. Pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$ on note aussi $|.|_\sigma$ la valeur absolue sur K déduite par σ de la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{C}$. Avec ces normalisations, la formule du produit s'énonce ainsi : pour tout $a \in K^\times$, on a $|a|_\mathfrak{p} = 1$ pour presque tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm}\mathcal{O}_K$, et

$$\sum_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spm}\mathcal{O}_K} \log|a|_\mathfrak{p} + \sum_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}} \log|a|_\sigma = 0. \tag{2.2}$$

On rappelle qu'un $\mathcal{O}_K$-module hermitien est la donnée d'un $\mathcal{O}_K$-module de type fini M et, pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, d'une norme hermitienne $\|.\|_\sigma$ sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_\sigma = M \otimes_{\mathcal{O}_K,\sigma} \mathbb{C}$, de façon compatible à la conjugaison complexe.

Si $\overline{M}$ est un $\mathcal{O}_K$-module hermitien, on note M_{tors} le sous-module de torsion de M et $M_{libre} = M/M_{tors}$ son plus grand quotient sans torsion, qui s'identifie naturellement à un réseau du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$; on note B l'ensemble des éléments de $M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ dont les images par les σ sont toutes de norme inférieure à 1 et on définit le degré d'Arakelov de $\overline{M}$ par la formule

$$\widehat{\deg}\,\overline{M} = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\left(\log \#\, M_{tors} - \log\frac{\operatorname{covol}(M_{libre})}{\operatorname{vol}(B)}\right), \tag{2.3}$$

où les volumes peuvent être pris relativement à n'importe quelle mesure de Haar sur $M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$. De façon équivalente on a

$$\widehat{\deg}\,\overline{M} = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\left(\log \#\, M/(s_1,\ldots,s_n) \;-\; \sum_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}} \log\|s_1\wedge\cdots\wedge s_r\|_{\bigwedge^r M_\sigma}\right) \tag{2.4}$$

où $s_1,\ldots,s_r$ sont des éléments de M dont les images dans le K-espace vectoriel M_K forment une base de cet espace, et où les normes puissance extérieure sont définies conformément à l'appendice A. On remarquera que le degré d'Arakelov ainsi introduit, qui sera celui utilisé dans tout le texte, est *normalisé* de façon à rester invariant pour la notion évidente d'extension de l'anneau de base pour les modules hermitiens.

On dira que

$$0 \to \overline{M'} \to \overline{M} \to \overline{M''} \to 0$$

est une suite exacte courte de $\mathcal{O}_K$-modules hermitiens si la suite des $\mathcal{O}_K$-modules sous-jacents est exacte et si les métriques sur M' (resp. M'') sont celles induites par (resp. quotient de) celles de M. Alors, sous ces conditions, on a

$$\widehat{\deg}\,\overline{M} = \widehat{\deg}\,\overline{M'} + \widehat{\deg}\,\overline{M''}. \tag{2.5}$$

On vérifie aussi sans peine que si $\overline{M}$ et $\overline{E}$ sont deux $\mathcal{O}_K$-modules hermitiens avec E *localement libre*, on a

$$\widehat{\deg}\,\overline{M \otimes E} = \dim M_K . \widehat{\deg}\,\overline{E} + \dim E_K . \widehat{\deg}\,\overline{M}. \tag{2.6}$$

Soient maintenant $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux $\mathcal{O}_K$-modules hermitiens localement libres, et

$$u : E_K \longrightarrow F_K$$

une application K-linéaire. La hauteur de u est définie comme le réel

$$h(u) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\left(\sum_{\mathfrak{p}} \log \|u\|_{\mathfrak{p}} + \sum_{\sigma} \log \|u\|_{\sigma}\right). \tag{2.7}$$

Dans le cas particulier où E et F sont de même rang et où u est bijective, appliquant cette construction à la puissance extérieure maximale $\bigwedge^{\max} u$, on vérifie aisément la relation

$$\widehat{\deg}\,\overline{E} = \widehat{\deg}\,\overline{F} + h(\bigwedge^{\max} u). \tag{2.8}$$

2.2 Hauteurs de sous-schémas et hauteurs de points de Hilbert

On commence par faire quelques rappels sur la théorie des schémas de Hilbert, suivant Grothendieck.

Soient $\pi : X \longrightarrow S$ un morphisme projectif de schémas noethériens, $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample relativement à π, et P un polynôme à coefficients rationnels prenant des valeurs entières positives sur les entiers suffisamment grands. On note $Hilb^P_{X/S}$ le foncteur qui, à tout S-schéma T, associe l'ensemble des sous-schémas fermés de $X_T = X \times_S T$ plats sur T dont le polynôme de Hilbert relativement à $\mathcal{L}$ est égal à P.

Soit maintenant n un entier possédant la propriété que pour tout S-schéma T et pour tout sous-schéma fermé Y de X_T plat sur T de polynôme de Hilbert P, le morphisme naturel de restriction

$$\mathrm{restr}_n : (\pi_{X_T/T})_* \mathcal{L}^{\otimes n}_{X_T} \to (\pi_{Y/T})_*(\mathcal{L}^{\otimes n}_{X_T}|_Y)$$

soit surjectif et fasse de $(\pi_{Y/T})_*(\mathcal{L}^{\otimes n}_{X_T}|_Y)$ un quotient localement libre de rang $P(n)$ de $(\pi_{X_T/T})_* \mathcal{L}^{\otimes n}_{X_T}$; on remarquera que, par la théorie de la régularité de Castelnuovo-Mumford, telle qu'exposée par exemple dans [10] ch. 14, c'est le cas pour tout entier n suffisamment grand. Alors :

Théorème 2.1 (cf. [4] ou [7]) *Sous ces hypothèses, le foncteur $Hilb^P_{X/S}$ est représentable par un sous-schéma fermé $\mathcal{H}$ de l'espace projectif $\mathcal{P}_n = \mathrm{Proj}\,\mathrm{Sym}(\bigwedge^{P(n)} \pi_* \mathcal{L}^{\otimes n})$, l'immersion*

$$\eta_n : \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{P}_n$$

envoyant pour tout S-schéma T le point de $\mathcal{H}(T)$ représentant un sous-schéma Y de X_T sur le point de $\mathcal{P}_n(T)$ représentant le $\mathcal{O}_T$-module inversible $\bigwedge^{P(n)}(\pi_{Y/T})_*(\mathcal{L}^{\otimes n}_{X_T}|_Y)$ considéré grâce à l'application $\bigwedge^{P(n)} \mathrm{restr}_n$ comme un quotient de $\bigwedge^{P(n)}(\pi_{X_T/T})_*(\mathcal{L}^{\otimes n}_{X_T})$.

Supposons maintenant comme dans l'introduction que $S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ est le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres, que $X = \mathfrak{X}$ est un schéma projectif sur S de fibre générique lisse dont l'ensemble des points complexes est muni d'une mesure strictement positive μ invariante sous l'action de la conjugaison complexe, et que $\mathcal{L}$ est muni d'une métrique hermitienne lisse à courbure positive. On munit alors le $\mathcal{O}_S$-module $\pi_* \mathcal{L}^{\otimes n}$ des métriques L^2 déterminées par ces données, et $\bigwedge^{P(n)} \pi_* \mathcal{L}^{\otimes n}$ des métriques puissance extérieure. Par passage au quotient on obtient ainsi des métriques sur le fibré universel $\mathcal{O}_{\mathcal{P}_n}(1)$ sur $\mathcal{P}_n$ et, après restriction à $\mathcal{H}$, on a ainsi construit un fibré en droites hermitien ample positif

$$\overline{\mathcal{M}_n} = \eta_n^* \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{P}_n}(1)}$$

sur $\mathcal{H}$.

Proposition 2.2 *Sous ces hypothèses, si Σ est un sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$ plat sur S de polynôme de Hilbert P, la hauteur d'ordre n du sous-schéma Σ (comme définie dans l'introduction) est égale à la hauteur du point de $\mathcal{H}(\mathcal{O}_K)$ représentant Σ, relativement au fibré hermitien $\overline{\mathcal{M}_n}$.*

Démonstration : Par construction, ces deux quantités sont égales au degré d'Arakelov du $\mathcal{O}_K$-module hermitien $\overline{\Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)}$ muni des métriques quotient des métriques L^2 sur $\mathfrak{X}$. □

Remarquons qu'un sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$ plat sur S est égal à l'adhérence dans $\mathfrak{X}$ de sa fibre générique et que plus généralement, l'adhérence dans $\mathfrak{X}$ d'un sous-schéma de la fibre générique $\mathfrak{X}_K$ est plate sur S ; on obtient ainsi une bijection naturelle entre les sous-schémas fermés de $\mathfrak{X}_K$ et les sous-schémas fermés de $\mathfrak{X}$ plats sur S.

Remarquons aussi que, le degré d'Arakelov étant supposé normalisé, la notion de hauteur de sous-schéma est invariante par extension du corps de base, en ce sens que si Σ est un sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$ et si L est une extension finie de K, la hauteur $h(\Sigma_{\mathcal{O}_L}; n)$ de $\Sigma_{\mathcal{O}_L}$ considéré comme sous-$\mathcal{O}_L$-schéma de $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_L}$ est égale à $h(\Sigma; n)$.

Corollaire 2.3 *Sous les hypothèses précédentes :*

i. Il existe un réel $C = C(\mathfrak{X}, \overline{\mathcal{L}}, n, P)$ tel que, pour toute extension finie L de K et pour tout sous-schéma fermé Σ de la fibre générique $\mathfrak{X}_L$ de polynôme de Hilbert P, on ait $h(\overline{\Sigma}; n) \geqslant C$, où $\overline{\Sigma}$ est l'adhérence de Σ dans $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_L}$, considérée comme sous-$\mathcal{O}_L$-schéma de $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_L}$.

ii. Pour tous réels C' et C'' il n'existe qu'un nombre fini de couples (L, Σ) où L est une extension de K de degré inférieur à C' et Σ un sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}_L$ de polynôme de Hilbert P de hauteur $h(\overline{\Sigma}; n)$ majorée par C''.

Démonstration : Compte tenu de la proposition, c'est une conséquence immédiate des théorèmes de positivité et de finitude de Northcott sur les hauteurs des points d'une variété projective. □

Exemple 2.4 Comme cela apparaîtra plus loin dans le texte (par exemple comme conséquence de la proposition 4.1), si $\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}$ est l'espace projectif standard muni du fibré universel $\overline{\mathcal{O}(1)}$, on a

$$h(P;n) = h(P) + \frac{1}{2}\log\binom{n+N}{N} \tag{2.9}$$

pour tout $P \in \mathbb{P}^N(\mathcal{O}_K)$, où $h(P)$ est la hauteur usuelle de P.

2.3 Une inégalité remarquable

Conservons encore les notations utilisées au tout début de l'introduction.

Lemme 2.5 *Soient $\Sigma' \subset \Sigma$ deux sous-schémas fermés de $\mathfrak{X}$ égaux sur la fibre générique : $\Sigma'_K = \Sigma_K$. Alors pour tout entier n on a $h(\Sigma';n) \leqslant h(\Sigma;n)$.*

Démonstration : Notons $\mathrm{restr}_n : \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow \Gamma(\Sigma, \mathcal{L}^{\otimes n}|_\Sigma)$ et $\mathrm{restr}'_n : \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow \Gamma(\Sigma', \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\Sigma'})$ les applications naturelles de restriction, de sorte que restr'_n se factorise par restr_n. Ceci implique que $\overline{\mathrm{im}\,\mathrm{restr}'_n}$ est un quotient de $\overline{\mathrm{im}\,\mathrm{restr}_n}$; d'autre part les hypothèses impliquent que les deux $\mathcal{O}_K$-modules sous-jacents coïncident sur la fibre générique. Le lemme en découle aussitôt. □

Lemme 2.6 *Soit Σ un sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$ défini par le faisceau d'idéaux $\mathfrak{J}$. Pour tout entier n, munissons le $\mathcal{O}_K$-module $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{J}\mathcal{L}^{\otimes n})$ des métriques obtenues par restriction des métriques L^2 sur $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$. Alors on a*

$$\begin{aligned} h(\Sigma;n) &= \widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})} - \widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{J}\mathcal{L}^{\otimes n})} \\ &= h(\mathfrak{X};n) - \widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{J}\mathcal{L}^{\otimes n})} \end{aligned}$$

où $h(\mathfrak{X};n)$ est la hauteur de $\mathfrak{X}$ considéré comme sous-schéma de lui-même.

Démonstration : Cela résulte de la suite exacte de $\mathcal{O}_K$-modules hermitiens

$$0 \longrightarrow \overline{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{J}\mathcal{L}^{\otimes n})} \longrightarrow \overline{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})} \longrightarrow \overline{\mathrm{im}(\mathrm{restr}_n)} \longrightarrow 0.$$

□

Si Σ_1 et Σ_2 sont deux sous-schémas fermés de $\mathfrak{X}$ définis par des faisceaux d'idéaux $\mathfrak{J}_1$ et $\mathfrak{J}_2$, on note $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ (resp. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$) le sous-schéma réunion (resp intersection) de Σ_1 et Σ_2, *i.e.* le sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$ défini par le faisceau d'idéaux $\mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{J}_2$ (resp. $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2$). Comme dans le lemme, munissons les $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{J}_i\mathcal{L}^{\otimes n})$ des métriques L^2. Alors pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, notons

$$d_\sigma^{(n)} = d_{\Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{J}_1\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma, \Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{J}_2\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma} \in]0,1]$$

la «mesure d'orthogonalité» associée au triplet $(\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma, \Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{J}_1\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma, \Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{J}_2\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma)$ au paragraphe A.3.2. Remarquons qu'au moyen des structures hermitiennes on peut identifier naturellement le quotient $\mathrm{im}(\mathrm{restr}_{n,i})_\sigma$ (où $\mathrm{restr}_{n,i}$ est l'application de restriction associée à Σ_i) à un sous-espace de $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma$, plus précisément à l'orthogonal de $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{J}_i\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma$, de sorte que par le corollaire A.21 on trouve aussi $d_\sigma^{(n)} = d_{\mathrm{im}(\mathrm{restr}_{n,1})_\sigma, \mathrm{im}(\mathrm{restr}_{n,2})_\sigma}$.

Proposition 2.7 *Avec les notations précédentes, pour tout entier n assez grand, les hauteurs schématiques $h(\Sigma_1;n)$, $h(\Sigma_2;n)$, $h(\Sigma_1\cup\Sigma_2;n)$ et $h(\Sigma_1\cap\Sigma_2;n)$ vérifient*

$$h(\Sigma_1\cup\Sigma_2;n)+h(\Sigma_1\cap\Sigma_2;n)=h(\Sigma_1;n)+h(\Sigma_2;n)+\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}}\log d_\sigma^{(n)}.$$

Démonstration : Considérons la suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents

$$0\longrightarrow\mathfrak{I}_1\cap\mathfrak{I}_2\longrightarrow\mathfrak{I}_1\oplus\mathfrak{I}_2\longrightarrow\mathfrak{I}_1+\mathfrak{I}_2\longrightarrow 0,$$

naturelle à un choix de signe près. Alors pour n assez grand la suite

$$0\longrightarrow\Gamma(\mathfrak{X},(\mathfrak{I}_1\cap\mathfrak{I}_2)\mathcal{L}^{\otimes n})\longrightarrow\Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{I}_1\mathcal{L}^{\otimes n})\oplus\Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{I}_2\mathcal{L}^{\otimes n})\longrightarrow\Gamma(\mathfrak{X},(\mathfrak{I}_1+\mathfrak{I}_2)\mathcal{L}^{\otimes n})\longrightarrow 0$$

est exacte et induit pour tout plongement $\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}$ un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension un

$$\begin{aligned}&\bigwedge^{\max}\Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{I}_1\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma\otimes\bigwedge^{\max}\Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{I}_2\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma\\ &\qquad\xrightarrow{\sim}\bigwedge^{\max}\Gamma(\mathfrak{X},(\mathfrak{I}_1+\mathfrak{I}_2)\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma\otimes\bigwedge^{\max}\Gamma(\mathfrak{X},(\mathfrak{I}_1\cap\mathfrak{I}_2)\mathcal{L}^{\otimes n})_\sigma\end{aligned}$$

dont la norme est par définition la quantité $d_\sigma^{(n)}$. On a alors

$$\begin{aligned}&\widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{I}_1\mathcal{L}^{\otimes n})}+\widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(\mathfrak{X},\mathfrak{I}_2\mathcal{L}^{\otimes n})}\\ &\qquad=\widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(\mathfrak{X},(\mathfrak{I}_1+\mathfrak{I}_2)\mathcal{L}^{\otimes n})}+\widehat{\deg}\,\overline{\Gamma(\mathfrak{X},(\mathfrak{I}_1\cap\mathfrak{I}_2)\mathcal{L}^{\otimes n})}+\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}}\log d_\sigma^{(n)}\end{aligned}$$

et on conclut en appliquant le lemme 2.6. □

Corollaire 2.8 *Soient Σ_1 et Σ_2 deux sous-schémas fermés de $\mathfrak{X}$. Alors, pour tout entier n assez grand, on a*

$$h(\Sigma_1\cup\Sigma_2;n)+h(\Sigma_1\cap\Sigma_2;n)\leqslant h(\Sigma_1;n)+h(\Sigma_2;n).$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la proposition. □

Corollaire 2.9 *Soient Σ_1 et Σ_2 deux sous-schémas fermés de la fibre générique $\mathfrak{X}_K$. Alors, pour tout entier n assez grand, on a*

$$h(\overline{\Sigma_1\cup\Sigma_2};n)+h(\overline{\Sigma_1\cap\Sigma_2};n)\leqslant h(\overline{\Sigma_1};n)+h(\overline{\Sigma_2};n)$$

où l'on a noté $\overline{\Sigma}$ l'adhérence dans $\mathfrak{X}$ d'un sous-schéma Σ de $\mathfrak{X}_K$.

Démonstration : On vérifie aisément qu'on a $\overline{\Sigma_1\cup\Sigma_2}=\overline{\Sigma_1}\cup\overline{\Sigma_2}$. Par ailleurs, $\overline{\Sigma_1\cap\Sigma_2}$ est un sous-schéma fermé de $\overline{\Sigma_1}\cap\overline{\Sigma_2}$ et ces deux objets coïncident sur la fibre générique. Par le lemme 2.5 on a donc $h(\overline{\Sigma_1\cap\Sigma_2};n)\leqslant h(\overline{\Sigma_1}\cap\overline{\Sigma_2};n)$, et le résultat découle du corollaire précédent appliqué à $\overline{\Sigma_1}$ et $\overline{\Sigma_2}$. □

3 Le théorème principal

3.1 Rappels sur les espaces projectifs

3.1.1 Préliminaires

Si S est un schéma noethérien et $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang $N+1$, on note $\mathbb{P}\mathcal{E} = \operatorname{Proj}\operatorname{Sym}\mathcal{E}$ l'espace projectif sur S dont les points paramétrisent les quotients de $\mathcal{E}$ localement libres de rang un, $\pi : \mathbb{P}\mathcal{E} \longrightarrow S$ le morphisme structural, et $\mathcal{O}(1)$ le fibré en droites universel sur $\mathbb{P}\mathcal{E}$.

Soit maintenant P un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}\mathcal{E}$ image d'une section $i_P : S \hookrightarrow \mathbb{P}\mathcal{E}$. On note $\mathcal{F} = i_P^* \ker(\pi^*\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{O}(1))$ l'«hyperplan» de $\mathcal{E}$ défini par P, de sorte que la surjection naturelle $\pi^*\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{O}(1)$ envoie $\pi^*\mathcal{F} \subset \pi^*\mathcal{E}$ dans $\mathfrak{I}_P\mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}(1)$, où $\mathfrak{I}_P$ est le faisceau d'idéaux définissant le sous-schéma P.

Munissons la $\mathcal{O}_S$-algèbre $\bigoplus_{n\geqslant 0} \pi_*\mathcal{O}(n)$ de la filtration définie par l'ordre d'annulation en P, et $\operatorname{Sym}\mathcal{E}$ de la filtration définie par l'idéal engendré par $\mathcal{F}$: pour $0 \leqslant t \leqslant n$,

$$\operatorname{Fil}^t \pi_*\mathcal{O}(n) = \pi_*(\mathfrak{I}_P^t\mathcal{O}(n)) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Fil}^t S^n\mathcal{E} = \operatorname{im}(\mathcal{F}^{\otimes t} \otimes \mathcal{E}^{\otimes n-t} \longrightarrow S^n\mathcal{E}).$$

On vérifie aisément (par exemple en se ramenant au cas où S est affine, où $\mathbb{P}\mathcal{E}$ est l'espace projectif standard et où P est l'origine) que l'isomorphisme naturel de $\mathcal{O}_S$-algèbres entre $\operatorname{Sym}\mathcal{E}$ et $\bigoplus_{n\geqslant 0} \pi_*\mathcal{O}(n)$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_S$-algèbres filtrées ; par passage aux gradués associés, on en déduit pour $0 \leqslant t \leqslant n$ un isomorphisme naturel

$$S^t\mathcal{F} \otimes (\mathcal{E}/\mathcal{F})^{\otimes n-t} \simeq \operatorname{gr}^t \pi_*\mathcal{O}(n). \tag{3.1}$$

Par ailleurs, pour tout $\mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}$-module quasi-cohérent $\mathcal{M}$ on dispose d'un morphisme naturel d'adjonction (ou de restriction) $\pi_*\mathcal{M} = i_P^*\pi^*\pi_*\mathcal{M} \longrightarrow i_P^*\mathcal{M}$; dans le cas où $\mathcal{M} = \mathfrak{I}_P^t\mathcal{O}(n)$, on vérifie (à nouveau par exemple par un calcul local) que celui-ci induit, pour $0 \leqslant t \leqslant n$, un isomorphisme de $\mathcal{O}_S$-modules

$$\begin{aligned}\operatorname{gr}^t \pi_*\mathcal{O}(n) &= \pi_*(\mathfrak{I}_P^t\mathcal{O}(n))/\pi_*(\mathfrak{I}_P^{t+1}\mathcal{O}(n)) \\ &\xrightarrow{\sim} i_P^*(\mathfrak{I}_P^t\mathcal{O}(n)) = \pi_*(\mathfrak{I}_P^t\mathcal{O}(n)/\mathfrak{I}_P^{t+1}\mathcal{O}(n)) = \pi_*(\mathfrak{I}_P^t/\mathfrak{I}_P^{t+1}) \otimes_{\mathcal{O}_S} i_P^*\mathcal{O}(n)\end{aligned} \tag{3.2}$$

(on aurait aussi pu remarquer que cela revenait à dire que $R^1\pi_*(\mathfrak{I}_P^t\mathcal{O}(n))$ est nul pour $0 \leqslant t \leqslant n+1$).

Enfin, on rappelle que la deuxième suite exacte fondamentale du calcul différentiel fournit un isomorphisme naturel de $\mathcal{O}_S$-modules : $\pi_*(\mathfrak{I}_P/\mathfrak{I}_P^2) \simeq i_P^*\Omega^1_{\mathbb{P}\mathcal{E}/S}$, et plus généralement, l'immersion i_P étant régulière,

$$\pi_*(\mathfrak{I}_P^t/\mathfrak{I}_P^{t+1}) \simeq i_P^* S^t\Omega^1_{\mathbb{P}\mathcal{E}/S} \tag{3.3}$$

pour tout $t \geqslant 0$.

3.1.2 Structures hermitiennes

On suppose maintenant que $S = \operatorname{Spec}\mathbb{C}$ et que E est un espace vectoriel de dimension $N+1$ muni d'un produit scalaire hermitien. On munit alors le fibré universel $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}E$ de la métrique standard, définie par passage au quotient par la surjection naturelle $\pi^*E \twoheadrightarrow \mathcal{O}(1)$, où $\pi : \mathbb{P}E \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{C}$ est le morphisme structural. On note ω_{FS} la forme de Fubini-Study sur la variété analytique complexe $\mathbb{P}E(\mathbb{C})$, c'est-à-dire la forme de Chern du fibré hermitien $\mathcal{O}(1)$, et on munit $\mathbb{P}E(\mathbb{C})$ de la forme volume $\mu = (\omega_{FS})^N$, qui en fait un espace de probabilité[1]. Enfin, le fibré cotangent holomorphe de $\mathbb{P}E(\mathbb{C})$ est muni de l'unique métrique hermitienne qui soit invariante sous l'action du groupe unitaire de E et normalisée par la condition suivante :

Définition 3.1 *Pour tout point fermé P de $\mathbb{P}E$, image d'une section $i_P : \operatorname{Spec}\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}E$ définissant un hyperplan F de E, la métrique sur $T_P^{1,0}\mathbb{P}E(\mathbb{C})^*$ est celle qui rend isométrique l'isomorphisme naturel $T_P^{1,0}\mathbb{P}E(\mathbb{C})^* \simeq F \otimes i_P^*\mathcal{O}(-1)$.*

Un calcul explicite dans des coordonnées locales montre qu'avec ce choix de normalisation, si les φ_j forment une base unitaire de $T_P^{1,0}\mathbb{P}E(\mathbb{C})^*$, on a $\omega_{FS}(P) = \frac{i}{2\pi}\sum_{j=1}^N \varphi_j \wedge \overline{\varphi_j}$.

Si maintenant K est un corps de nombres d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$ et $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_K$-module hermitien localement libre de rang $N+1$, on munit la variété analytique complexe $\mathbb{P}E(\mathbb{C}) = \coprod_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}} \mathbb{P}E_\sigma(\mathbb{C})$ et le fibré universel $\mathcal{O}(1)$ de structures hermitiennes en appliquant les constructions précédentes aux espaces hermitiens E_σ.

3.1.3 Un calcul de décomposition polaire

Soit E un espace hermitien de dimension $N+1$. Considérons sur $\mathbb{P}E$ les structures hermitiennes définies précédemment. Pour tout entier n, les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels S^nE et $\Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n))$ sont naturellement isomorphes. Le résultat suivant permet de comparer les normes puissance symétrique sur S^nE, et $L^2(\mu)$ sur $\Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n))$, relativement à cette identification.

Lemme 3.2 (cf. [1] lemme 4.3.6) *L'isomorphisme canonique $S^nE \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n))$ est une similitude de rapport $\binom{n+N}{N}^{-1/2}$.*

Soit maintenant P un point de $\mathbb{P}E(\mathbb{C})$. Pour tout entier n munissons l'espace

$$A(n) = \Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n))$$

de la filtration définie par l'ordre d'annulation en P :

$$\operatorname{Fil}^s A(n) = \Gamma(\mathbb{P}E, \mathfrak{I}_P^s\mathcal{O}(n)). \tag{3.4}$$

[1] on prendra garde que certains textes utilisent parfois aussi la forme volume $\frac{1}{N!}\mu$ plutôt que μ.

Identifions les gradués associés $\mathrm{gr}^t A(n) = \mathrm{Fil}^t A(n)/\,\mathrm{Fil}^{t+1} A(n)$ à des sous-espaces de $A(n)$ au moyen de la structure hermitienne, de sorte que

$$\mathrm{Fil}^s A(n) = \overset{\perp}{\bigoplus_{s \leqslant t \leqslant n}} \mathrm{gr}^t A(n). \tag{3.5}$$

Notons aussi F l'hyperplan de E défini par P, Δ l'orthogonal de F dans E, δ un élément de Δ de norme 1, et l l'élément de $\Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(1))$ déduit naturellement de δ. Ainsi on a $\|l\|(P) = 1$, $\|l\|(Q) < 1$ pour $Q \in \mathbb{P}E(\mathbb{C})$ différent de P, et par le lemme 3.2 la norme L^2 de l vaut $(N+1)^{-1/2}$. Si maintenant d est un entier, la proposition suivante donne la décomposition polaire de l'application $m_{l^{\otimes d}}$ de multiplication par $l^{\otimes d}$ de $\Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n))$ dans $\Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n+d))$ relativement aux normes L^2.

Proposition 3.3 *Avec ces notations, l'application $m_{l^{\otimes d}} : A(n) \longrightarrow A(n+d)$ admet pour valeurs caractéristiques les*

$$\lambda_t(n,d) = \left(\frac{(n+N)!(n+d-t)!}{(n-t)!(n+d+N)!}\right)^{1/2} \tag{3.6}$$

avec pour espaces caractéristiques associés respectifs les $\mathrm{gr}^t A(n)$ pour $0 \leqslant t \leqslant n$.

Démonstration : Remarquons que la décomposition $E = F \overset{\perp}{\oplus} \Delta$ induit pour tout k une décomposition en somme directe orthogonale $S^k E = \bigoplus^{\perp}_{0 \leqslant t \leqslant k} S^t F \otimes \Delta^{\otimes k-t}$ et que l'isomorphisme naturel entre $S^k E$ et $A(k)$ envoie $S^t F \otimes \Delta^{\otimes k-t}$ sur $\mathrm{gr}^t A(k)$. Ainsi on déduit du diagramme commutatif naturel

$$\begin{array}{ccccc}
S^t F \otimes \Delta^{\otimes n-t} & \xrightarrow{j} & S^n E & \xrightarrow{i} & A(n) \\
\simeq \big\downarrow m_{\delta^{\otimes d}} & & \big\downarrow & & \big\downarrow m_{l^{\otimes d}} \\
S^t F \otimes \Delta^{\otimes n+d-t} & \xrightarrow{j'} & S^{n+d} E & \xrightarrow{i'} & A(n+d)
\end{array}$$

que $m_{l^{\otimes d}}$ envoie bien $\mathrm{gr}^t A(n)$ bijectivement sur $\mathrm{gr}^t A(n+d)$.

Soit maintenant $x \in S^t F \otimes \Delta^{\otimes n-t}$. Par le lemme 3.2, i est une similitude de rapport $\binom{n+N}{N}^{-1/2}$, et par le lemme A.1, j est une similitude sur son image, de rapport $\binom{n}{t}^{-1/2}$. On a donc

$$\|i \circ j(x)\| = \left(\frac{N!t!(n-t)!}{(n+N)!}\right)^{1/2} \|x\| \tag{3.7}$$

et de la même façon

$$\|i' \circ j'(x.\delta^{\otimes d})\| = \left(\frac{N!t!(n+d-t)!}{(n+d+N)!}\right)^{1/2} \|x.\delta^{\otimes d}\| = \left(\frac{N!t!(n+d-t)!}{(n+d+N)!}\right)^{1/2} \|x\|.$$

Ainsi si $y \in \mathrm{gr}^t A(n)$, on peut écrire $y = i \circ j(x)$ avec $x \in S^t F \otimes \Delta^{\otimes n-t}$, de sorte que $y.l^{\otimes d} = i' \circ j'(x.\delta^{\otimes d})$ et on trouve bien $\|y.l^{\otimes d}\| = \lambda \|y\|$ pour la valeur de λ annoncée en (3.6). $\square$

3.2 Étude métrique d'applications de restriction de jets

3.2.1 Métrisation de cônes tangents

Soient E un espace hermitien de dimension $N+1$, P un point fermé de l'espace projectif $\mathbb{P}E$ définissant un hyperplan F de E, et Δ l'orthogonal de F dans E, qui s'identifie isométriquement au quotient E/F, c'est-à-dire à la fibre de $\mathcal{O}(1)$ en P.

Soit maintenant $P^{ép}$ un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}E$ de support égal à P (donc fini sur $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$). Notons $\mathfrak{I}_{P,P^{ép}}$ et $\mathfrak{I}_{P,\mathbb{P}E}$ les faisceaux d'idéaux définissant P comme sous-schéma fermé de $P^{ép}$ et de $\mathbb{P}E$, respectivement. Pour tout entier n on munit l'espace des sections globales $\Gamma(P^{ép}, \mathcal{O}(n)|_{P^{ép}})$ de la filtration définie par l'ordre d'annulation en P. Le schéma $P^{ép}$ étant affine, on a pour tout t un isomorphisme naturel de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$\begin{aligned} j_{t,n} : \operatorname{gr}^t \Gamma(P^{ép}, \mathcal{O}(n)|_{P^{ép}}) &= \Gamma(P^{ép}, \mathfrak{I}^t_{P,P^{ép}}\mathcal{O}(n)|_{P^{ép}})/\Gamma(P^{ép}, \mathfrak{I}^{t+1}_{P,P^{ép}}\mathcal{O}(n)|_{P^{ép}}) \\ &\xrightarrow{\sim} \Gamma(P^{ép}, \mathfrak{I}^t_{P,P^{ép}}\mathcal{O}(n)/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,P^{ép}}\mathcal{O}(n)|_{P^{ép}}) = \Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,P^{ép}}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,P^{ép}}) \otimes \Delta^{\otimes n} \end{aligned} \tag{3.8}$$

du gradué associé à cette filtration sur un espace de jets en P. Notons

$$r_t = \dim \Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,P^{ép}}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,P^{ép}}) \tag{3.9}$$

la dimension commune de ces espaces.

Si n est assez grand, l'application $\operatorname{restr}_n : \Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n)) \longrightarrow \Gamma(P^{ép}, \mathcal{O}(n)|_{P^{ép}})$ est surjective. Sous cette hypothèse, l'espace $\Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n))$ étant muni de la métrique L^2, on peut alors munir $\Gamma(P^{ép}, \mathcal{O}(n)|_{P^{ép}})$ de la métrique quotient, et :

Définition 3.4 *La métrique sur $\operatorname{gr}^t \Gamma(P^{ép}, \mathcal{O}(n)|_{P^{ép}})$ est la métrique sous-quotient de cette métrique quotient sur $\Gamma(P^{ép}, \mathcal{O}(n)|_{P^{ép}})$.*

Par ailleurs, on dispose d'une application naturelle surjective de $\mathcal{O}_P$-modules

$$\mathfrak{I}^t_{P,\mathbb{P}E}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\mathbb{P}E} \twoheadrightarrow \mathfrak{I}^t_{P,P^{ép}}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,P^{ép}}. \tag{3.10}$$

Par (3.3), $\Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,\mathbb{P}E}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\mathbb{P}E})$ s'identifie à la t-ième puissance symétrique de l'espace cotangent holomorphe à $\mathbb{P}E$ en P, de sorte que :

Définition 3.5 *On munit $\Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,P^{ép}}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,P^{ép}})$ de la métrique quotient par (3.10) de la puissance symétrique de la métrique sur l'espace cotangent donnée par la définition 3.1.*

On se propose de calculer la norme du déterminant de l'application $j_{t,n}$ relativement aux métriques ainsi définies.

Remarquons que les applications (3.2), (3.8) et (3.10) s'insèrent dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{gr}^t \Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n)) & \xrightarrow{b_{t,n}} & \operatorname{gr}^t \Gamma(P^{ép}, \mathcal{O}(n)|_{P^{ép}}) \\ {\scriptstyle k_{t,n}}\big\downarrow \simeq & & {\scriptstyle j_{t,n}}\big\downarrow \simeq \\ \Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,\mathbb{P}E}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\mathbb{P}E}) \otimes \Delta^{\otimes n} & \xrightarrow{c_{t,n}} & \Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,P^{ép}}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,P^{ép}}) \otimes \Delta^{\otimes n} \end{array} \tag{3.11}$$

où l'application $b_{t,n}$, déduite de l'application naturelle de restriction restr_n, est surjective (n étant toujours supposé assez grand). Alors, notant $K_t(n)$ le noyau de $b_{t,n}$, on obtient par passage au quotient un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$\beta_{t,n} : \mathrm{gr}^t\,\Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n))/K_t(n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^t\,\Gamma(P^{\acute{e}p}, \mathcal{O}(n)|_{P^{\acute{e}p}}). \tag{3.12}$$

Proposition 3.6 *Sous ces hypothèses, la norme du déterminant de l'application de jet $j_{t,n}$ vaut*

$$\left\|\bigwedge^{\max} j_{t,n}\right\| = \left(\frac{(n+N)!}{N!t!(n-t)!}\right)^{r_t/2} \left\|\bigwedge^{\max} \beta_{t,n}\right\|^{-1}$$

où, conformément à (3.9), $r_t = \mathrm{rg}\, j_{t,n} = \mathrm{rg}\, \beta_{t,n}$ *est la longueur du t-ième jet de $P^{\acute{e}p}$.*

Démonstration : Cela découle du fait que, dans le diagramme commutatif (3.11), d'une part, l'application $c_{t,n}$ est par construction une isométrie partielle, et d'autre part, puisque par (3.3) et par la définition 3.1 on peut identifier $\Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,\mathbb{P}E}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,\mathbb{P}E})$ isométriquement à $S^tF \otimes \Delta^{\otimes -t}$, il résulte de (3.7) que l'application $k_{t,n}$ est une similitude de rapport $\left(\frac{(n+N)!}{N!t!(n-t)!}\right)^{1/2}$. □

Ceci étant fait, pour que la proposition présente un quelconque intérêt, il faut encore savoir estimer la norme $\|\bigwedge^{\max} \beta_{t,n}\|$, ce qui fait l'objet du prochain paragraphe.

3.2.2 Un théorème de presque-isométrie

L'estimation recherchée fera appel au résultat technique suivant :

Proposition 3.7 *Soient $H_0 = Y_0 \overset{\perp}{\oplus} Z_0$ un espace hermitien somme directe orthogonale de deux sous-espaces et T_0 un sous-espace de H_0 tel que $T_0 \cap Y_0 = \{0\}$.*

Alors il existe une constante $\kappa_0 > 0$ telle que, pour toute donnée d'un espace hermitien $H_1 = Y_1 \overset{\perp}{\oplus} Z_1$ somme directe orthogonale de deux sous-espaces et pour tout sous-espace T_1 de H_1 tel que $T_1 \cap Y_1 = \{0\}$, pour toute application linéaire $\varphi : H_0 \to H_1$ vérifiant les conditions suivantes :

i. φ *est bijective*

ii. $\varphi(Y_0) = Y_1$, $\varphi(Z_0) = Z_1$, $\varphi(T_0) = T_1$

iii. *il existe* $\eta_\varphi > 0$ *tel que* $\|\varphi(y_0)\| \leqslant \eta_\varphi \|y_0\|$ *pour tout* $y_0 \in Y_0$

iv. *il existe* $\zeta_\varphi > 0$ *tel que* $\|\varphi(z_0)\| \geqslant \zeta_\varphi \|z_0\|$ *pour tout* $z_0 \in Z_0$,

on ait :

$$\|p_{Y_1}|_{T_1}\| \leqslant \left(1 + \kappa_0^2 \frac{\zeta_\varphi^2}{\eta_\varphi^2}\right)^{-1/2}.$$

Démonstration : On a $\ker p_{Z_0}|_{T_0} = T_0 \cap \ker p_{Z_0} = T_0 \cap Y_0 = \{0\}$ de sorte que $p_{Z_0}|_{T_0}$ est injective ; choisissons pour κ_0 la plus petite valeur caractéristique de $p_{Z_0}|_{T_0}$. On a alors bien $\kappa_0 > 0$ et, pour tout $t_0 \in T_0$, on aura l'inégalité

$$\|p_{Z_0}(t_0)\| \geqslant \kappa_0 \|t_0\|.$$

Les hypothèses de la proposition impliquent que $p_{Y_1} \circ \varphi = \varphi \circ p_{Y_0}$ et que $p_{Z_1} \circ \varphi = \varphi \circ p_{Z_0}$. Soit maintenant $t_1 \in T_1$, $t_1 \neq 0$. Puisque $T_1 = \varphi(T_0)$, on peut écrire $t_1 = \varphi(t_0)$, $t_0 \in T_0$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\|p_{Y_1}(t_1)\|^2}{\|t_1\|^2} &= \frac{\|p_{Y_1}(t_1)\|^2}{\|p_{Y_1}(t_1)\|^2 + \|p_{Z_1}(t_1)\|^2} \\
&= \frac{\|\varphi(p_{Y_0}(t_0))\|^2}{\|\varphi(p_{Y_0}(t_0))\|^2 + \|\varphi(p_{Z_0}(t_0))\|^2} \\
&= \left(1 + \frac{\|\varphi(p_{Z_0}(t_0))\|^2}{\|\varphi(p_{Y_0}(t_0))\|^2}\right)^{-1} \\
&\leqslant \left(1 + \frac{\zeta_\varphi^2}{\eta_\varphi^2}\frac{\|p_{Z_0}(t_0)\|^2}{\|p_{Y_0}(t_0)\|^2}\right)^{-1} \\
&\leqslant \left(1 + \frac{\zeta_\varphi^2}{\eta_\varphi^2}\frac{\|p_{Z_0}(t_0)\|^2}{\|t_0\|^2}\right)^{-1} \\
&\leqslant \left(1 + \kappa_0^2\frac{\zeta_\varphi^2}{\eta_\varphi^2}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire 3.8 *Sous les hypothèses précédentes, la norme du déterminant de l'isomorphisme naturel* $\beta : Y_1 \xrightarrow{\sim} (Y_1 + T_1)/T_1$ *vérifie l'encadrement*

$$1 \geqslant \left\|\bigwedge^{\max} \beta\right\| \geqslant \left(1 - \left(1 + \kappa_0^2\frac{\zeta_\varphi^2}{\eta_\varphi^2}\right)^{-1}\right)^{\min(\dim Y_1, \dim T_1)/2}.$$

Démonstration : Cela résulte du corollaire A.17.*iii*. et de la proposition A.18. □

On est maintenant en mesure de prouver l'énoncé suivant :

Théorème 3.9 *Soient* E *un espace hermitien,* P *un point fermé de* $\mathbb{P}E$ *et* $P^{ép}$ *un sous-schéma fermé de* $\mathbb{P}E$ *supporté par* P*. Alors, pour tout entier* t*, la norme du déterminant de l'isomorphisme* $\beta_{t,n}$ *défini en* (3.12) *admet pour* n *tendant vers l'infini un développement asymptotique de la forme*

$$\left\|\bigwedge^{\max} \beta_{t,n}\right\| = 1 - O(n^{-1}).$$

Démonstration : Pour alléger l'écriture notons $A(n) = \Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n))$, et $I(n) = \Gamma(\mathbb{P}E, \mathfrak{I}_{P^{ép},\mathbb{P}E}\mathcal{O}(n)) \subset A(n)$ la partie de degré n de l'idéal homogène saturé définissant $P^{ép}$. Pour n assez grand, l'image inverse par restr_n de $\mathrm{Fil}^t\,\Gamma(P^{ép}, \mathcal{O}(n)|_{P^{ép}})$ est alors

$$\mathrm{restr}_n^{-1}\,\mathrm{Fil}^t\,\Gamma(P^{ép}, \mathcal{O}(n)|_{P^{ép}}) = I(n) + \mathrm{Fil}^t A(n), \tag{3.13}$$

de sorte que, posant

$H_0 = A(n) \;/\; ((Fil^t A(n) \cap I(n)) + Fil^{t+1} A(n))$
$Y_0 = Fil^t A(n) \;/\; ((Fil^t A(n) \cap I(n)) + Fil^{t+1} A(n))$
$Z_0 = A(n) \;/\; Fil^t A(n) \;=\; (Fil^t A(n))^{\perp}$
$T_0 = (I(n) + Fil^{t+1} A(n)) \;/\; ((Fil^t A(n) \cap I(n)) + Fil^{t+1} A(n)),$
on a des isomorphismes isométriques naturels

$$gr^t \Gamma(\mathbb{P}_E, \mathcal{O}(n))/K_t(n) = Y_0$$

et

$$gr^t \Gamma(P^{ép}, \mathcal{O}(n)|_{P^{ép}}) = (I(n) + \operatorname{Fil}^t A(n))/(I(n) + \operatorname{Fil}^{t+1} A(n)) = (Y_0 + T_0)/T_0,$$

avec par construction $H_0 = Y_0 \overset{\perp}{\oplus} Z_0$ et $T_0 \cap Y_0 = \{0\}$. Soit maintenant d un entier, et de la même façon que précédemment, posons
$H_1 = A(n+d) \;/\; ((Fil^t A(n+d) \cap I(n+d)) + Fil^{t+1} A(n+d))$
$Y_1 = Fil^t A(n+d) \;/\; ((Fil^t A(n+d) \cap I(n+d)) + Fil^{t+1} A(n+d))$
$Z_1 = A(n+d) \;/\; Fil^t A(n+d)$
$T_1 = (I(n+d) + Fil^{t+1} A(n+d)) \;/\; ((Fil^t A(n+d) \cap I(n+d)) + Fil^{t+1} A(n+d))$
et considérons l'application

$$\varphi : H_0 \longrightarrow H_1$$

induite par l'application $m_{l\otimes d}$ étudiée dans la proposition 3.3.

L'application $m_{l\otimes d}$ envoie $A(n)$ dans $A(n+d)$, préserve les filtrations de ces espaces et envoie $I(n)$ dans $I(n+d)$. En outre, elle envoie bijectivement $A(n)/\operatorname{Fil}^{t+1} A(n)$ sur $A(n+d)/\operatorname{Fil}^{t+1} A(n+d))$. Ceci implique que φ est bijective, et vérifie : $\varphi(Y_0) = Y_1$, $\varphi(Z_0) = Z_1$ et $\varphi(T_0) = T_1$.

Par ailleurs, l'espace Z_0 est somme directe orthogonale

$$Z_0 = \overset{\perp}{\bigoplus_{0 \leqslant s \leqslant t-1}} \operatorname{gr}^s A(n)$$

de sous-espaces caractéristiques de $m_{l\otimes d}$, de valeurs caractéristiques associées

$$\lambda_s = \left(\frac{(n+N)(n+N-1)\dots(n-s+1)}{(n+d+N)(n+d+N-1)\dots(n+d-s+1)} \right)^{1/2}.$$

On remarque que la suite des λ_s est décroissante, de sorte qu'en posant

$$\zeta_\varphi = \lambda_{t-1},$$

on a

$$\|\varphi(z_0)\| \geqslant \zeta_\varphi \|z_0\|$$

pour tout $z_0 \in Z_0$.

Enfin, Y_0 est un quotient de $\operatorname{gr}^t A(n)$, sur lequel $m_{l\otimes d}$ est une similitude de rapport λ_t. Ainsi, en posant

$$\eta_\varphi = \lambda_t,$$

on a

$$\|\varphi(y_0)\| = \eta_\varphi \|y_0\|$$

pour tout $y_0 \in Y_0$.

Les hypothèses de la proposition 3.7 étant toutes vérifiées on peut appliquer le corollaire 3.8 à l'isomorphisme $\beta_{t,n+d} : Y_1 \xrightarrow{\sim} (Y_1 + T_1)/T_1$, ce qui donne

$$1 \geqslant \left\| \bigwedge^{\max} \beta_{t,n+d} \right\| \geqslant \left(1 - \left(1 + \kappa_0^2 \frac{n+d-t+1}{n-t+1} \right)^{-1} \right)^{\min(\dim Y_1, \dim T_1)/2} \tag{3.14}$$

et on trouve l'estimation souhaitée en faisant tendre d vers l'infini. $\square$

Remarquons que, par la proposition A.18, le théorème implique que pour t fixé, les valeurs caractéristiques de $\beta_{t,n}$ restent dans un intervalle de la forme $[1 - O(n^{-1}), 1]$ lorsque n tend vers l'infini. Ainsi on peut considérer d'une certaine façon que $\beta_{t,n}$ «tend» à devenir une isométrie.

3.3 Le développement asymptotique général

3.3.1 Énoncé du théorème et squelette de la démonstration

Soient $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_K$-module hermitien localement libre de rang $N+1$, et $\mathbb{P}E = \operatorname{Proj} \operatorname{Sym} E$ l'espace projectif associé muni des structures hermitiennes construites au paragraphe 3.1.2.

Si $P^{ép}$ est un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}E$, plat de dimension relative zéro sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, de support l'image P d'une section de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ dans $\mathbb{P}E$, notant $\mathfrak{I}_{P,P^{ép}}$ le faisceau d'idéaux (nilpotent) définissant P comme sous-schéma fermé de $P^{ép}$, on peut munir le $\mathcal{O}_K$-module $\Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,P^{ép}} / \mathfrak{I}^{t+1}_{P,P^{ép}})$ des métriques provenant de la structure kählérienne de $\mathbb{P}E$, suivant la définition 3.5. Alors :

Définition 3.10 *Avec ce choix de métriques, on définit la hauteur du cône tangent à $P^{ép}$ en P comme*

$$h(C_P P^{ép}) = \sum_{t \geqslant 0} \widehat{\deg}\, \overline{\Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,P^{ép}} / \mathfrak{I}^{t+1}_{P,P^{ép}})}.$$

Soit maintenant Σ un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}E$, plat de dimension relative zéro sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ (on ne fait plus d'hypothèse sur le support de Σ). Fixons un plongement $K \hookrightarrow \overline{K}$ de K dans sa clôture algébrique, et notons $p_1, \ldots, p_e \in \mathbb{P}E(\overline{K})$ les points géométriques de la fibre générique de Σ. Posons

$$r_{t,i} = \dim_{\overline{K}} \Gamma(p_i, \mathfrak{I}^{\,t}_{p_i, \Sigma_{\overline{K},p_i}} / \mathfrak{I}^{\,t+1}_{p_i, \Sigma_{\overline{K},p_i}}) \tag{3.15}$$

et

$$m_i = \sum_{t \geqslant 0} r_{t,i} = \dim_{\overline{K}} \Gamma(\Sigma_{\overline{K},p_i}, \mathcal{O}_{\Sigma_{\overline{K},p_i}}). \tag{3.16}$$

On définit la hauteur du cycle associé à Σ comme le réel

$$h([\Sigma]) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant e} m_i h(p_i) \tag{3.17}$$

où $h(p_i)$ est la hauteur (normalisée) du point p_i, relativement au fibré $\overline{\mathcal{O}(1)}$.

Choisissons une extension finie L de K telle que les p_i soient définis sur L. Ce choix étant fait, pour tout i on notera $\overline{\Sigma_{\mathcal{O}_L,p_i}}$ la fermeture dans $\mathbb{P}E_{\mathcal{O}_L}$ du localisé $\Sigma_{\mathcal{O}_L,p_i}$, et P_i la fermeture de p_i. Ainsi P_i est l'image d'une section de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_L$ dans $\mathbb{P}E_{\mathcal{O}_L}$, $\overline{\Sigma_{\mathcal{O}_L,p_i}}$ est un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}E_{\mathcal{O}_L}$ dont le support est égal à P_i, et $\Sigma_{\mathcal{O}_L}$ est réunion schématique des $\overline{\Sigma_{\mathcal{O}_L,p_i}}$. Notons $\widetilde{\Sigma_{\mathcal{O}_L}}$ le schéma somme disjointe des $\overline{\Sigma_{\mathcal{O}_L,p_i}}$, et

$$\nu : \widetilde{\Sigma_{\mathcal{O}_L}} \longrightarrow \Sigma_{\mathcal{O}_L} \tag{3.18}$$

le morphisme naturel. Par construction, la restriction de ν à la fibre générique est un isomorphisme, de sorte que le $\mathcal{O}_{\Sigma_{\mathcal{O}_L}}$-module $\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma_{\mathcal{O}_L}}}/\mathcal{O}_{\Sigma_{\mathcal{O}_L}}$ est de torsion. Remarquons aussi qu'on est dans les conditions d'application de la définition 3.10 avec $K = L$, $P = P_i$ et $P^{ép} = \overline{\Sigma_{\mathcal{O}_L,p_i}}$. On peut alors poser les

Définition 3.11 *La hauteur du cône tangent de Σ est le réel*

$$h(C\Sigma) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant e} h(C_{P_i}\overline{\Sigma_{\mathcal{O}_L,p_i}}). \tag{3.19}$$

et

Définition 3.12 *La ramification normalisée de Σ est le réel*

$$\operatorname{ramif}(\Sigma) = \Big(\#\,\Gamma(\Sigma_{\mathcal{O}_L}, \nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma_{\mathcal{O}_L}}}/\mathcal{O}_{\Sigma_{\mathcal{O}_L}})\Big)^{\frac{1}{[L:\mathbb{Q}]}}. \tag{3.20}$$

On vérifie aisément que ces deux quantités ne dépendent pas du choix de L.

Si maintenant σ est un plongement de K dans $\mathbb{C}$, on notera $p_{1,\sigma}, \dots, p_{e,\sigma}$ les points de $\Sigma_\sigma(\mathbb{C})$ (par exemple on pourra choisir une extension de σ au corps L utilisé ci-dessus, et choisir pour $p_{i,\sigma}$ le point déduit de p_i par σ). Pour n assez grand on munit chacun des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\Gamma((\Sigma_\sigma)_{p_{i,\sigma}}, \mathcal{O}(n)|_{(\Sigma_\sigma)_{p_{i,\sigma}}})$ de la norme quotient de la norme L^2 sur $\Gamma(\mathbb{P}E_\sigma, \mathcal{O}(n))$, et on note

$$\nu^*_{n,\sigma} : \Gamma(\Sigma_\sigma, \mathcal{O}(n)|_{\Sigma_\sigma}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant e}^{\perp} \Gamma((\Sigma_\sigma)_{p_{i,\sigma}}, \mathcal{O}(n)|_{(\Sigma_\sigma)_{p_{i,\sigma}}})$$

l'isomorphisme (en général non isométrique) dont les composantes sont les morphismes de restriction.

Enfin on note Fil_i les filtrations sur $\Gamma(\mathbb{P}E_\sigma, \mathcal{O}(n))$ et $\Gamma((\Sigma_\sigma)_{p_{i,\sigma}}, \mathcal{O}(n)|_{(\Sigma_\sigma)_{p_{i,\sigma}}})$ définies par l'ordre d'annulation en $p_{i,\sigma}$, gr_i les gradués associés, $K_{t,i,\sigma}(n)$ le noyau du morphisme naturel $\mathrm{gr}_i^t\,\Gamma(\mathbb{P}E_\sigma, \mathcal{O}(n)) \longrightarrow \mathrm{gr}_i^t\,\Gamma((\Sigma_\sigma)_{p_{i,\sigma}}, \mathcal{O}(n)|_{(\Sigma_\sigma)_{p_{i,\sigma}}})$ et pour n assez grand

$$\beta_{t,n,i,\sigma} : \mathrm{gr}_i^t\,\Gamma(\mathbb{P}E_\sigma, \mathcal{O}(n))/K_{t,i,\sigma}(n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_i^t\,\Gamma((\Sigma_\sigma)_{p_{i,\sigma}}, \mathcal{O}(n)|_{(\Sigma_\sigma)_{p_{i,\sigma}}})$$

l'isomorphisme qui s'en déduit comme en (3.12).

Muni de ces notations, le résultat principal de ce texte peut s'énoncer ainsi :

Théorème 3.13 *Sous les hypothèses qui précèdent, les hauteurs du sous-schéma* Σ *admettent le développement asymptotique suivant :*

$$\begin{aligned} h(\Sigma;n) &= n.h([\Sigma]) + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant e\\ t\geqslant 0}} \frac{r_{t,i}}{2}\log\frac{(n+N)!}{N!t!(n-t)!} \\ &\qquad + h(C\Sigma) - \log\operatorname{ramif}(\Sigma) + e(n) \end{aligned} \tag{3.21}$$

avec pour tout n *assez grand*

$$e(n) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}}\left(\log\left\|\bigwedge^{\max}\nu^*_{n,\sigma}\right\| - \sum_{1\leqslant i\leqslant e}\log\left\|\bigwedge^{\max}\beta_{t,n,i,\sigma}\right\|\right) \underset{n\to\infty}{=} O(n^{-1}). \tag{3.22}$$

Démonstration : Pour montrer le théorème 3.13, on ne perd pas de généralité en supposant que les p_i sont définis sur K, et que chaque $p_{i,\sigma}$ est bien le point de $\Sigma_\sigma(\mathbb{C})$ déduit de p_i par σ. Notons

$$\nu^*_n : \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma) \longrightarrow \Gamma(\widetilde{\Sigma}, \nu^*(\mathcal{O}(n)|_\Sigma)) = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant e}\Gamma(\overline{\Sigma_{p_i}}, \mathcal{O}(n)|_{\overline{\Sigma_{p_i}}}) \tag{3.23}$$

l'application dont les composantes sont les applications de restriction et qui, par construction, est génériquement bijective. Pour n assez grand on peut munir les $\Gamma(\overline{\Sigma_{p_i}}, \mathcal{O}(n)|_{\overline{\Sigma_{p_i}}})$ des normes quotient des normes L^2 sur $\mathbb{P}E$, et $\Gamma(\widetilde{\Sigma}, \nu^*(\mathcal{O}(n)|_\Sigma))$ des normes somme directe orthogonale. Compte tenu de (1.3) et (2.8) on trouve donc

$$h(\Sigma;n) = h(\bigwedge^{\max}\nu^*_n) + \sum_{1\leqslant i\leqslant e} h(\overline{\Sigma_{p_i}};n), \tag{3.24}$$

avec $h(\bigwedge^{\max}\nu^*_n) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}(\sum_{\mathfrak{p}}\log\|\bigwedge^{\max}\nu^*_n\|_{\mathfrak{p}} + \sum_\sigma \log\|\bigwedge^{\max}\nu^*_n\|_\sigma)$. Aux paragraphes 3.3.2 et 3.3.3 on montrera les estimations suivantes sur ces normes locales :

i. aux places finies, on a

$$\|\bigwedge^{\max}\nu^*_n\|_{\mathfrak{p}} = (\#\,\Gamma(\Sigma, \nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}/\mathcal{O}_\Sigma)_{\mathfrak{p}})^{-1} \tag{3.25}$$

indépendamment de n ;

ii. aux places infinies, le terme $\log\|\bigwedge^{\max}\nu^*_n\|_\sigma$ tend vers 0 avec une vitesse exponentielle en n.

On peut aussi estimer les hauteurs des $\overline{\Sigma_{p_i}}$, et plus généralement de tout sous-schéma fermé $P^{ép}$ fini et plat sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ supporté par l'image P d'une section $i_P : \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K \hookrightarrow \mathbb{P}E$, comme suit.

Notons F l'hyperplan de E défini par P, de sorte que

$$h(P) = \widehat{\deg}\, \overline{E/F}. \tag{3.26}$$

Munissant le $\mathcal{O}_K$-module hermitien $\overline{\Gamma(P^{ép}, \mathcal{O}(n)|_{P^{ép}})}$ de la filtration définie par l'ordre d'annulation en P, et munissant les gradués associés des métriques de sous-quotients, on obtient par (2.5) l'égalité

$$h(P^{ép}; n) = \sum_{t \geqslant 0} \widehat{\deg}\, \overline{\mathrm{gr}^t\, \Gamma(P^{ép}, \mathcal{O}(n)|_{P^{ép}})}. \tag{3.27}$$

Par ailleurs, le schéma $P^{ép}$ étant affine, on dispose comme en (3.8) d'un isomorphisme naturel de $\mathcal{O}_K$-modules

$$\jmath_{t,n} : \mathrm{gr}^t\, \Gamma(P^{ép}, \mathcal{O}(n)|_{P^{ép}}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,P^{ép}}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,P^{ép}}) \otimes (E/F)^{\otimes n} \tag{3.28}$$

duquel on déduit (notamment par (2.6) et (2.8))

$$\begin{aligned} \widehat{\deg}\, \overline{\mathrm{gr}^t\, \Gamma(P^{ép}, \mathcal{O}(n)|_{P^{ép}})} = n.r_t.h(P) + \widehat{\deg}\, \overline{\Gamma(P, \mathfrak{I}^t_{P,P^{ép}}/\mathfrak{I}^{t+1}_{P,P^{ép}})} \\ + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}} \log \left\| \bigwedge^{\max} \jmath_{t,n} \right\|_\sigma \end{aligned} \tag{3.29}$$

où $r_t = r_t(P^{ép}) = \dim_K \mathrm{gr}^t\, \Gamma(P^{ép}, \mathcal{O}(n)|_{P^{ép}})_K$. Notant comme en (3.12) $K_t(n)$ le noyau de l'application naturelle $\mathrm{gr}^t\, \Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n)) \longrightarrow \mathrm{gr}^t\, \Gamma(P^{ép}, \mathcal{O}(n)|_{P^{ép}})$, qui est surjective pour n assez grand, et

$$\beta_{t,n} : \mathrm{gr}^t\, \Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n))/K_t(n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^t\, \Gamma(P^{ép}, \mathcal{O}(n)|_{P^{ép}}) \tag{3.30}$$

l'isomorphisme de $\mathcal{O}_K$-modules qui s'en déduit, on trouve par la proposition 3.6

$$\log \left\| \bigwedge^{\max} \jmath_{t,n} \right\|_\sigma = \frac{r_t}{2} \log \frac{(n+N)!}{N!t!(n-t)!} - \log \left\| \bigwedge^{\max} \beta_{t,n} \right\|_\sigma. \tag{3.31}$$

Appliquant tout ceci en notant $\beta_{t,n,i}$ l'application $\beta_{t,n}$ pour $P^{ép} = \overline{\Sigma_{p_i}}$, puis sommant sur i et sur σ, on obtient bien les formules voulues. On conclut alors en appliquant le théorème 3.9 et l'estimation annoncée sur les normes archimédiennes de ν_n^*, ce qui donne bien un contrôle en $O(n^{-1})$ sur $e(n)$. $\square$

On remarquera que la formule (3.22) ainsi obtenue pour le terme d'erreur $e(n)$ implique que celui-ci est négatif lorsque Σ est réduit et, inversement, est positif lorsque Σ est géométriquement irréductible.

3.3.2 Un calcul de norme aux places non-archimédiennes

On se propose ici de démontrer la formule (3.25).

Définition 3.14 *On appelle anneau semi-local un anneau n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux maximaux. Un schéma X sera dit semi-local si X est le spectre d'un anneau semi-local. Il revient au même de dire que X est affine et n'a qu'un nombre fini de points fermés.*

Ainsi, tout schéma fini sur le spectre d'un anneau local est semi-local. En particulier, avec les notations de la formule (3.25), $\Sigma_{\mathfrak{p}}$ est semi-local. On rappelle par ailleurs que tout fibré en droites sur un schéma semi-local est trivial.

Terminons maintenant la preuve de la formule. Avec les notations correspondantes, puisque Σ est affine sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, pour tout fibré en droites $\mathcal{L}$ sur Σ, on a une identification naturelle $\Gamma(\Sigma,\mathcal{L})_{\mathfrak{p}} = \Gamma(\Sigma_{\mathfrak{p}},\mathcal{L}|_{\Sigma_{\mathfrak{p}}})$, et il en est de même pour $\widetilde{\Sigma}$. Soit maintenant l une section de $\Gamma(\Sigma_{\mathfrak{p}},\mathcal{O}(n)|_{\Sigma_{\mathfrak{p}}})$ qui trivialise $\mathcal{O}(n)$ sur $\Sigma_{\mathfrak{p}}$. Alors ν^*l trivialise $\nu^*\mathcal{O}(n)$ sur $\widetilde{\Sigma}$, et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(\Sigma_{\mathfrak{p}},\mathcal{O}_{\Sigma_{\mathfrak{p}}}) & \xrightarrow{\nu^*_{0,\mathfrak{p}}} & \Gamma(\widetilde{\Sigma}_{\mathfrak{p}},\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_{\mathfrak{p}}}) \\
{\scriptstyle l}\downarrow{\scriptstyle \simeq} & & {\scriptstyle \nu^*l}\downarrow{\scriptstyle \simeq} \\
\Gamma(\Sigma_{\mathfrak{p}},\mathcal{O}(n)|_{\Sigma_{\mathfrak{p}}}) & \xrightarrow{\nu^*_{n,\mathfrak{p}}} & \Gamma(\widetilde{\Sigma}_{\mathfrak{p}},\nu^*(\mathcal{O}(n)|_{\Sigma_{\mathfrak{p}}})).
\end{array}$$

Ainsi $\nu^*_{0,\mathfrak{p}}$ et $\nu^*_{n,\mathfrak{p}}$ sont toutes deux injectives et ont des conoyaux isomorphes, de sorte que, grâce à l'identification $\Gamma(\widetilde{\Sigma}_{\mathfrak{p}},\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_{\mathfrak{p}}}) = \Gamma(\Sigma_{\mathfrak{p}},\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_{\mathfrak{p}}})$, on trouve bien :

Proposition 3.15 *Avec ces notations, on a*

$$\left\|\bigwedge^{\max}\nu_n^*\right\|_{\mathfrak{p}} = \#(\operatorname{coker}\nu^*_{n,\mathfrak{p}})^{-1} = \#(\operatorname{coker}\nu^*_{0,\mathfrak{p}})^{-1} = (\#\,\Gamma(\Sigma_{\mathfrak{p}},\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_{\mathfrak{p}}}/\mathcal{O}_{\Sigma_{\mathfrak{p}}}))^{-1}.$$

3.3.3 Un calcul de norme aux places archimédiennes

On se propose ici de démontrer le résultat suivant :

Proposition 3.16 *Soient E un espace hermitien de dimension $N+1$ et Σ un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}E$ qui est réunion (disjointe) d'un nombre fini de sous-schémas $\Sigma_1,\dots,\Sigma_e$ dont les supports respectifs sont des points $p_1,\dots,p_e$. Pour tout entier n assez grand, munissons $\Gamma(\Sigma,\mathcal{O}(n))$ ainsi que les $\Gamma(\Sigma_i,\mathcal{O}(n))$ des normes quotient de la norme L^2 sur $\Gamma(\mathbb{P}E,\mathcal{O}(n))$. Alors il existe un réel $\varepsilon\in[0,1[$ tel que, pour tout n assez grand, la norme du déterminant de l'application naturelle*

$$\nu_n^* : \Gamma(\Sigma,\mathcal{O}(n)) \longrightarrow \prod_{1\leqslant i\leqslant e}^{\perp}\Gamma(\Sigma_i,\mathcal{O}(n))$$

soit dans l'intervalle $[1-\varepsilon^n,1]$.

Pour démontrer cette proposition, il nous faut établir quelques lemmes et résultats préliminaires. Pour tout i, notons F_i l'hyperplan de E représenté par p_i et Δ_i l'orthogonal de F_i. Choisissons un élément s_i de norme 1 dans Δ_i. Alors, grâce à l'isomorphisme naturel $E\simeq\Gamma(\mathbb{P}E,\mathcal{O}(1))$, on peut considérer s_i comme une section globale de $\mathcal{O}(1)$, de norme $(N+1)^{-1/2}$ (cf. lemme 3.2). On a alors $\|s_i\|(p_i)=1$ et $\|s_i\|(p)<1$ si $p\neq p_i$. En outre, les p_i étant deux à deux distincts, on peut trouver des voisinages U_i de p_i (pour la topologie complexe) deux à deux disjoints. Il existe alors un réel $\eta<1$ tel que, pour tout i, on ait

$\|s_i\|(p) < \eta$ pour tout $p \notin U_i$. Ceci implique que pour tout couple d'indices (i,j) avec $i \neq j$, et pour tout $p \in \mathbb{P}E$, on a

$$|< s_i, s_j > (p)| < \eta. \tag{3.32}$$

Soit l la longueur de Σ. Notons $\mathfrak{I}_{p_i}$ le faisceau d'idéaux définissant p_i comme sous-schéma fermé de $\mathbb{P}E$ et $p_i^{<l>}$ le sous-schéma obtenu en épaississant p_i à l'ordre l, c'est-à-dire le sous-schéma fermé de $\mathbb{P}E$ défini par le faisceau d'idéaux $\mathfrak{I}_{p_i}^l$. Alors pour tout i, Σ_i est un sous-schéma fermé de $p_i^{<l>}$.

Soit n un entier assez grand. La présence du produit scalaire L^2 sur $\Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n))$ permet d'identifier $\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n))$ ainsi que les $\Gamma(\Sigma_i, \mathcal{O}(n))$ et les $\Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n))$ à des sous-espaces de $\Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n))$, plus précisément aux orthogonaux des noyaux des surjections correspondantes. En outre, par transitivité des normes quotient, cette identification fait de $\Gamma(\Sigma_i, \mathcal{O}(n))$ un sous-espace de $\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n))$ et de $\Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n))$.

Notons $A(n) = \Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n))$ et considérons pour tout i la filtration

$$Fil_i^t A(n) = \Gamma(\mathbb{P}E, \mathfrak{I}_{p_i}^t \mathcal{O}(n))$$

sur $A(n)$ définie par l'ordre d'annulation en p_i. Alors $\Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n)) = Fil_i^l A(n)^\perp$ s'identifie à l'image de l'application composée naturelle $S^{l-1}E \otimes \Delta_i^{\otimes n-l+1} \hookrightarrow S^n E \xrightarrow{\sim} A(n)$; ou encore, si on note

$$m_{s_i^{n-l+1}} : A(l-1) \longrightarrow A(n)$$

l'application de multiplication par $s_i^{n-l+1} \in A(n-l+1)$, on a

$$\Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n)) = m_{s_i^{n-l+1}}(\Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(l-1))) = m_{s_i^{n-l+1}}(A(l-1)).$$

Lemme 3.17 *Si $i \neq j$, il existe un réel $\varepsilon < 1$ tel que, si n est assez grand, en considérant $\Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n))$ et $\Gamma(p_j^{<l>}, \mathcal{O}(n))$ comme des sous-espaces de $A(n)$, la norme de la projection orthogonale de $\Gamma(p_j^{<l>}, \mathcal{O}(n))$ sur $\Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n))$ vérifie la majoration suivante :*

$$\|p_{\Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n))}|_{\Gamma(p_j^{<l>}, \mathcal{O}(n))}\| \leqslant \varepsilon^n.$$

Démonstration : Par la proposition 3.3 la plus petite valeur caractéristique de l'application

$$m_{s_i^{n-l+1}} : \Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(l-1)) \longrightarrow \Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n))$$

est

$$\lambda_{l-1}(l-1, n-l+1) = \binom{n+N}{N+l-1}^{-1/2} \underset{n \to \infty}{\sim} (N+l-1)!^{1/2}.n^{-\frac{1}{2}(N+l-1)}.$$

Ainsi il existe $c > 0$ tel que pour n assez grand, tout élément $t_i \in \Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n))$ s'écrive de façon unique $t_i = s_i^{n-l+1} u_i$ avec $u_i \in \Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(l-1))$, et que l'on ait

$$\|t_i\| \geqslant c.n^{-\frac{1}{2}(N+l-1)} \|u_i\|. \tag{3.33}$$

Si l'on considère maintenant aussi $t_j = s_j^{n-l+1} u_j \in \Gamma(p_j^{<l>}, \mathcal{O}(n))$, appliquant (3.32) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$\begin{aligned}
| < t_i, t_j >_{L^2} | &= \left| \int_{\mathbb{P}E} < t_i, t_j > (p)\, d\mu(p) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{P}E} < u_i, u_j > (p) (< s_i, s_j > (p))^{n-l+1} d\mu(p) \right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{P}E} | < u_i, u_j > (p)| . \eta^{n-l+1} d\mu(p) \\
&\leqslant \|u_i\|_{L^2} . \|u_j\|_{L^2} . \eta^{n-l+1}.
\end{aligned}$$

Alors, pour tout choix de ε dans l'intervalle $]\eta, 1[$, on a, grâce aux inégalités précédentes et si n est assez grand :

$$\begin{aligned}
\|p_{\Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n))}|_{\Gamma(p_j^{<l>}, \mathcal{O}(n))}\| &= \max_{\substack{t_i \in \Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n)) \setminus \{0\} \\ t_j \in \Gamma(p_j^{<l>}, \mathcal{O}(n)) \setminus \{0\}}} \frac{< t_i, t_j >}{\|t_i\| . \|t_j\|} \\
&\leqslant \max_{\substack{u_i \in \Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(l)) \setminus \{0\} \\ u_j \in \Gamma(p_j^{<l>}, \mathcal{O}(l)) \setminus \{0\}}} \frac{\|u_i\| . \|u_j\| . \eta^{n-l+1}}{\|u_i\| . \|u_j\| . c^2 . n^{-(N+l-1)}} \\
&\leqslant \varepsilon^n,
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Lemme 3.18 *Si $i \neq j$, il existe un réel $\varepsilon < 1$ tel que, si n est assez grand, en considérant $\Gamma(\Sigma_i, \mathcal{O}(n))$ et $\Gamma(\Sigma_j, \mathcal{O}(n))$ comme des sous-espaces de $A(n)$, la norme de la projection orthogonale de $\Gamma(\Sigma_j, \mathcal{O}(n))$ sur $\Gamma(\Sigma_i, \mathcal{O}(n))$ vérifie la majoration suivante :*

$$\|p_{\Gamma(\Sigma_i, \mathcal{O}(n))}|_{\Gamma(\Sigma_j, \mathcal{O}(n))}\| \leqslant \varepsilon^n.$$

Démonstration : Puisque les $\Gamma(\Sigma_k, \mathcal{O}(n))$ sont des sous-espaces des $\Gamma(p_k^{<l>}, \mathcal{O}(n))$, on a $\|p_{\Gamma(\Sigma_i, \mathcal{O}(n))}|_{\Gamma(\Sigma_j, \mathcal{O}(n))}\| \leqslant \|p_{\Gamma(p_i^{<l>}, \mathcal{O}(n))}|_{\Gamma(p_j^{<l>}, \mathcal{O}(n))}\|$. On conclut alors en appliquant le lemme précédent. □

On est maintenant en mesure de démontrer la proposition. En posant $H = \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n))$ et $H_i = \Gamma(\Sigma_i, \mathcal{O}(n))$, l'application ν_n^* est égale à l'application

$$\begin{array}{rccc}
\gamma_{H_1, \ldots, H_e} : & H & \longrightarrow & H_1 \times \cdots \times H_e \\
& x & \longmapsto & (p_{H_1}(x), \ldots, p_{H_e}(x))
\end{array}$$

dont les composantes sont les projections orthogonales sur $H_1, \ldots, H_e$. Compte tenu de la formule (A.25), on conclut en utilisant la majoration du lemme précédent dans le corollaire A.27.

4 Étude fine des hauteurs de matrices d'interpolation : interprétation géométrique du terme constant

4.1 Matrices d'interpolation et sous-schémas réduits

Soient K un corps de nombres d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$, l et N deux entiers naturels strictement positifs, $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_K$-module hermitien localement libre de rang $N+1$, et $(p_1, \ldots, p_l) \in (E^\vee)^l = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(E, \mathcal{O}_K)^l$ une famille de l formes linéaires sur E deux à deux non proportionnelles (sur K). Pour tous $i \in \{1, \ldots, l\}$ et $n > 0$, le tenseur totalement symétrique $p_i^{\otimes n} \in (E^\vee)^{\otimes n} = (E^{\otimes n})^\vee$ définit par passage au quotient une forme linéaire «d'évaluation» sur la n-ième puissance symétrique de E :

$$ev_{p_i,n} : \mathrm{Sym}^n E \longrightarrow \mathcal{O}_K. \tag{4.1}$$

On note

$$A_n = (ev_{p_1,n}, \ldots, ev_{p_l,n}) : \mathrm{Sym}^n E \longrightarrow \mathcal{O}_K^l \tag{4.2}$$

l'application dont les composantes sont les $ev_{p_i,n}$, appelée application d'interpolation, qui est génériquement surjective pour n assez grand. Sous cette hypothèse, munissant $\mathrm{Sym}^n E$ de la structure hermitienne puissance symétrique de celle de E, et $\mathcal{O}_K^l$ de la structure hermitienne standard, on se propose d'étudier la hauteur $h(\bigwedge^l A_n)$, qui coïncide avec la «hauteur de matrice d'interpolation» définie dans [8] dans le cas particulier où $\overline{E} = \overline{\mathcal{O}_K}^{N+1}$ est le $\mathcal{O}_K$-module hermitien standard de rang $N+1$ (ou plutôt son dual).

Le noyau H_i de chacune des formes p_i est un hyperplan de E donc définit un élément de $\mathbb{P}E(\mathcal{O}_K)$, qu'on notera P_i. On notera Σ le sous-schéma fermé de $\mathbb{P}E$ réunion des P_i (Σ est donc un sous-schéma réduit fini et plat de longueur l sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$) et $[\Sigma]$ le cycle associé, c'est-à-dire la somme formelle des P_i.

Le résultat principal de [8] est l'obtention pour cette hauteur de matrice d'interpolation d'un développement asymptotique lorsque n tend vers l'infini de la forme

$$h(\bigwedge\nolimits^l A_n) \underset{n\to\infty}{=} an + c + o(1), \tag{4.3}$$

où $a = h([\Sigma])$ est la hauteur du cycle introduit précédemment et c est une constante non déterminée, notée $\chi(\mathcal{O}_\Sigma)$ par analogie avec le théorème de Hilbert-Samuel «classique» pour les courbes algébriques. Une question posée dans [8] est celle de l'interprétation de cette constante en fonction de la ramification de Σ sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$, notamment en fonction du faisceau des différentielles relatives $\Omega_{\Sigma/\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K}$. Dans ce paragraphe, on se propose, pour commencer, de relier ces hauteurs d'applications d'interpolation à la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique du sous-schéma Σ ; l'interprétation souhaitée de ce terme constant $\chi(\mathcal{O}_\Sigma)$ sera donnée dans la suite du texte.

Proposition 4.1 *Sous les hypothèses précédentes, on a, pour tout n assez grand :*

$$h(\bigwedge\nolimits^l A_n) = h(\Sigma; n) - \frac{l}{2}\log\binom{n+N}{N}.$$

DÉMONSTRATION : Notons $\overline{E}_n$ le $\mathcal{O}_K$-module hermitien $\Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n))$ muni des normes L^2 et $\overline{G}$ le $\mathcal{O}_K$-module hermitien $(\mathcal{O}_K)^l$ muni des normes standard. Notons J_n le noyau de l'application de restriction $\mathrm{restr}_n : \Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n)) \longrightarrow \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma)$, de sorte qu'on ait $J_n = \varphi^{-1}(I_n)$ où φ est l'isomorphisme naturel de $\mathcal{O}_K$-modules

$$\varphi : E_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^n E$$

et I_n le noyau de A_n. Supposant n assez grand, on obtient après passage au quotient un isomorphisme de K-espaces vectoriels

$$\widetilde{A}_{n,K} : (\mathrm{Sym}^n E/I_n)_K \xrightarrow{\sim} G_K$$

d'où par (2.8) on déduit l'égalité

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}\,\overline{\mathrm{Sym}^n E/I_n} &= h(\textstyle\bigwedge^{\max} \widetilde{A}_n) + \widehat{\deg}\,\overline{G} \\ &= h(\textstyle\bigwedge^{\max} \widetilde{A}_n) = h(\textstyle\bigwedge^{l} A_n).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Par ailleurs, on a par définition de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique

$$\widehat{\deg}\,\overline{E_n/J_n} = h(\Sigma; n). \tag{4.5}$$

De (4.4) et (4.5) on déduit (à nouveau par (2.8)) l'égalité

$$h(\textstyle\bigwedge^{\max} \widetilde{A}_n) = h(\Sigma; n) - h(\textstyle\bigwedge^{\max} \widetilde{\varphi})$$

où $\widetilde{\varphi} : E_n/J_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^n E/I_n$ est l'isomorphisme entre $\mathcal{O}_K$-modules hermitiens localement libres de rang l déduit de φ par passage au quotient. Or, pour tout plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, le lemme 3.2 indique que φ_σ est une similitude de rapport $\binom{n+N}{N}^{1/2}$. Il en est donc de même pour $\widetilde{\varphi}_\sigma$, et ceci termine la démonstration de la proposition. $\square$

Corollaire 4.2 *Notons*

$$\nu : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$$

le morphisme de normalisation de Σ. Alors le terme constant du développement asymptotique des hauteurs de Σ vaut

$$\chi(\mathcal{O}_\Sigma) = -\log \mathrm{ramif}(\Sigma) = -\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \log \# \Gamma(\Sigma, \nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}/\mathcal{O}_\Sigma). \tag{4.6}$$

DÉMONSTRATION : On applique le théorème 3.13 à Σ. Avec les notations du théorème, les P_i étant définis sur $\mathcal{O}_K$, on a bien $\log \mathrm{ramif}(\Sigma) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \log \# \Gamma(\Sigma, \nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}/\mathcal{O}_\Sigma)$. D'autre part, pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$, la composante $\overline{\Sigma_{p_i}}$ se réduit au point P_i de sorte que le cône tangent $C_{P_i}\overline{\Sigma_{p_i}}$ s'identifie à $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ et est muni des métriques triviales ; en particulier, on a $h(C\Sigma) = 0$, $r_{0,i} = 1$ et $r_{t,i} = 0$ si $t \geqslant 1$. On trouve donc

$$h(\Sigma; n) \underset{n\to\infty}{=} nh([\Sigma]) + \frac{l}{2} \log \binom{n+N}{N} - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \log \# \Gamma(\Sigma, \nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}/\mathcal{O}_\Sigma) + o(1)$$

et on conclut en appliquant la proposition 4.1. $\square$

4.2 Discriminants

Pour la suite, on rappelle quelques notions sur les réseaux et les discriminants, d'après [12], chapitres I et III.

Soit R un anneau de Dedekind de corps de fractions K. On note χ_R l'isomorphisme du groupe de Grothendieck des R-modules de longueur finie sur le groupe des idéaux fractionnaires de R vérifiant $\chi_R(R/\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Si V est un K-espace vectoriel de dimension n et si X et X' sont deux réseaux[2] de V, on note $(X : X')$ l'élément du groupe de Grothendieck des R-modules de longueur finie différence des classes de $(X + X')/X'$ et $(X + X')/X$. En particulier, si X' est inclus dans X, $(X : X')$ est la classe de X/X'. Au moyen de la théorie des diviseurs élémentaires, on montre que si u est un K-automorphisme de V, on a

$$\chi_R(X : uX) = (\det u). \tag{4.7}$$

Supposons maintenant que V est muni d'une forme K-bilinéaire non dégénérée T. La forme T définit un isomorphisme K-linéaire de V sur son dual, d'où l'on déduit par (A.5) un isomorphisme de $\bigwedge^n V$ sur son dual, ou, ce qui revient au même, un isomorphisme entre K-espaces vectoriels de dimension un $\bigwedge^n V \otimes_K \bigwedge^n V \xrightarrow{\sim} K$. Si X est un réseau de V, le discriminant

$$\mathfrak{d}_R(X, T)$$

de X par rapport à T est par définition l'idéal fractionnaire de K image de $\bigwedge^n X \otimes_R \bigwedge^n X$ par cet isomorphisme. Rappelons quelques propriétés élémentaires :

Lemme 4.3 *Avec les notations qui précèdent :*

i. *Si X est libre de base $(e_1, \ldots, e_n)$, on a $\mathfrak{d}_R(X, T) = (\det_{1 \leqslant i,j \leqslant n} T(e_i, e_j))$.*

ii. *Si $X^\vee$ est l'ensemble des $y \in V$ tels que pour tout $x \in X$ on ait $T(x, y) \in R$, alors $\mathfrak{d}_R(X, T) = \chi_R(X^\vee : X)$.*

iii. *Si X et X' sont deux réseaux de V, on a $\mathfrak{d}_R(X', T) = \chi_R(X : X')^2 \mathfrak{d}_R(X, T)$.*

iv. *Si T_1 et T_2 sont deux formes K-bilinéaires non dégénérées sur V, il existe un unique automorphisme K-linéaire t de V tel que pour tous x et y dans V on ait $T_2(x, y) = T_1(tx, y)$, et alors pour tout réseau X de V on a $\mathfrak{d}_R(X, T_2) = (\det t)\mathfrak{d}_R(X, T_1)$.*

Démonstration : Les points i, ii et iii ne sont autres que les propositions 3, 4 et 5 de [12] ch. III, tandis que iv est une conséquence directe de ii et de (4.7). □

Soit A une K-algèbre (commutative) de dimension finie. On appelle ordre (ou R-ordre) de A un sous-R-anneau de A qui est un réseau de A. On dira que A est séparable si la forme K-bilinéaire «trace»

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & K \\ (x, y) & \mapsto & \mathrm{tr}_{A/K}(xy) \end{array} \tag{4.8}$$

[2] un réseau de V est un sous-R-module localement libre de type fini de V qui l'engendre en tant que K-espace vextoriel.

est non-dégénérée. Si K est de caractéristique nulle, cela équivaut à dire que A est réduite. Sous cette hypothèse, si $\mathcal{O}$ est un ordre de A, on appelle discriminant de $\mathcal{O}$, noté

$$\mathfrak{d}_{\mathcal{O}/R},$$

l'idéal de R discriminant du réseau $\mathcal{O}$ de A relativement à la forme trace (4.8). On vérifie aisément que cette construction est compatible au changement de base : si K' est une extension séparable finie de K et R' la fermeture intégrale de R dans K', ou bien si R' est un localisé de R, alors

$$\mathfrak{d}_{\mathcal{O}\otimes_R R'/R'} = \mathfrak{d}_{\mathcal{O}/R} R'. \tag{4.9}$$

Notons désormais $S = \operatorname{Spec} R$, et soit Σ un schéma fini et plat de longueur l sur S. On suppose que Σ est réunion schématique de sous-schémas fermés P_i ($1 \leqslant i \leqslant l$) qui sont des sections de S deux à deux distinctes. Notons $\widetilde{\Sigma}$ le schéma réunion disjointe des P_i et $\nu : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$ le morphisme naturel. Notons A la K-algèbre séparable

$$A = \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma)_K = \Gamma(\widetilde{\Sigma}, \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}})_K.$$

On dispose de deux ordres de A :

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma) \\ \widetilde{\mathcal{O}} &= \Gamma(\widetilde{\Sigma}, \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}) = \Gamma(\Sigma, \nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}). \end{aligned}$$

Proposition 4.4 *Sous ces hypothèses, on a*

$$\mathfrak{d}_{\mathcal{O}/R} = \chi_R(\widetilde{\mathcal{O}} : \mathcal{O})^2.$$

Démonstration : Puisque $\widetilde{\Sigma}$ est réunion disjointe de copies de $\operatorname{Spec} R$, $\widetilde{\mathcal{O}}$ s'identifie à la R-algèbre R^l, de R-base canonique $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l)$ formée d'idempotents de rang 1. Ceci implique

$$\mathfrak{d}_{\widetilde{\mathcal{O}}/R} = (\det_{1 \leqslant i,j \leqslant l} \operatorname{tr}(\varepsilon_i \varepsilon_j)) = (\det_{1 \leqslant i,j \leqslant l} \delta_{ij}) = (1)$$

et la proposition découle du lemme 4.3.*iii*. □

Corollaire 4.5 *Sous les mêmes hypothèses, ce discriminant peut se calculer localement sur* Σ *: pour tout* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm} R$,

$$\mathfrak{d}_{\mathcal{O}/R} R_{\mathfrak{p}} = \prod_{\substack{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spm} \mathcal{O} \\ \mathfrak{q} | \mathfrak{p}}} \mathfrak{d}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{q}}/R_{\mathfrak{p}}}.$$

Démonstration : Cela vient du fait que l'affirmation analogue est trivialement vraie pour $\chi_R(\widetilde{\mathcal{O}} : \mathcal{O})^2$ (on remarquera que, avec les notations du corollaire, le normalisé de $\Sigma_{\mathfrak{q}}$ est le sous-schéma (ouvert et fermé) de $(\widetilde{\Sigma})_{\mathfrak{p}}$ formé des seules composantes passant par $\mathfrak{q}$). □

Dans le cas particulier où K est un corps de nombres et où $R = \mathcal{O}_K$ est l'anneau des entiers de K, on dispose naturellement d'une application norme, notée N, définie sur le groupe des idéaux fractionnaires de K et à valeurs dans $\mathbb{Q}_+^*$. Si M est un R-module de longueur finie, alors M est de cardinal fini, et on a

$$\#M = N(\chi_R(M)). \tag{4.10}$$

Définition 4.6 *Sous ces hypothèses, soit A une K-algèbre finie séparable et $\mathcal{O}$ un ordre de A. On définit le discriminant normalisé de $\mathcal{O}$ comme le réel*

$$\operatorname{discr}(\mathcal{O}) = N(\mathfrak{d}_{\mathcal{O}/R})^{\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}}.$$

Le discriminant normalisé reste invariant lors du changement de base de R à sa fermeture intégrale dans une extension finie de K.

Théorème 4.7 *Soient $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_K$-fibré vectoriel hermitien de rang $N+1$ et Σ un sous-schéma* réduit *de $\mathbb{P}E$ plat de dimension relative zéro sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. *Alors on a*

$$\chi(\mathcal{O}_\Sigma) = -\frac{1}{2}\log\operatorname{discr}\Gamma(\Sigma,\mathcal{O}_\Sigma),$$

de sorte que

$$h(\Sigma;n) \underset{n\to\infty}{=} n.h([\Sigma]) + \frac{\lg\Sigma}{2}\log\binom{n+N}{N} - \frac{1}{2}\log\operatorname{discr}\Gamma(\Sigma,\mathcal{O}_\Sigma) + o(1).$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du corollaire 4.2, de la proposition 4.4 et de la formule (4.10). □

4.3 Le cas localement intersection complète

Sous les hypothèses du théorème 4.7, si l'on suppose en outre que Σ est localement intersection complète. il est possible, au moyen de la théorie des résidus et de la dualité de Grothendieck (cf. [6] et [2]), d'exprimer la valeur de la constante $\chi(\mathcal{O}_\Sigma)$ en fonction du module des différentielles relatives de Σ sur S. Pour ce faire, on commence par démontrer un résultat local.

Soit R un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, de corps des fractions K et de corps résiduel k. Notons v la valuation normalisée de R et ϖ une uniformisante.

Posons $S = \operatorname{Spec}R$, et soit Σ un schéma fini et plat de longueur l sur S. On suppose que Σ est local, est intersection complète, et est réunion schématique de sous-schémas fermés P_i $(1 \leqslant i \leqslant l)$ qui sont des sections de S deux à deux distinctes (ceci implique notamment que les anneaux locaux R et $\mathcal{O} = \Gamma(\Sigma,\mathcal{O}_\Sigma)$ ont même corps résiduel). Alors :

Proposition 4.8 *Sous ces hypothèses, on a*

$$\chi_R(\Omega^1_{\mathcal{O}/R}) = \mathfrak{d}_{\mathcal{O}/R}.$$

DÉMONSTRATION : Puisque Σ est local et intersection complète, en relevant un système minimal de générateurs de l'idéal maximal de $\mathcal{O}$ on peut supposer que Σ est le sous-schéma de l'espace affine $\mathbb{A}^n_S = \operatorname{Spec} R[x_1, \ldots, x_n]$ défini par un idéal $I \subset (\varpi, x_1, \ldots, x_n)^2$ engendré par une suite régulière $(f_1, \ldots, f_n)$. On dispose de la suite exacte conormale associée à l'immersion $\Sigma \hookrightarrow \mathbb{A}^n_S$:

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} (\Omega^1_{R[\underline{x}]/R})_{\mathcal{O}} \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{O}/R} \longrightarrow 0,$$

où l'on a noté $R[\underline{x}] = R[x_1, \ldots, x_n]$ et, pour tout $R[\underline{x}]$-module M, $M_{\mathcal{O}} = M \otimes_{R[\underline{x}]} \mathcal{O} = M/IM$.

Par hypothèse, I/I^2 est un $\mathcal{O}$-module libre de rang n, de base formée des classes résiduelles $\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_n}$ de $f_1, \ldots, f_n$. En outre, $(\Omega^1_{R[\underline{x}]/R})_{\mathcal{O}}$ est aussi un $\mathcal{O}$-module libre de rang n, de base $dx_1, \ldots, dx_n$. Dans ces bases, δ est l'application linéaire de matrice $(\partial f_j / \partial x_i)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Remarquons en particulier que δ est une application $\mathcal{O}$-linéaire entre $\mathcal{O}$-modules libres de même rang, donc, puisque par hypothèse $\mathcal{O}$ est un R-module libre de rang l, δ est aussi une application R-linéaire entre R-modules libres de même rang ; puisque son conoyau est de torsion, δ est injective.

Par un résultat bien connu (cf. [3], lemme A.2.6, appliqué pour l'anneau $\mathcal{O}$), on a

$$\lg_{\mathcal{O}}(\operatorname{coker} \delta) = \lg_{\mathcal{O}}(\operatorname{coker} \bigwedge\nolimits^n_{\mathcal{O}} \delta). \tag{4.11}$$

Puisque R est de valuation discrète et que R et $\mathcal{O}$ ont même corps résiduel, un $\mathcal{O}$-module M est de longueur finie si et seulement si il est de longueur finie en tant que R-module, et alors sa longueur sur R est égale à sa longueur sur $\mathcal{O}$; on a alors $\chi_R(M) = \mathfrak{m}^{\lg M}$. Ainsi, en posant $\Omega^n_{R[\underline{x}]/R} = \bigwedge^n_{R[\underline{x}]} \Omega^1_{R[\underline{x}]/R}$ et

$$\omega = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(\bigwedge\nolimits^n_{\mathcal{O}} I/I^2, (\Omega^n_{R[\underline{x}]/R})_{\mathcal{O}}),$$

l'égalité (4.11) devient :

$$\chi_R(\Omega^1_{\mathcal{O}/R}) = \chi_R(\omega/\mathcal{O}\beta) \tag{4.12}$$

où $\beta = \bigwedge^n_{\mathcal{O}} \delta \in \omega$.

Par [6] chapitre III §9 et proposition 8.2, ω est un module dualisant pour $\mathcal{O}$ sur R, et on a un isomorphisme de dualité

$$\varphi : \omega = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}, \omega) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_R(\mathcal{O}, R).$$

Le R-module $\operatorname{Hom}_R(\mathcal{O}, R)$ est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{O}$-module de la façon suivante : si $f \in \operatorname{Hom}_R(\mathcal{O}, R)$ et $x \in \mathcal{O}$, on définit $xf \in \operatorname{Hom}_R(\mathcal{O}, R)$ par la formule $(xf)(y) = f(xy)$ pour tout $y \in \mathcal{O}$. La fonctorialité de la dualité de Grothendieck implique que l'isomorphisme φ est compatible à cette structure de $\mathcal{O}$-module, *i.e.* que φ est un isomorphisme de $\mathcal{O}$-modules. Remarquons que ω est un $\mathcal{O}$-module libre de rang un ; un générateur de ω est donné par l'élément α de $\omega = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(\bigwedge^n_{\mathcal{O}} I/I^2, (\Omega^n_{R[\underline{x}]/R})_{\mathcal{O}})$ qui envoie le générateur $\overline{f_1} \wedge \cdots \wedge \overline{f_n}$ de $\bigwedge^n_{\mathcal{O}} I/I^2$ sur le générateur $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ de $(\Omega^n_{R[\underline{x}]/R})_{\mathcal{O}}$. Alors $\operatorname{Hom}_R(\mathcal{O}, R) = \varphi(\omega)$ est aussi un $\mathcal{O}$-module libre de rang un, engendré par $\varphi(\alpha)$.

Par définition, $\beta = \bigwedge_{\mathcal{O}}^n \delta$ est l'élément de $\omega = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\bigwedge_{\mathcal{O}}^n I/I^2, (\Omega^n_{R[\underline{x}]/R})_{\mathcal{O}})$ qui envoie le générateur $\overline{f_1} \wedge \cdots \wedge \overline{f_n}$ de $\bigwedge_{\mathcal{O}}^n I/I^2$ sur l'élément $df_1 \wedge \cdots \wedge df_n$ de $(\Omega^n_{R[\underline{x}]/R})_{\mathcal{O}})$. On a donc

$$\beta = t\alpha \tag{4.13}$$

avec $t = \det_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \partial f_j/\partial x_i \ \in \mathcal{O}$, de sorte que

$$\chi_R(\omega/\mathcal{O}\beta) = \chi_R(\mathcal{O}\alpha/\mathcal{O}\beta) = \chi_R(\mathcal{O}/t\mathcal{O}), \tag{4.14}$$

Pour conclure, on aura besoin de la propriété (R6) des résidus, énoncée dans [6] chapitre III §9 (et dont on pourra trouver une preuve dans [2] appendice A, reposant sur des calculs dûs à Tate et publiés dans [9], appendice), qui caractérise l'image de β par l'isomorphisme de dualité :

Théorème 4.9 (propriété (R6) des résidus) *Avec ces notations, l'image de l'élément $\beta = \bigwedge_{\mathcal{O}}^n \delta$ de ω par l'isomorphisme de dualité φ est l'application trace de $\mathcal{O}$ sur R.*

Ainsi, par $\mathcal{O}$-linéarité de φ et par (4.13), on déduit du théorème que $\mathrm{tr}_{\mathcal{O}/R} = \varphi(\beta) = t\varphi(\alpha)$, *i.e.* pour tout $x \in \mathcal{O}$

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{O}/R}(x) = (\varphi(\alpha))(tx). \tag{4.15}$$

On définit une forme K-bilinéaire T_1 sur $\mathcal{O} \otimes_R K$ par la formule

$$T_1(x, y) = (\varphi(\alpha))_K(xy)$$

pour $x, y \in \mathcal{O} \otimes_R K$. Dire que $\varphi(\alpha)$ est un générateur du $\mathcal{O}$-module $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{O}, R)$ signifie que le morphisme de $\mathcal{O}$-modules

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(\mathcal{O}, R) \\ x & \mapsto & x\varphi(\alpha) = (\varphi(\alpha))(x\,.) \end{array}$$

est un isomorphisme, ou encore, que $\mathcal{O}$, considéré comme un R-réseau de $\mathcal{O} \otimes_R K$, est auto-dual pour T_1, de sorte que par le lemme 4.3.*ii*

$$\mathfrak{d}_R(\mathcal{O}, T_1) = (1).$$

Par abus de notation, notons encore t l'endomorphisme K-linéaire de multiplication par t dans le K-espace vectoriel $\mathcal{O} \otimes_R K$, et soit T_2 la forme bilinéaire trace sur $\mathcal{O} \otimes_R K$. Alors, par (4.15), on a $T_2(x, y) = (\varphi(\alpha))_K(txy) = T_1(tx, y)$ pour tous x et y dans $\mathcal{O} \otimes_R K$, et du lemme 4.3.*iv* et de (4.7) on déduit

$$\mathfrak{d}_{\mathcal{O}/R} = \mathfrak{d}_R(\mathcal{O}, T_2) = (\det_K t) = \chi_R(\mathcal{O}/t\mathcal{O}).$$

La proposition découle alors de cette dernière égalité et de (4.12) et (4.14). □

Corollaire 4.10 *Soient R un anneau de Dedekind et $\mathcal{O}$ un anneau séparable, fini et plat sur R. On suppose que $\mathcal{O}$ est localement intersection complète. Alors on a*

$$\chi_R(\Omega^1_{\mathcal{O}/R}) = \mathfrak{d}_{\mathcal{O}/R}.$$

DÉMONSTRATION : Quitte à faire une extension séparable finie de la base, on peut supposer que $\Sigma = \operatorname{Spec} \mathcal{O}$ est est réunion de sections $P_1, \ldots, P_l$ de $S = \operatorname{Spec} R$. Puisque $\Omega^1_{\mathcal{O}/R}$ peut se calculer localement sur Σ et puisque, par le corollaire 4.5, il en est de même de $\mathfrak{d}_{\mathcal{O}/R}$, on peut supposer R et $\mathcal{O}$ locaux. On s'est ainsi ramené à la proposition précédente. $\square$

Corollaire 4.11 *Soient K un corps de nombres, $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_K$-fibré vectoriel hermitien de rang $N+1$ et Σ un sous-schéma de $\mathbb{P}E$ plat de dimension relative zéro sur* $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. *Supposons Σ réduit et localement intersection complète. Alors on a*

$$h(\Sigma; n) \underset{n\to\infty}{=} n.h([\Sigma]) + \frac{\lg \Sigma}{2} \log \binom{n+N}{N} - \frac{1}{2.[K:\mathbb{Q}]} \log \# \Omega^1_{\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma)/\mathcal{O}_K} + o(1).$$

DÉMONSTRATION : Cela résulte du corollaire précédent et du théorème 4.7. $\square$

5 Étude fine des hauteurs de matrices d'interpolation : contrôle du terme d'erreur

5.1 Expression du terme d'erreur en somme de termes locaux

Soient $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_K$-module hermitien localement libre de rang $N+1$ et Σ un sous-schéma réduit de $\mathbb{P}E$ fini et plat de longueur l sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. On se propose à partir d'ici d'étudier le terme d'erreur $e(n)$ du développement asymptotique de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique

$$h(\Sigma; n) = nh([\Sigma]) + \frac{l}{2} \log \binom{n+N}{N} + \chi(\mathcal{O}_\Sigma) + e(n). \tag{5.1}$$

Commençons par indiquer quelques réductions et notations. Par invariance de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique par extension de la base, on peut supposer que les points génériques de Σ sont tous définis sur K, de sorte que Σ est réunion schématique de points $P_1, \ldots, P_l$ de $\mathbb{P}E(\mathcal{O}_K)$. On note $\mathfrak{I}_\Sigma$ le faisceau d'idéaux de $\mathbb{P}E$ définissant le sous-schéma Σ.

Comme précédemment on note

$$\nu : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma \tag{5.2}$$

le morphisme de normalisation. Ainsi le schéma $\widetilde{\Sigma}$ est réunion disjointe de l copies de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, chacune s'envoyant isomorphiquement par ν sur l'un des P_i. Par abus de langage, on dira que $\widetilde{\Sigma}$ est la réunion disjointe (abstraite) des P_i ; on prendra garde qu'en général cet objet n'est pas un sous-schéma de $\mathbb{P}E$.

Le faisceau en droites universel $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}E$ étant ample, pour tout entier n assez grand on aura

$$H^1(\mathbb{P}E, \mathfrak{I}_\Sigma(n)) = 0, \tag{5.3}$$

Notons N_1 le plus petit entier tel que (5.3) soit vérifiée pour tout $n \geqslant N_1$. De la même façon, par compatibilité de la cohomologie au changement de base plat, on peut définir un entier N_0 comme le plus petit entier tel qu'on ait

$$H^1(\mathbb{P}E, \mathfrak{I}_\Sigma(n))_K = H^1(\mathbb{P}_{E,K}, \mathfrak{I}_{\Sigma_K}(n)) = 0 \tag{5.4}$$

pour tout $n \geqslant N_0$. Ainsi on a clairement $N_0 \leqslant N_1$.

Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, l\}$ et pour tout plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ on note

$$\cos_\sigma(P_i, P_j) \in [0, 1] \tag{5.5}$$

le cosinus de l'angle formé par les hyperplans de E_σ définis par P_i et P_j. Explicitement, si p_i et p_j sont des formes linéaires sur E_σ définissant ces hyperplans, on a

$$\cos_\sigma(P_i, P_j) = \frac{| < p_i, p_j > |}{\|p_i\|.\|p_j\|}. \tag{5.6}$$

Par construction on a $\cos_\sigma(p_i, p_j) = 1$ si et seulement si $i = j$.

Enfin on aura à considérer la situation où la base est un schéma noethérien affine S quelconque. Dans cette situation, on supposera à nouveau que E est un fibré vectoriel de rang $N + 1$ sur S et que Σ est un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}E$ réunion de l points de $\mathbb{P}E(S)$. Pour tout $n \geqslant 0$ on déduit de la suite exacte longue de cohomologie une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n))/\Gamma(\mathbb{P}E, \mathfrak{I}_\Sigma(n)) \xrightarrow{i_n} \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}E, \mathfrak{I}_\Sigma(n)) \longrightarrow 0. \tag{5.7}$$

D'autre part, en relevant par le morphisme de normalisation les sections de $\mathcal{O}(n)$ de Σ à $\widetilde{\Sigma}$, on dispose d'un morphisme injectif

$$\nu_n^* : \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma) \longrightarrow \Gamma(\widetilde{\Sigma}, \nu^*(\mathcal{O}(n)|_\Sigma)). \tag{5.8}$$

De l'injectivité des applications i_n et ν_n^* et de la suite exacte à six termes décrivant les noyau et conoyau d'une application composée (cf. la preuve de [3], lemme A.2.5), on déduit la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H^1(\mathbb{P}E, \mathfrak{I}_\Sigma(n)) \longrightarrow \operatorname{coker}(\nu_n^* \circ i_n) \longrightarrow \operatorname{coker} \nu_n^* \longrightarrow 0. \tag{5.9}$$

Proposition 5.1 *Avec les notations introduites au début du paragraphe, pour $n \geqslant N_0$, le terme d'erreur $e(n)$ défini en (5.1) admet une décomposition en somme de termes locaux négatifs presque tous nuls*

$$e(n) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \left(\sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm} \mathcal{O}_K} \varepsilon_\mathfrak{p}(n) + \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}} \varepsilon_\sigma(n) \right) \tag{5.10}$$

avec

$$\varepsilon_\mathfrak{p}(n) = -\log \# H^1(\mathbb{P}E, \mathfrak{I}_\Sigma(n))_\mathfrak{p} \tag{5.11}$$

et

$$\varepsilon_\sigma(n) = \frac{1}{2} \log \det_{1 \leqslant i,j \leqslant l} (\cos_\sigma(P_i, P_j))^n. \tag{5.12}$$

DÉMONSTRATION : Pour $n \geqslant N_0$ l'application i_n définie en (5.7) est génériquement bijective, de sorte qu'on peut munir $\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma)$ des métriques quotient des métriques L^2 sur $\Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n))$, et $\Gamma(\widetilde{\Sigma}, \nu^*(\mathcal{O}(n)|_\Sigma)) = \bigoplus_i \Gamma(P_i, \mathcal{O}(n)|_{P_i})$ des métriques produit des métriques quotient sur chaque composante. On a alors par construction

$$\begin{aligned} h(\Sigma; n) &= \widehat{\deg}\, \overline{\Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n))/\Gamma(\mathbb{P}E, \mathfrak{I}_\Sigma(n))} \\ &= \widehat{\deg}\, \overline{\Gamma(\widetilde{\Sigma}, \nu^*(\mathcal{O}(n)|_\Sigma))} + h(\det(\nu_n^* \circ i_n)) \end{aligned} \tag{5.13}$$

avec

$$\widehat{\deg}\, \overline{\Gamma(\widetilde{\Sigma}, \nu^*(\mathcal{O}(n)|_\Sigma))} = \sum_i h(P_i; n) = nh([\Sigma]) + \frac{l}{2} \log \binom{n+N}{N} \tag{5.14}$$

et

$$h(\det(\nu_n^* \circ i_n) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}(-\log \# \operatorname{coker}(\nu_n^* \circ i_n) + \sum_\sigma \log \| \det(\nu_n^* \circ i_n)\|_\sigma). \tag{5.15}$$

Par (5.9) et par le corollaire 4.2 on a

$$\begin{aligned} -\log \# \operatorname{coker}(\nu_n^* \circ i_n) &= -\log \# H^1(\mathbb{P}, \mathfrak{I}_\Sigma(n)) - \log \# \operatorname{coker} \nu_n^* \\ &= -\log \# H^1(\mathbb{P}, \mathfrak{I}_\Sigma(n)) + [K:\mathbb{Q}]\chi(\mathcal{O}_\Sigma), \end{aligned} \tag{5.16}$$

ce qui rend compte de (5.11).

Enfin, pour tout plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, puisque par construction les normes sur $\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma)$ sont celles induites par i_n, on a

$$\| \det(\nu_n^* \circ i_n)\|_\sigma = \| \det \nu_n^* \|_\sigma = \| \det {}^t\nu_n^*\|_\sigma, \tag{5.17}$$

où

$${}^t\nu_n^* : \Gamma(\widetilde{\Sigma}, \nu^*(\mathcal{O}(n)|_\Sigma))^\vee = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant l} \Gamma(P_i, \mathcal{O}(n)|_{P_i})^\vee \longrightarrow \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n)|_\Sigma)^\vee \tag{5.18}$$

est l'application transposée de ν_n^*.

Chacun des espaces hermitiens $\Gamma(P_i, \mathcal{O}(n)|_{P_i})_\sigma^\vee$ et $\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(n))_\sigma^\vee$ s'identifie à un sous-espace de $\Gamma(\mathbb{P}E, \mathcal{O}(n))_\sigma^\vee$, qui est homothétique à $(\operatorname{Sym}^n E)_\sigma^\vee$, ce dernier étant lui-même un sous-espace de $(E^{\otimes n})_\sigma^\vee$. Ainsi, ayant choisi pour tout i une forme linéaire $p_i \in E^\vee$ représentant P_i, on peut munir $\Gamma(\widetilde{\Sigma}, \nu^*(\mathcal{O}(n)|_\Sigma))_\sigma^\vee$ d'une base unitaire en prenant dans chaque composante $\Gamma(P_i, \mathcal{O}(n)|_{P_i})_\sigma^\vee$ le générateur de norme un $p_i^{\otimes n}/\|p_i^{\otimes n}\|_\sigma$. Au moyen de cette base on trouve

$$\begin{aligned} \| \det {}^t\nu_n^*\|_\sigma &= |\det_{1 \leqslant i,j \leqslant l}(< p_i^{\otimes n}, p_j^{\otimes n} >_\sigma / \|p_i^{\otimes n}\|_\sigma \|p_j^{\otimes n}\|_\sigma)|^{1/2} \\ &= |\det_{1 \leqslant i,j \leqslant l}(< p_i, p_j >_\sigma / \|p_i\|_\sigma \|p_j\|_\sigma)^n|^{1/2} \end{aligned}$$

ce qui donne bien (5.12). □

5.2 Monotonie des termes d'erreur locaux

On se propose ici d'établir la proposition suivante, qui établit la décroissance en valeur absolue des termes d'erreur locaux (négatifs) introduits dans la proposition 5.1 :

Proposition 5.2 *Soient $n \geqslant N_0$ un entier et v un élément de $\operatorname{Spm} \mathcal{O}_K$ ou un plongement de K dans $\mathbb{C}$. Alors on a*

$$\varepsilon_v(n+1) \geqslant \varepsilon_v(n), \tag{5.19}$$

et même

$$\varepsilon_v(n+1) > \varepsilon_v(n) \tag{5.20}$$

sous l'hypothèse supplémentaire que $\varepsilon_v(n)$ soit non nul.

La démonstration de la proposition sera donnée dans les deux paragraphes suivants, selon que l'on considère la situation aux places finies ou infinies. Toutefois, signalons d'abord un corollaire immédiat :

Corollaire 5.3 *Sous les hypothèses de la proposition 5.1, pour $n \geqslant N_0$, le terme d'erreur $e(n)$ de la formule de Hilbert-Samuel arithmétique*

$$h(\Sigma; n) = nh([\Sigma]) + \frac{l}{2} \log \binom{n+N}{N} + \chi(\mathcal{O}_\Sigma) + e(n)$$

est négatif et tend vers 0 de manière croissante avec n. Plus précisément, pour $n' \geqslant n \geqslant N_0$, on a $e(n) \leqslant e(n') \leqslant 0$, et même $e(n) < e(n')$ si $e(n)$ n'est pas nul.

5.2.1 Un résultat de décroissance de la cohomologie

Supposons ici que $v = \mathfrak{p}$ est un élément de $\operatorname{Spm} \mathcal{O}_K$ et notons R l'anneau local $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$. Tout R-module localement libre de type fini étant libre, on ne perdra pas de généralité dans la preuve de la proposition 5.2 en supposant que $\mathbb{P}E$ est l'espace projectif standard $\mathbb{P}^N$ sur R. Fixons aussi pour chaque composante P_i de Σ des coordonnées homogènes $\underline{x}_i = (x_{i0} : \ldots : x_{iN})$ engendrant l'idéal unité de R ou, ce qui revient au même, des trivialisations des R-modules libres de rang un $\Gamma(P_i, \mathcal{O}(n)|_{P_i})$. Notons

$$\begin{array}{rccc} A_n : & R[X_0, \ldots, X_N]_n = \Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(n)) & \longrightarrow & \Gamma(\widetilde{\Sigma}, \nu^*(\mathcal{O}(n)|_\Sigma)) = \bigoplus_i \Gamma(P_i, \mathcal{O}(n)|_{P_i}) = R^l \\ & P(\underline{X}) & \longmapsto & (P(\underline{x}_1), \ldots, P(\underline{x}_l)) \end{array} \tag{5.21}$$

l'application d'interpolation correspondante.

Compte tenu de (5.11), il s'agit de montrer que si n est un entier tel que le R-module $H^1(\mathbb{P}^N, \mathfrak{I}_\Sigma(n))$ soit de longueur finie, alors $H^1(\mathbb{P}^N, \mathfrak{I}_\Sigma(n+1))$ est nul ou de longueur strictement inférieure :

$$\lg H^1(\mathbb{P}^N, \mathfrak{I}_\Sigma(n+1)) < \lg H^1(\mathbb{P}^N, \mathfrak{I}_\Sigma(n)). \tag{5.22}$$

Par (5.9) (et avec les notations correspondantes) on a

$$\lg H^1(\mathbb{P}^N, \mathfrak{I}_\Sigma(n)) = \lg \operatorname{coker}(\nu_n^* \circ i_n) - \lg \operatorname{coker}(\nu_n^*) \tag{5.23}$$

avec par construction

$$\operatorname{coker}(\nu_n^* \circ i_n) = \operatorname{coker}(A_n). \tag{5.24}$$

Puisque par (3.25) la longueur du conoyau de ν_n^* ne dépend pas de n, il ne reste plus qu'à montrer le résultat qui suit :

Proposition 5.4 *Soient R un anneau local, x_{ij} ($1 \leqslant i \leqslant l$, $0 \leqslant j \leqslant N$) des éléments de R tels que pour tout i la famille $\underline{x}_i = (x_{ij})_{0 \leqslant j \leqslant N}$ engendre l'idéal unité, et n un entier tel que le conoyau de l'application d'interpolation A_n définie par (5.21) soit de longueur finie. On a alors*

$$\lg \operatorname{coker} A_{n+1} \leqslant \lg \operatorname{coker} A_n. \tag{5.25}$$

Si en outre on a égalité au cran précédent :

$$\lg \operatorname{coker} A_n = \lg \operatorname{coker} A_{n-1}, \tag{5.26}$$

on aura alors aussi

$$\lg \operatorname{coker} A_{n+1} = \lg \operatorname{coker} A_n. \tag{5.27}$$

Démonstration : Notons $K_{i,n}$ le sous-R-module de $R[X_0, \ldots, X_N]_n$ formé des polynômes s'annulant en $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{i-1}$, de sorte qu'on ait

$$R[X_0, \ldots, X_N]_n = K_{1,n} \supset K_{2,n} \supset \cdots \supset K_{l+1,n} = \ker A_n. \tag{5.28}$$

Autrement dit, les $K_{i,n}$ forment la filtration image inverse par A_n de la filtration naturelle sur R^l. Exprimant la longueur du conoyau de A_n comme somme des longueurs de ses gradués relativement à la filtration trace de cette dernière, on trouve

$$\lg \operatorname{coker} A_n = \lg R/J_{1,n} + \cdots + \lg R/J_{l,n} \tag{5.29}$$

où $J_{i,n}$ est l'idéal de R formé des valeurs en $\underline{x}_i$ des éléments de $K_{i,n}$.

Par construction, pour tout i et pour tout polynôme $\eta \in R[X_0, \ldots, X_N]_1$ homogène de degré 1, on a

$$\eta K_{i,n} \subset K_{i,n+1}. \tag{5.30}$$

Les hypothèses faites sur les $\underline{x}_i$ impliquent notamment l'existence de $\eta_i \in R[X_0, \ldots, X_N]_1$ vérifiant $\eta_i(\underline{x}_i) = 1$. Évaluant en $\underline{x}_i$ l'inclusion (5.30) avec $\eta = \eta_i$ on trouve

$$J_{i,n} \subset J_{i,n+1} \tag{5.31}$$

ce qui, compte tenu de (5.29), prouve (5.25).

Plaçons-nous maintenant sous l'hypothèse (5.26). Compte tenu de (5.29) et (5.31), ceci signifie qu'on a pour tout i l'égalité

$$J_{i,n} = J_{i,n-1}. \tag{5.32}$$

Il s'agit alors de montrer que pour tout i on a

$$J_{i,n+1} = J_{i,n}. \tag{5.33}$$

On va décomposer la preuve en plusieurs étapes.

Fait 1 : sous les hypothèses qui précèdent, pour tout i, tout élément P de $K_{i,n}$ s'écrit

$$P = \eta_i\kappa_i + \eta_{i+1}\kappa_{i+1} + \cdots + \eta_l\kappa_l + \rho \tag{5.34}$$

avec $\kappa_j \in K_{j,n-1}$ pour tout j et $\rho \in K_{l+1,n}$. La preuve procède par récurrence descendante sur i, le cas $i = l+1$ étant trivial. Si donc le résultat est vrai pour $i+1$ et si on se donne $P \in K_{i,n}$, on a $P(\underline{x}_i) \in J_{i,n} = J_{i,n-1}$ par hypothèse, de sorte qu'il existe $\kappa_i \in K_{i,n-1}$ vérifiant $\kappa_i(\underline{x}_i) = P(\underline{x}_i)$. Ainsi on a $P - \eta_i\kappa_i \in K_{i+1,n}$ et on conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à ce dernier polynôme.

Fait 2 : sous les mêmes hypothèses, tout élément Q de $R[X_0,\ldots,X_N]_{n+1}$ s'écrit

$$Q = \eta_1\mu_1 + \eta_2\mu_2 + \cdots + \eta_l\mu_l + \tau \tag{5.35}$$

avec $\mu_j \in K_{j,n}$ pour tout j et $\tau \in K_{l+1,n+1}$. Par linéarité, il suffit de prouver ce résultat lorsque Q est un monôme. Supposons donc $Q = X_0^{k_0}X_1^{k_1}\ldots X_N^{k_N}$ avec par exemple $k_0 > 0$. On peut alors écrire $Q = X_0P$ avec $P = X_0^{k_0-1}X_1^{k_1}\ldots X_N^{k_N}$. Appliquant à P le fait 1 (avec $i=1$) on obtient la décomposition $P = \eta_1\kappa_1 + \eta_2\kappa_2 + \cdots + \eta_l\kappa_l + \rho$ et on conclut en posant $\mu_j = X_0\kappa_j$ et $\tau = X_0\rho$.

Fait 3 : sous les mêmes hypothèses, pour tout i, tout élément Q de $K_{i,n+1}$ s'écrit

$$Q = \eta_i\mu_i + \eta_{i+1}\mu_{i+1} + \cdots + \eta_l\mu_l + \tau \tag{5.36}$$

avec $\mu_j \in K_{j,n}$ pour tout j et $\tau \in K_{l+1,n+1}$. La preuve procède par récurrence sur i, le cas $i=1$ constituant le fait 2. Supposons donc maintenant le résultat prouvé pour $i-1$ et considérons $Q \in K_{i,n+1}$. On a alors *a fortiori* $Q \in K_{i-1,n+1}$, d'où par l'hypothèse de récurrence

$$Q = \eta_{i-1}u_{i-1} + \eta_iu_i + \cdots + \eta_lu_l + t \tag{5.37}$$

avec $u_j \in K_{j,n}$ pour tout j et $t \in K_{l+1,n+1}$. Évaluant ceci en $\underline{x}_{i-1}$ on trouve

$$0 = Q(\underline{x}_{i-1}) = u_{i-1}(\underline{x}_{i-1}), \tag{5.38}$$

de sorte que pour $j = i-1$ on a même

$$u_{i-1} \in K_{i,n}. \tag{5.39}$$

On peut alors appliquer le fait 1 à u_{i-1} ce qui donne

$$u_{i-1} = \eta_i \kappa_i + \eta_{i+1}\kappa_{i+1} + \cdots + \eta_l \kappa_l + \rho \tag{5.40}$$

avec $\kappa_j \in K_{j,n-1}$ pour tout j et $\rho \in K_{l+1,n}$. On conclut alors en posant $\mu_j = u_j + \eta_{i-1}\kappa_j$ pour $j \geqslant i$, et $\tau = t + \eta_{i-1}\rho$.

Conclusion. Soit maintenant $a \in J_{i,n+1}$. Par définition il existe $Q \in K_{i,n+1}$ vérifiant $Q(\underline{x}_i) = a$. Appliquant le fait 3 on trouve $\mu_i \in K_{i,n}$ vérifiant $\mu_i(\underline{x}_i) = Q(\underline{x}_i) = a$, ce qui signifie précisément $a \in J_{i,n}$. Ceci termine la démonstration. □

Le résultat obtenu ici permet de majorer les entiers N_0 et N_1 définis au paragraphe précédent. Rappelons que si Σ est un sous-schéma réduit de $\mathbb{P}E$ fini et plat de longueur l sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, N_0 (resp. N_1) est le plus petit entier tel que pour tout $n \geqslant N_0$ (resp. $n \geqslant N_1$) on ait $H^1(\mathbb{P}E, \mathfrak{I}_\Sigma(n))_K = 0$ (resp. $H^1(\mathbb{P}E, \mathfrak{I}_\Sigma(n)) = 0$). De façon équivalente, supposant Σ réunion de l sections de la base et choisissant des formes linéaires sur E représentant celles-ci, N_0 (resp. N_1) est le plus petit entier n tel que le conoyau de l'application d'interpolation associée A_n soit de longueur finie (resp. minimale). On trouve alors :

Corollaire 5.5 *Sous ces hypothèses, l'entier N_0 vérifie*

$$N_0 \leqslant l - 1 \tag{5.41}$$

et pour tout entier $n \geqslant N_0$ on a

$$N_1 \leqslant n + \max_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spm}\mathcal{O}_K} \lg H^1(\mathbb{P}E, \mathfrak{I}_\Sigma(n))_{\mathfrak{p}}. \tag{5.42}$$

Démonstration : On commence par appliquer la proposition 5.4 avec $R = K$. On en déduit que la dimension du conoyau $\operatorname{coker} A_{n,K}$ sur la fibre générique décroît strictement avant d'être identiquement nulle. L'application $A_{0,K}$ étant l'application diagonale $K \longrightarrow K^l$ on a $\dim\operatorname{coker} A_{0,K} = l - 1$, d'où $\dim\operatorname{coker} A_{n,K} = 0$ pour $n \geqslant l-1$. Appliquant (5.23), (5.24) et le fait que Σ et $\widetilde{\Sigma}$ coïcident sur la fibre générique, on obtient $\dim H^1(\mathbb{P}E, \mathfrak{I}_\Sigma(n))_K = \dim\operatorname{coker} A_{n,K}$, ce qui prouve (5.41). Quant à (5.42), elle découle immédiatement de la proposition 5.2 et du fait que $H^1(\mathbb{P}E, \mathfrak{I}_\Sigma(n))$ est nul si et seulement si tous ses localisés le sont. □

5.2.2 Un résultat d'orthogonalité asymptotique

On se propose ici de prouver la proposition 5.2 dans le cas où $v = \sigma$ est un plongement de K dans $\mathbb{C}$. Compte tenu de (5.12), cela revient à montrer la

Proposition 5.6 *Si $p_1, \ldots, p_l$ sont des vecteurs de norme 1 deux à deux non proportionnels dans un espace hermitien E, et si le déterminant de Gram*

$$G_n = \det_{1\leqslant i,j\leqslant l} < p_i^{\otimes n}, p_j^{\otimes n} >_{E^{\otimes n}} = \det_{1\leqslant i,j\leqslant l} (< p_i, p_j >_E)^n \tag{5.43}$$

vérifie l'encadrement

$$0 < G_n < 1 \tag{5.44}$$

(autrement dit, les $p_i^{\otimes n}$ forment une famille libre mais ne sont pas deux à deux orthogonaux) alors on a

$$G_{n+1} > G_n. \tag{5.45}$$

Remarquons qu'il découle immédiatement de la forme de (5.43) que G_n tend vers 1 quand n tend vers l'infini, c'est-à-dire en un certain sens que les $p_i^{\otimes n}$ deviennent asymptotiquement orthogonaux. L'inégalité (5.45) que l'on souhaite prouver signifie que cette convergence vers 1 se fait de façon strictement croissante.

Le déterminant de Gram étant inchangé quand on applique aux $p_i^{\otimes n}$ le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\log G_n = \log \operatorname{dist}(p_2^{\otimes n}, \operatorname{Vect}(p_1^{\otimes n})) + \log \operatorname{dist}(p_3^{\otimes n}, \operatorname{Vect}(p_1^{\otimes n}, p_2^{\otimes n})) + \dots \\ + \log \operatorname{dist}(p_l^{\otimes n}, \operatorname{Vect}(p_1^{\otimes n}, \dots, p_{l-1}^{\otimes n})).\end{aligned} \tag{5.46}$$

Ainsi, pour établir (5.45), il suffit de prouver le lemme suivant :

Lemme 5.7 *Soient $p_1, \dots, p_k$ et q des vecteurs d'un espace hermitien E, avec $\|q\| = 1$, et tels que q ne soit pas orthogonal au sous-espace engendré par les p_i. Soit n un entier tel que le vecteur $q^{\otimes n}$ de $E^{\otimes n}$ ne soit pas dans le sous-espace engendré par les $p_i^{\otimes n}$. Alors on a*

$$\operatorname{dist}(q^{\otimes n+1}, \operatorname{Vect}(p_1^{\otimes n+1}, \dots, p_k^{\otimes n+1})) > \operatorname{dist}(q^{\otimes n}, \operatorname{Vect}(p_1^{\otimes n}, \dots, p_k^{\otimes n})). \tag{5.47}$$

Démonstration : Par le théorème de Hahn-Banach on a

$$\operatorname{dist}(q^{\otimes n}, \operatorname{Vect}(p_1^{\otimes n}, \dots, p_k^{\otimes n})) = \sup_{\substack{L \in (E^{\otimes n})^\vee,\ \|L\|=1 \\ L(p_1^{\otimes n}) = \dots = L(p_k^{\otimes n}) = 0}} |L(q^{\otimes n})|. \tag{5.48}$$

Par compacité il existe un élément L_0 de la sphère unité de $(E^{\otimes n})^\vee = (E^\vee)^{\otimes n}$ atteignant cette borne supérieure. Notons aussi λ un élément de la sphère unité de $E^\vee$ vérifiant

$$\lambda(q) = 1 \tag{5.49}$$

et notons $L' \in ((E^{\otimes n+1})^\vee)^{\mathfrak{S}_{n+1}}$ la projection de l'élément $\lambda \otimes L_0$ de $(E^{\otimes n+1})^\vee$ sur le sous-espace des tenseurs totalement symétriques. Par hypothèse, q n'est pas orthogonal au sous-espace engendré par les p_i, de sorte que λ ne peut annuler tous les p_i ; ainsi L_0 ne peut être égal à $\lambda^{\otimes n}$ de sorte que $\lambda \otimes L_0$ n'est pas totalement symétrique et

$$\|L'\| < \|\lambda \otimes L_0\| = 1. \tag{5.50}$$

Par ailleurs on a

$$L'(q^{\otimes n+1}) = \lambda(q) L_0(q^{\otimes n}) = \operatorname{dist}(q^{\otimes n}, \operatorname{Vect}(p_1^{\otimes n}, \dots, p_k^{\otimes n})) \tag{5.51}$$

et pour tout i

$$L'(p_i^{\otimes n+1}) = \lambda(p_i) L_0(p_i^{\otimes n}) = 0 \tag{5.52}$$

de sorte que par (5.48) appliquée en remplaçant n par $n+1$ on trouve

$$\operatorname{dist}(q^{\otimes n+1}, \operatorname{Vect}(p_1^{\otimes n+1}, \ldots, p_k^{\otimes n+1})) \geqslant \frac{1}{\|L'\|}|L'(q^{\otimes n+1})|, \tag{5.53}$$

ce qui, combiné avec (5.50) et (5.51), termine la démonstration du lemme, et donc de la proposition. □

5.3 Une minoration

Toujours sous les hypothèses du début de ce paragraphe on va donner une minoration de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique du sous-schéma Σ ne dépendant que des distances en toutes les places de ses points pris deux à deux.

Sans perte de généralité on peut supposer que Σ est réunion de points $P_1, \ldots, P_l \in \mathbb{P}E(\mathcal{O}_K)$. Soit σ un plongement de K dans $\mathbb{C}$. Pour tout i choisissons $p_i \in E_\sigma^\vee$ de norme 1 représentant $P_{i,\sigma}$. On définit alors

$$\sin_\sigma(P_i, P_j) = \max_{e \in E_\sigma, \|e\| \leqslant 1, p_i(e)=0} |p_j(e)| \quad \in [0,1]. \tag{5.54}$$

On vérifie sans peine que cette quantité ne dépend pas des choix faits et est symétrique en P_i et P_j.

Lemme 5.8 *On a*

$$\varepsilon_\sigma(l-1) \geqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant l} \log \sin_\sigma(P_i, P_j). \tag{5.55}$$

Démonstration : Par (5.12), (5.46) et (5.48) il suffit de montrer que si E est un espace hermitien, $j \leqslant l$ un entier, $p_1, \ldots, p_{j-1}$ des éléments de E et $q \in E$ un vecteur de norme 1, il existe $L \in (E^\vee)^{\otimes l-1}$ de norme 1 s'annulant en $p_1^{\otimes l-1}, \ldots, p_{j-1}^{\otimes l-1}$ et vérifiant

$$|L(q^{\otimes l-1})| \geqslant \prod_{1 \leqslant i < j} \sin(q, p_i). \tag{5.56}$$

Pour ce faire, on peut pour tout i choisir $\lambda_i \in E^\vee$ de norme 1 s'annulant en p_i et vérifiant $\lambda_i(q) = \sin(q, p_i)$, choisir $\eta \in E^\vee$ de norme 1 vérifiant $\eta(q) = 1$, et poser

$$L = \lambda_1 \ldots \lambda_{j-1} \eta^{l-j}. \tag{5.57}$$

□

De la même façon, pour $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm} \mathcal{O}_K$, s'étant donné pour tout i une forme linéaire $p_i \in E_\mathfrak{p}^\vee \smallsetminus \mathfrak{p} E_\mathfrak{p}^\vee$ représentant $P_{i,\mathfrak{p}}$, on pose

$$\sin_\mathfrak{p}(P_i, P_j) = \max_{e \in E_\mathfrak{p}, p_i(e)=0} |p_j(e)|_\mathfrak{p} \quad \in [0,1]. \tag{5.58}$$

Lemme 5.9 *On a*

$$-\log \#\Gamma(\Sigma, \nu_* \mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}}/\mathcal{O}_\Sigma)_{\mathfrak{p}} + \varepsilon_{\mathfrak{p}}(l-1) \geqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant l} \log \sin_{\mathfrak{p}}(P_i, P_j). \tag{5.59}$$

Démonstration : Posons $R = \mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$, identifions $\mathbb{P}E$ à l'espace projectif standard $\mathbb{P}^N_R$, pour tout i choisissons pour le point $P_{i,\mathfrak{p}}$ des coordonnées homogènes $\underline{x}_i$ dans R qui engendrent l'idéal unité de R, et notons encore A_n l'application d'interpolation considérée en (5.21). Par (5.11), (5.23) et (5.24) on a

$$-\log \#\Gamma(\Sigma, \nu_* \mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}}/\mathcal{O}_\Sigma)_{\mathfrak{p}} + \varepsilon_{\mathfrak{p}}(l-1) = -\log \# \operatorname{coker} A_{l-1}. \tag{5.60}$$

Compte tenu de (5.29), et en conservant les notations qui y sont utilisées, il suffit de montrer que pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$ il existe $a \in J_{j,l-1}$ vérifiant

$$(\#R/J_{j,l-1})^{-1} \geqslant (\#R/aR)^{-1} = |a|_{\mathfrak{p}} \geqslant \prod_{1 \leqslant i < j} \sin_{\mathfrak{p}}(P_i, P_j), \tag{5.61}$$

autrement dit, qu'il existe un polynôme $L \in R[X_0, \ldots, X_N]_{l-1}$ s'annulant en $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{j-1}$ et vérifiant $|L(\underline{x}_j)|_{\mathfrak{p}} \geqslant \prod_{1 \leqslant i < j} \sin_{\mathfrak{p}}(P_i, P_j)$. Pour ce faire on peut choisir pour $1 \leqslant i < j$ des polynômes de degré un $\lambda_{i,j} \in R[X_0, \ldots, X_N]_1$ vérifiant $\lambda_{i,j}(\underline{x}_i) = 0$ et $|\lambda_{i,j}(\underline{x}_j)|_{\mathfrak{p}} = \sin_{\mathfrak{p}}(P_i, P_j)$, et $\eta_j \in R[X_0, \ldots, X_N]_1$ vérifiant $\eta_j(\underline{x}_j) = 1$, de sorte qu'on puisse conclure en posant $L = \lambda_{1,j} \ldots \lambda_{j-1,j} \eta_j^{l-j}$. □

Notons $\widehat{\operatorname{Spm}} \mathcal{O}_K$ l'ensemble réunion formelle de $\operatorname{Spm} \mathcal{O}_K$ et de l'ensemble des plongements de K dans $\mathbb{C}$.

Proposition 5.10 *Sous ces hypothèses, pour tout $n \geqslant l-1$, on a*

$$h(\Sigma; n) \geqslant nh([\Sigma]) + \frac{l}{2}\binom{n+N}{N} + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in \widehat{\operatorname{Spm}} \mathcal{O}_K} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant l} \log \sin_v(P_i, P_j). \tag{5.62}$$

Démonstration : Par le corollaire 5.3 il suffit de traiter le cas $n = l-1$. La proposition est alors conséquence immédiate des deux lemmes précédents. □

Corollaire 5.11 *Avec les notations introduites précédemment, on a*

$$\begin{aligned} N_1 &\leqslant l - 1 + \max_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm} \mathcal{O}_K} \frac{1}{\log \# k_{\mathfrak{p}}} (-\log \#\Gamma(\Sigma, \nu_* \mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}}/\mathcal{O}_\Sigma)_{\mathfrak{p}} - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant l} \log \sin_{\mathfrak{p}}(P_i, P_j)) \\ &\leqslant l - 1 + \max_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm} \mathcal{O}_K} \frac{1}{\log \# k_{\mathfrak{p}}} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant l} -\log \sin_{\mathfrak{p}}(P_i, P_j). \end{aligned}$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate des résultats qui précèdent et du corollaire 5.5. □

Appendice : Quelques résultats de géométrie hermitienne

Par commodité pour le lecteur, on rassemble ici un certain nombre de résultats élémentaires dont une grande partie se trouvent de façon éparse dans la littérature.

A.1 Conventions

Les espaces hermitiens sont par définition toujours des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels *de dimension finie.* Les produits scalaires hermitiens sont antilinéaires par rapport à la première variable et linéaires par rapport à la deuxième.

On dira qu'une application linéaire $u : E \to F$ entre deux espaces hermitiens est une similitude de rapport $\lambda > 0$ si E et F sont non nuls de même dimension et que pour tout élément x de E on a

$$\|u(x)\|_F = \lambda \|x\|_E.$$

On dira que u est une similitude partielle de rapport λ si l'application de $E/\ker(u)$ sur $\mathrm{im}(u)$ induite par u est une similitude de rapport λ. On appellera isométrie (resp. isométrie partielle) une similitude (resp. une similitude partielle) de rapport 1.

Si E est un espace hermitien, la n-ième puissance tensorielle de E, notée $E^{\otimes n}$, est munie du produit hermitien défini sur les tenseurs élémentaires par la formule

$$< e_1 \otimes \ldots \otimes e_n, f_1 \otimes \ldots \otimes f_n >_{E^{\otimes n}} = \prod_{i=1}^{n} < e_i, f_i >_E . \tag{A.1}$$

et prolongé par sesquilinéarité.

La n-ième puissance symétrique de E, notée $S^n E$ ou $\mathrm{Sym}^n E$, sera toujours considérée comme un quotient de $E^{\otimes n}$, et munie du produit hermitien quotient, de sorte que

$$< e_1 . \cdots . e_n, f_1 . \cdots . f_n >_{S^n E} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} < e_i, f_{\sigma(i)} >_E . \tag{A.2}$$

On en déduit en particulier que si $e_1, \ldots, e_d$ est une base orthonormale de E, les monômes $e^I = e_1^{i_1} . \cdots . e_d^{i_d} \in S^n E$, lorsque $I = (i_1, \ldots, i_d) \in \mathbb{N}^d$ parcourt l'ensemble des multi-indices de poids $n = |I| = i_1 + \cdots + i_d$, forment une base orthogonale de $S^n E$, chacun étant de norme

$$\|e^I\|_{S^n E} = \left(\frac{i_1! \ldots i_d!}{n!} \right)^{1/2} . \tag{A.3}$$

Plus généralement :

Lemme A.1 *Soit E un espace hermitien muni d'une décomposition $E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} E_k$ en somme directe orthogonale de certains de ses sous-espaces. Soient $n_1, \ldots, n_k$ des entiers et $n = n_1 + \cdots + n_k$. Alors l'application naturelle*

$$S^{n_1} E_1 \otimes \ldots \otimes S^{n_k} E_k \to S^n E$$

est injective et définit une similitude sur son image, de rapport $\left(\frac{n_1! \ldots n_k!}{n!} \right)^{1/2}$.

Démonstration : C'est un calcul évident. □

La n-ième puissance extérieure de E, notée $\bigwedge^n E$, sera munie du produit scalaire suivant :

$$< e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, f_1 \wedge \cdots \wedge f_n >_{\bigwedge^n E} = \det_{i,j} < e_i, f_j >_E . \tag{A.4}$$

On prendra garde que ce produit scalaire n'est pas le produit scalaire obtenu en considérant $\bigwedge^n E$ comme un quotient de $E^{\otimes n}$ (il en diffère par un facteur $n!$). Il possède toutefois la propriété remarquable d'être compatible à la dualité des puissances extérieures, qui en toute généralité peut se définir comme suit.

Pour tout schéma X et tout $\mathcal{O}_X$-module localement libre $\mathcal{E}$, la n-ième puissance extérieure du dual de $\mathcal{E}$ s'identifie au dual de la n-ième puissance extérieure de $\mathcal{E}$ grâce à l'accouplement

$$<.,.>: \bigwedge^n \mathcal{E} \times \bigwedge^n (\mathcal{E}^*) \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

donné localement par la formule

$$< e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, l_1 \wedge \cdots \wedge l_n >= \det_{i,j} l_i(e_j) \tag{A.5}$$

où les e_i et l_j sont des sections locales de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^*$, respectivement.

A.2 Décomposition polaire

Proposition A.2 (Décomposition polaire) *Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces hermitiens. Alors il existe un unique entier e, une unique suite finie strictement croissante de réels strictements positifs $\lambda_1 < \cdots < \lambda_e$ et une unique décomposition de E et de F en somme directe orthogonale*

$$E = E_0 \overset{\perp}{\oplus} \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant e}} E_i, \qquad F = F_0 \overset{\perp}{\oplus} \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant e}} F_i \tag{A.6}$$

tels que

i. $E_0 = \ker u$

ii. la projection orthogonale $F \to F_0$ identifie F_0 au conoyau $\operatorname{coker} u$

iii. pour tout $i \in \{1, \ldots, e\}$, u induit une similitude de rapport λ_i de E_i sur F_i.

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du théorème de décomposition spectrale appliqué à l'opérateur auto-adjoint u^*u. Plus précisément, les λ_i sont les racines carrées des valeurs propres non nulles de u^*u, les E_i les espaces propres associés, les F_i leurs images par u, et enfin $E_0 = \ker u^*u = \ker u$ et $F_0 = (\bigoplus_i F_i)^\perp$. □

Définition A.3 *Avec les notations de la proposition, on dira que les réels λ_i, auxquels on adjoindra $\lambda_0 = 0$ lorsque u n'est pas injective, sont les valeurs caractéristiques de u.*

Le sous-espace E_i est appelé espace caractéristique associé à la valeur caractéristique λ_i, et l'entier $m_i = \dim E_i$ est appelé multiplicité de λ_i.

On appelle suite des valeurs caractéristiques de u avec multiplicités la suite $(\mu_j)_{1 \leqslant j \leqslant \dim E}$ définie par $\mu_j = \lambda_i$ pour $m_0 + \cdots + m_{i-1} < j \leqslant m_0 + \cdots + m_i$.

La proposition peut se reformuler ainsi :

Corollaire A.4 *Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces hermitiens. Alors il existe une unique décomposition en somme directe orthogonale de E et de F : $E = E_0 \overset{\perp}{\oplus} E'$, $F = F_0 \overset{\perp}{\oplus} F'$, une unique isométrie $\varphi : E' \xrightarrow{\sim} F'$, et un unique endomorphisme auto-adjoint défini positif h (resp. k) de E' (resp. F') tels que*

$$u = i \circ \varphi \circ h \circ p \qquad (\textit{resp. } u = i \circ k \circ \varphi \circ p), \tag{A.7}$$

où i est l'inclusion de F' dans F et p la projection orthogonale de E sur E'. Les endomorphismes h et k ont mêmes valeurs propres (avec multiplicités), égales aux valeurs caractéristiques non nulles de u.

Toujours avec les mêmes notations, on a la

Proposition A.5 *L'application u et son adjoint $u^* : F \to E$ ont mêmes valeurs caractéristiques non nulles avec mêmes multiplicités.*

En outre, 0 est valeur caractéristique de u si et seulement si u n'est pas injective, et est valeur caractéristique de u^* si et seulement si u n'est pas surjective.

L'espace caractéristique de u^* associé à la valeur caractéristique λ_i est F_i (ceci est valable aussi pour $i = 0$) et s'envoie par u^* dans E_i.

DÉMONSTRATION : Cela résulte immédiatement des propriétés de la décomposition polaire (on peut aussi l'obtenir en passant à l'adjoint dans la formule (A.7)). □

Le résultat suivant est une autre conséquence immédiate de la caractérisation de la décomposition polaire :

Proposition A.6 *Soient a et b deux réels. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. pour tout x dans E, on a l'encadrement : $a\|x\| \leqslant \|u(x)\| \leqslant b\|x\|$

ii. les valeurs caractéristiques de u sont toutes comprises dans l'intervalle $[a, b]$.

En particulier, la norme de u est égale à sa plus grande valeur caractéristique :

$$\|u\| = \mu_{\dim E}. \tag{A.8}$$

Plus généralement, la norme de l'application k-ième puissance extérieure $\bigwedge^k u : \bigwedge^k E \to \bigwedge^k F$ vaut

$$\left\|\bigwedge^k u\right\| = \prod_{j=\dim E-k+1}^{\dim E} \mu_j, \tag{A.9}$$

où les μ_j sont les valeurs caractéristiques de u comptées avec multiplicités. Remarquons que l'on aurait aussi pu se servir de cette formule pour définir les valeurs caractéristiques.

Corollaire A.7 *Soient $u : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces hermitiens et a et b deux réels. Supposons que toutes les valeurs caractéristiques de u appartiennent à l'intervalle $[a, b]$. Soient F' un sous-espace de F, E' l'image réciproque de F' par u,*

$$u' : E' \longrightarrow F'$$

la restriction de u à E' et

$$\overline{u} : E/E' \longrightarrow F/F'$$

l'application obtenue par passage au quotient. Alors les valeurs caractéristiques de u' et, si u est surjective, celles de $\overline{u}$, appartiennent aussi à l'intervalle $[a, b]$.

DÉMONSTRATION : L'assertion sur u' est une conséquence immédiate de la proposition A.6. L'assertion sur $\overline{u}$ en résulte par passage à l'adjoint, au moyen de la proposition A.5. □

Corollaire A.8 *Soient E, F et G trois espaces hermitiens, $u : E \longrightarrow F$ et $v : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires, et $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$ des réels. Supposons toutes les valeurs caractéristiques de u (resp. de v) dans l'intervalle $[a, b]$ (resp. $[c, d]$). Alors les valeurs caractéristiques de l'application composée $v \circ u$ sont toutes dans l'intervalle $[ac, bd]$.*

DÉMONSTRATION : C'est une conséquence immédiate de la proposition A.6. □

A.3 Position relative de deux sous-espaces

A.3.1 Invariants du problème et lien avec les représentations unitaires du groupe diédral

Dans cette partie on se donne E un espace hermitien de produit scalaire $< .,. >$, et A et B deux sous-espaces vectoriels de E. On note respectivement p_A et p_B les projections orthogonales sur A et B, et $p_A|_B$ et $p_B|_A$ les restrictions de p_A à B et de p_B à A. Le résultat principal de cette section (théorème A.12 et ses corollaires) énonce que la donnée d'un tel triplet (E, A, B) équivaut à la donnée d'une représentation unitaire du groupe diédral (définition A.10), et que ces objets sont classifiés essentiellement par les valeurs caractéristiques de la projection $p_A|_B$ (ou $p_B|_A$).

On retrouve ainsi les résultats de [11], partie II. En particulier, on notera que les invariants ν introduits dans cette référence sont les valeurs caractéristiques du projecteur $p_B|_A$.

Lemme A.9 *Les applications $p_A|_B$ et $p_B|_A$ ont mêmes valeurs caractéristiques non nulles avec multiplicités, et elles échangent leurs sous-espaces caractéristiques associés.*

En particulier, on a : $\|p_A|_B\| = \|p_B|_A\|$.

Démonstration : Par définition des projections on a, pour tous $a \in A$ et $b \in B$,

$$< p_B(a), b >=< a, b >=< a, p_A(b) > . \tag{A.10}$$

Ainsi $p_A|_B$ et $p_B|_A$ sont adjointes l'une de l'autre. Le lemme est alors une conséquence immédiate de la proposition A.5. $\square$

On remarquera que, par la proposition A.6, ces valeurs caractéristiques sont toutes inférieures ou égales à 1.

Définition A.10 *On appelle groupe diédral, noté D, le groupe défini par générateurs e_a, e_b et relations $e_a^2 = e_b^2 = 1_D$.*

Si E est un espace hermitien et A et B deux sous-espaces de E, on note $\rho_{A,B} : D \to U(E)$ la représentation de D dans le groupe unitaire de E envoyant e_a (resp. e_b) sur la symétrie orthogonale par rapport à A (resp. B).

Proposition A.11 *Toute représentation ρ de D dans $U(E)$ est de la forme $\rho_{A,B}$ pour des sous-espaces A et B uniquement déterminés.*

Démonstration : Notons $s_a = \rho(e_a)$. Puisque $e_a^2 = 1_D$, on a $s_a^2 = \mathrm{id}_E$, et comme ρ est unitaire, ceci implique que s_a est une symétrie orthogonale. On doit alors nécessairement avoir $A = \ker(\mathrm{id} - s_a)$, et avec les notations analogues $B = \ker(\mathrm{id} - s_b)$. Inversement, avec ce choix de A et B on vérifie facilement qu'on a bien $\rho = \rho_{A,B}$. $\square$

Si n est un entier naturel, on notera $U(n)$ le groupe unitaire de l'espace $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire hermitien standard.

Pour tout ν dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$ notons $E(\nu)$ la représentation de D dans $U(2)$ de la forme $\rho_{A(\nu),B(\nu)}$, où $A(\nu) = \mathbb{C}.(1, 0) \subset \mathbb{C}^2$ et $B(\nu) = \mathbb{C}.(\nu, \sqrt{1-\nu^2}) \subset \mathbb{C}^2$.

On note R_a (resp. R_b) la représentation de D dans $U(1)$ qui envoie e_a sur $\mathrm{id}_\mathbb{C}$ et e_b sur $-\mathrm{id}_\mathbb{C}$ (resp. e_a sur $-\mathrm{id}_\mathbb{C}$ et e_b sur $\mathrm{id}_\mathbb{C}$).

On note S la représentation de D dans $U(1)$ qui envoie e_a et e_b sur $-\mathrm{id}_\mathbb{C}$.

On note enfin T la représentation triviale, *i.e.* la représentation de D dans $U(1)$ qui envoie e_a et e_b sur $\mathrm{id}_\mathbb{C}$.

Théorème A.12 *Soient E un espace hermitien et A et B deux sous-espaces de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. On a

$$\dim A \cap (B^{\perp}) = r_a, \quad \dim(A^{\perp}) \cap B = r_b, \quad \dim(A+B)^{\perp} = s, \quad \dim A \cap B = t$$

et les valeurs caractéristiques de $p_A|_B$ (et de $p_B|_A$) différentes de 0 et 1 sont

$$\lambda_1 < \cdots < \lambda_e$$

avec multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_e$.

ii. Le sous-espace $A+B$ est de codimension s dans E, et il existe des vecteurs
$a_{0,j}$ $(1 \leqslant j \leqslant r_a)$ dans $A \cap (B^{\perp})$,
$a_{i,j}$ $(1 \leqslant i \leqslant e,\ 1 \leqslant j \leqslant m_i)$ dans A,
$b_{0,j}$ $(1 \leqslant j \leqslant r_b)$ dans $(A^{\perp}) \cap B$,
$b_{i,j}$ $(1 \leqslant i \leqslant e,\ 1 \leqslant j \leqslant m_i)$ dans B et
c_j $(1 \leqslant j \leqslant t)$ dans $A \cap B$
tels que la famille formée des $(a_{0,j})_{1 \leqslant j \leqslant r_a}$, des $(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant e, 1 \leqslant j \leqslant m_i}$ et des $(c_j)_{1 \leqslant j \leqslant t}$ (resp. la famille formée des $(b_{0,j})_{1 \leqslant j \leqslant r_b}$, des $(b_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant e, 1 \leqslant j \leqslant m_i}$ et des $(c_j)_{1 \leqslant j \leqslant t}$) forme une base orthonormale de A (resp. de B) et que pour tout couple (i,i') d'éléments de $\{1,\ldots,e\}$ et pour tous $1 \leqslant j \leqslant m_i$ et $1 \leqslant j' \leqslant m_{i'}$ on ait

$$< a_{i,j}, b_{i',j'} >= \lambda_i . \delta_{(i,j),(i',j')}. \tag{A.11}$$

iii. La représentation $\rho_{A,B}$ de D dans $U(E)$ est isomorphe à la représentation somme directe orthogonale

$$R_a^{\oplus r_a} \overset{\perp}{\oplus} R_b^{\oplus r_b} \overset{\perp}{\oplus} S^{\oplus s} \overset{\perp}{\oplus} T^{\oplus t} \overset{\perp}{\oplus} \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant e}} E(\lambda_i)^{\oplus m_i}. \tag{A.12}$$

DÉMONSTRATION : *i.* $\Rightarrow$ *ii.* Pour $1 \leqslant i \leqslant e$, notons A_i (resp. B_i) le sous-espace caractéristique de $p_B|_A$ (resp. $p_A|_B$) pour la valeur caractéristique λ_i, supposée par hypothèse différente de 0 ou 1. Lorsqu'il n'est pas réduit au sous-espace nul, on vérifie aisément que $A \cap (B^{\perp})$ (resp. $(A^{\perp}) \cap B$) est le sous-espace caractéristique de $p_B|_A$ (resp. $p_A|_B$) pour la valeur caractéristique 0 et que $A \cap B$ est le sous-espace caractéristique de $p_B|_A$ et de $p_A|_B$ pour la valeur caractéristique 1. Choisissons $(a_{0,j})_{1 \leqslant j \leqslant r_a}$ (resp. $(b_{0,j})_{1 \leqslant j \leqslant r_b}$, resp. $(c_j)_{1 \leqslant j \leqslant t}$) une base orthonormale de $A \cap (B^{\perp})$ (resp. $(A^{\perp}) \cap B$, resp. $A \cap B$) et pour tout $i \in \{1,\ldots,e\}$, $(a_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant m_i}$ une base orthonormale de A_i. Alors si l'on pose

$$b_{i,j} = \lambda_i^{-1} p_B(a_{i,j}),$$

on vérifie facilement que pour tout $i \in \{1,\ldots,e\}$, $(b_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant m_i}$ est une base orthonormale de B_i et que les relations (A.11) sont satisfaites.

ii. $\Rightarrow$ *iii.* Sous les hypothèses de *ii.*, on obtient un isomorphisme de E sur la représentation donnée par (A.12) en identifiant chaque droite $\mathbb{C}.a_{0,j}$ (resp. $\mathbb{C}.b_{0,j}$, resp. $\mathbb{C}.c_j$) à une copie de R_a (resp. R_b, resp. T), en identifiant $(A+B)^{\perp}$ à la représentation $S^{\oplus s}$ et, pour tous $1 \leqslant i \leqslant e$ et $1 \leqslant j \leqslant m_i$, en envoyant $a_{i,j}$ (resp. $b_{i,j}$) sur le vecteur $(1,0)$ (resp. $(\lambda_i, \sqrt{1-\lambda_i^2})$) d'une copie de $E(\lambda_i)$.

iii. $\Rightarrow$ *i.* On ne perd pas de généralité en supposant que la représentation (E,ρ) est égale à la somme directe (A.12). Alors, puisque $\rho(e_a)$ (resp. $\rho(e_b)$) laisse stable la décomposition (A.12), le sous-espace $A = \ker(\mathrm{id} - \rho(e_a))$ (resp. $B = \ker(\mathrm{id} - \rho(e_b))$) est égal à la somme directe orthogonale de ses intersections avec chacun des sommants de cette décomposition. On vérifie alors par un calcul immédiat que l'on obtient ainsi la décomposition de A (resp. B) selon les sous-espaces caractéristiques de $p_B|_A$ (resp. $p_A|_B$) et que les valeurs caractéristiques associées sont bien celles données dans le point *i*. □

Définition A.13 *Avec les notations du théorème, si E est un espace hermitien et A et B deux sous-espaces de E, on appelle invariants du triplet (E, A, B) la donnée des entiers r_a, r_b, s et t et des réels $\lambda_1 < \cdots < \lambda_e$ (dans $]0,1[$) avec multiplicités $m_1, \ldots, m_e$.*

On notera que ces données permettent facilement de retrouver les dimensions de E, A et B grâce aux relations

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} p_B|_A = \operatorname{rg} p_A|_B &= t + \sum_{i=1}^{e} m_i \\ &= \dim A - r_a = \dim B - r_b \end{aligned} \tag{A.13}$$

et

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim A + \dim B + s - t \\ &= r_a + r_b + s + t + 2\sum_{i=1}^{e} m_i. \end{aligned} \tag{A.14}$$

Corollaire A.14 *Soient E (resp. E') un espace hermitien et A et B (resp. A' et B') des sous-espaces de E (resp. E'). Alors il existe une isométrie de E sur E' envoyant A sur A' et B sur B' si et seulement si les triplets (E, A, B) et (E', A', B') ont mêmes invariants.*

Démonstration : Ceci résulte de l'équivalence entre *i.* et *iii.* dans le théorème A.12. □

Corollaire A.15 *À isomorphisme près, les représentations unitaires irréductibles de D sont R_a, R_b, S, T et les $E(\nu)$ pour $\nu \in]0,1[$.*

Toute représentation unitaire de D se décompose de façon essentiellement unique en somme directe orthogonale de représentations irréductibles.

Démonstration : Ceci est une conséquence de la proposition A.11 et de l'équivalence entre *i.* et *iii.* dans le théorème A.12. □

A.3.2 Mesure d'orthogonalité

Comme précédemment, soit (E, A, B) un triplet hermitien d'invariants r_a, r_b, s, t et $\lambda_1 < \cdots < \lambda_e$ avec multiplités respectives $m_1, \ldots, m_e$. On posera aussi $\lambda_{\max} = \lambda_e$ si $e \geqslant 1$, et par convention $\lambda_{\max} = 0$ sinon.

On note $\widetilde{A} = A/(A \cap B)$ et $\widetilde{B} = B/(A \cap B)$ les sous-espaces traces de A et de B dans l'espace hermitien quotient $E/(A \cap B)$,

$$\alpha = \alpha_{\widetilde{A},\widetilde{B}} : \widetilde{A} \times \widetilde{B} \xrightarrow{\sim} \widetilde{A} + \widetilde{B} \tag{A.15}$$

l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels déduit naturellement de l'addition et

$$d_{A,B} = \| \bigwedge^{\max} \alpha \| \tag{A.16}$$

la norme de son déterminant (lorsque $\widetilde{A} \times \widetilde{B}$ est muni de la métrique hermitienne produit direct). De façon équivalente, $d_{A,B}$ est la norme de l'isomorphisme (naturel au choix d'un signe près)

$$\bigwedge^{\max} A \otimes \bigwedge^{\max} B \xrightarrow{\sim} \bigwedge^{\max} (A \cap B) \otimes \bigwedge^{\max} (A + B). \tag{A.17}$$

Proposition A.16 *Avec les notations précédentes, les valeurs caractéristiques de α sont 1 avec multiplicité $r_a + r_b$, ainsi que les $(1 + \lambda_i)^{1/2}$ et les $(1 - \lambda_i)^{1/2}$ chacune avec multiplicité m_i.*

DÉMONSTRATION : Par le théorème A.12 (et par multiplicativité du déterminant dans les sommes directes orthogonales), il suffit de traiter le cas où E est une des représentations élémentaires du groupe diédral. Le cas des représentations R_a, R_b, S et T étant évident, on peut supposer E de la forme $E(\nu)$ pour $\nu \in]0,1[$; notons alors $a = (1,0)$ et $b = (\nu, \sqrt{1-\nu^2}) \in E = \mathbb{C}^2$ les vecteurs directeurs canoniques des droites A et B. Les vecteurs (a,b) et $(a,-b)$ de $A \times B$ sont alors orthogonaux, tous deux de norme $\sqrt{2}$, et envoyés par α sur les vecteurs $a+b$ et $a-b$ de E, qui sont orthogonaux, de normes respectives $(2+2\nu)^{1/2}$ et $(2-2\nu)^{1/2}$. Ceci détermine bien la décomposition polaire de α, et démontre la proposition. □

Corollaire A.17 *Avec les notations précédentes :*

i. on a

$$d_{A,B}{}^2 = d_{\widetilde{A},\widetilde{B}}{}^2 = \prod_{i,\, \lambda_i<1} (1-\lambda_i^2)^{m_i} \tag{A.18}$$

ii. les valeurs caractéristiques de α sont toutes comprises dans l'intervalle

$$\left[\left(1-\sqrt{1-d_{A,B}^2}\right)^{1/2}, \left(1+\sqrt{1-d_{A,B}^2}\right)^{1/2}\right] \tag{A.19}$$

iii. on a l'encadrement

$$1 \geqslant d_{A,B} \geqslant (1-\|p_{\widetilde{B}|\widetilde{A}}\|^2)^{\min(\dim \widetilde{A}, \dim \widetilde{B})/2}, \tag{A.20}$$

et $d_{A,B} = 1$ si et seulement si $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ sont orthogonaux (on dira alors que A et B sont orthogonaux au sens large).

DÉMONSTRATION : L'assertion i. résulte de la proposition et du fait que la norme du déterminant d'une application linéaire est égale au produit de ses valeurs caractéristiques. Du fait que les λ_i sont toutes dans l'intervalle $[0,1]$, l'égalité i. implique que pour tout $i \in \{1,\dots,e\}$, on a $\lambda_i^2 \leqslant 1-d_{A,B}^2$; compte tenu de la proposition, l'assertion ii. en découle aussitôt. L'assertion iii. se démontre de façon analogue, en utilisant le fait que $\|p_{\widetilde{B}}|_{\widetilde{A}}\| = \lambda_{\max}$. □

Il est possible aussi de faire jouer à A et B des rôles non symétriques. Notons $\beta = \beta_{A,B}$ l'isomorphisme naturel de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$\beta : A/(A\cap B) \xrightarrow{\sim} (A+B)/B.$$

Alors

Proposition A.18 *Les valeurs caractéristiques de β sont les $(1-\lambda_i^2)^{1/2}$ avec multiplicité m_i. En particulier, on a $\|\det \beta\| = d_{A,B}$, et les valeurs caractéristiques de β sont toutes dans l'intervalle $[d_{A,B}, 1]$.*

DÉMONSTRATION : Comme précédemment, par compatibilité de l'application β aux sommes directes orthogonales de représentations du groupe diédral, on peut supposer que E est une des représentations élémentaires ; le calcul des valeurs caractéristiques est alors immédiat. Compte tenu du corollaire A.17.i., le reste de la proposition en découle de façon évidente. □

Remarquons pour conclure que, par le corollaire A.17.iii., on peut considérer $d_{A,B}$ comme une mesure de l'orthogonalité de A et B. En particulier, si A et B s'obtiennent par complexification de deux droites (distinctes) d'un espace vectoriel réel (comme c'est le cas par exemple pour la représentation élémentaire $E(\nu)$), le réel $d_{A,B}$ est le sinus de l'angle de ces deux droites. Notons enfin que les corollaire A.17.ii. et proposition A.18 signifient que, pour $d_{A,B}$ proche de 1, les applications α et β sont presque isométriques.

A.3.3 Comportement par dualité

Conservons les notations du paragraphe précédent.

Proposition A.19 *Si les invariants du triplet (E, A, B) sont r_a, r_b, s, t et $\lambda_1 < \cdots < \lambda_e$ avec multiplicités $m_1, \ldots, m_e$, alors l'application composée*

$$s_A \circ s_B$$

des symétries orthogonales par rapport à A et à B est une transformation unitaire dont les valeurs propres sont :

$$1 \text{ avec multiplicité } s + t,$$

$$-1 \text{ avec multiplicité } r_a + r_b,$$

et les

$$(\lambda_j \pm i\sqrt{1 - \lambda_j^2})^2, \text{ chacune avec multiplicité } m_j \text{ (pour } 1 \leqslant j \leqslant e\text{).}$$

DÉMONSTRATION : Par le théorème A.12 il suffit de traiter le cas où la représentation du groupe diédral associée à (E, A, B) est de la forme R_a, R_b, S, T ou $E(\nu)$. Le seul cas non trivial est celui de $E(\nu)$, pour lequel on peut remarquer que $s_A \circ s_B$ est la complexification de l'application composée de deux symétries orthogonales suivant des droites (réelles) d'angle $\arccos(\nu)$, donc est la complexification d'une rotation (réelle) d'angle $2 \arccos(\nu)$. □

Notons dorénavant $A^\perp$ (resp. $B^\perp$) l'orthogonal de A (resp. B) dans E.

Corollaire A.20 *Si les invariants du triplet (E, A, B) sont*

$$r_a, r_b, s, t$$

et $\lambda_1 < \cdots < \lambda_e$ avec multiplicités $m_1, \ldots, m_e$, alors les invariants du triplet $(E, A^\perp, B^\perp)$ sont

$$r_b, r_a, t, s$$

et $\lambda_1 < \cdots < \lambda_e$ avec multiplicités $m_1, \ldots, m_e$.

Notamment les valeurs caractéristiques différentes de 0 et de 1 de $p_{A,B}$, $p_{B,A}$, $p_{A^\perp,B^\perp}$ et $p_{B^\perp,A^\perp}$ sont les mêmes avec mêmes multiplicités.

DÉMONSTRATION : Cela résulte de la définition des invariants, de la proposition précédente, et du fait que $s_{A^\perp} \circ s_{B^\perp} = (-s_A) \circ (-s_B) = s_A \circ s_B$. □

Corollaire A.21 *Avec les notations précédentes, on a*

$$d_{A^\perp,B^\perp} = d_{A,B}.$$

DÉMONSTRATION : Cela résulte immédiatement des corollaires A.20 et A.17. □

A.4 Passage à un nombre quelconque de sous-espaces

Les résultats du paragraphe précédent permettent d'obtenir certaines estimations sur la position d'un nombre quelconque de sous-espaces, à partir seulement des normes des projections de l'un sur l'autre deux à deux. Plus précisément, on montre que si des sous-espaces d'un espace hermitien sont «deux à deux presque orthogonaux», dans le sens où les projections de l'un sur l'autre sont de norme petite, alors ils sont «globalement presque orthogonaux», dans le sens où l'application naturelle du produit direct de ces sous-espaces sur leur somme est presque une isométrie, *i.e.* a toutes ses valeurs caractéristiques proches de 1.

Lemme A.22 *Soit H un espace hermitien qui est somme directe de certains de ses sous-espaces $H_1, \ldots, H_m$. Munissons le produit direct $H_1 \times \cdots \times H_m$ du produit scalaire somme directe orthogonale des produits scalaires restreints. On a deux applications linéaires inversibles naturelles*

$$\alpha = \alpha_{H_1,\ldots,H_m} : \begin{array}{ccc} H_1 \times \cdots \times H_m & \longrightarrow & H \\ (x_1, \ldots, x_m) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_m \end{array}$$

et

$$\gamma = \gamma_{H_1,\ldots,H_m} : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H_1 \times \cdots \times H_m \\ x & \longmapsto & (p_{H_1}(x), \ldots, p_{H_m}(x)). \end{array}$$

Alors α et γ sont adjointes l'une de l'autre.

Démonstration : Soient $x \in H$ et $y = (y_1, \ldots, y_m) \in H_1 \times \cdots \times H_m$. Alors on a

$$\begin{aligned} < x, \alpha(y) > &= < x, y_1 > + \cdots + < x, y_m > \\ &= < p_{H_1}(x), y_1 > + \cdots + < p_{H_m}(x), y_m > \\ &= < \gamma(x), y >, \end{aligned} \tag{A.21}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition A.23 *Soient A et B deux sous-espaces d'un espace hermitien E avec $A \cap B = 0$, et λ_i les valeurs caractéristiques de $p_A|_B$ avec multiplicité m_i. Considérons l'application*

$$\gamma : \begin{array}{ccc} A + B & \longrightarrow & A \times B \\ x & \longmapsto & (p_A(x), p_B(x)) \end{array}$$

dont les composantes sont les projections orthogonales sur A et B. Alors les valeurs caractéristiques de γ différentes de 1 sont les $(1+\lambda_i)^{1/2}$ et les $(1-\lambda_i)^{1/2}$, chacune avec multiplicité m_i. En particulier, on a

$$\|\gamma^{-1}\|^2 = (1 - \|p_A|_B\|)^{-1}.$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du lemme précédent (dans le cas $m = 2$) et des propositions A.5 et A.16. La dernière assertion résulte du fait que la norme d'une application linéaire est égale à sa plus grande valeur caractéristique. □

Corollaire A.24 *Soient A, B et C trois sous-espaces d'un espace hermitien tels que la somme $A + B + C$ soit directe. Alors on a l'inégalité*

$$\|p_{(A+B)}|_C\|^2 \leqslant \frac{\|p_A|_C\|^2 + \|p_B|_C\|^2}{1 - \|p_A|_B\|}.$$

Démonstration : Par transitivité des projections orthogonales sur des sous-espaces emboîtés, on a $p_A|_C = p_A|_{(A+B)} \circ p_{(A+B)}|_C$ et $p_B|_C = p_B|_{(A+B)} \circ p_{(A+B)}|_C$, d'où

$$p_{(A+B)}|_C = \gamma^{-1} \circ (p_A|_C, p_B|_C),$$

avec $\gamma = (p_A|_{(A+B)}, p_B|_{(A+B)}) : A + B \longrightarrow A \times B$. Le corollaire résulte alors de la proposition précédente. □

Corollaire A.25 *Soit n un entier. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, si $A_0, \ldots, A_n$ sont $n+1$ sous-espaces en somme directe dans un espace hermitien, et si*

$$M = \max_{i,j} \|p_{A_i}|_{A_j}\|^2 < \eta,$$

alors

$$\|p_{(A_1+\cdots+A_n)}|_{A_0}\|^2 < (n + \varepsilon)M.$$

Démonstration : On procède par récurrence sur n, le cas $n=1$ étant évident. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$. Le corollaire précédent donne :

$$\|p_{(A_1+\cdots+A_n)}|_{A_0}\|^2 \leqslant \frac{\|p_{(A_1+\cdots+A_{n-1})}|_{A_0}\|^2+\|p_{A_n}|_{A_0}\|^2}{1-\|p_{(A_1+\cdots+A_{n-1})}|_{A_n}\|}. \tag{A.22}$$

Par définition on a $\|p_{A_n}|_{A_0}\|^2 \leqslant M$, et en appliquant l'hypothèse de récurrence d'une part à $A_0,\ldots,A_{n-1}$, d'autre part à $A_1,\ldots,A_n$, on trouve, si M est assez petit :

$$\|p_{(A_1+\cdots+A_{n-1})}|_{A_0}\|^2 < (n-1+\varepsilon/2)M, \tag{A.23}$$

donc

$$1-\sqrt{(n-1+\varepsilon/2)M} < 1-\|p_{(A_1+\cdots+A_{n-1})}|_{A_n}\| \leqslant 1. \tag{A.24}$$

En insérant (A.23) et (A.24) dans (A.22), quitte à prendre M encore plus petit, on trouve le résultat souhaité. □

Soient E un espace hermitien et $A_1,\ldots,A_m$ m sous-espaces de E en somme directe. L'application linéaire naturelle

$$\alpha_{A_1,\ldots,A_m} : A_1\times\cdots\times A_m \longrightarrow A_1+\cdots+A_m$$

est bijective, mais n'est en général pas une isométrie. On note $d_{A_1,\ldots,A_m}$ la norme de son déterminant, c'est-à-dire le rapport de la similitude naturelle entre espaces hermitiens de dimension 1

$$\bigwedge^{\max} A_1\otimes\ldots\otimes\bigwedge^{\max} A_m \xrightarrow{\sim} \bigwedge^{\max}(A_1+\cdots+A_m).$$

On remarquera que ces notations sont compatibles avec celles introduites précédemment pour $m=2$ et que, par le lemme A.22 (et avec les notations correspondantes), on a aussi

$$d_{A_1,\ldots,A_m} = \|\det\alpha_{A_1,\ldots,A_m}\| = \|\det\gamma_{A_1,\ldots,A_m}\|. \tag{A.25}$$

Proposition A.26 *Sous ces hypothèses :*

i. On a

$$d_{A_1,\ldots,A_m} = d_{A_1,A_2}.d_{(A_1+A_2),A_3}.\cdots.d_{(A_1+\cdots+A_{m-1}),A_m} \leqslant 1.$$

ii. Les valeurs caractéristiques de $\alpha_{A_1,\ldots,A_m}$ sont toutes comprises dans l'intervalle

$$\left[\left(1-\sqrt{1-d^2_{A_1,\ldots,A_m}}\right)^{(m-1)/2}, \left(1+\sqrt{1-d^2_{A_1,\ldots,A_m}}\right)^{(m-1)/2}\right].$$

Démonstration : On procède par récurrence sur m, en remarquant que $\alpha_{A_1,\ldots,A_m}$ se factorise en

$$A_1\times\cdots\times A_{m-1}\times A_m \xrightarrow{\ u\ } (A_1+\cdots+A_{m-1})\times A_m \xrightarrow{\ v\ } A_1+\cdots+A_m$$

avec $u=\alpha_{A_1,\ldots,A_{m-1}}\times Id_{A_m}$ et $v=\alpha_{(A_1+\cdots+A_{m-1}),A_m}$. On trouve ainsi

$$d_{A_1,\ldots,A_m} = \|\det u\|.\|\det v\| = d_{A_1,\ldots,A_{m-1}}.d_{(A_1+\cdots+A_{m-1}),A_m} \tag{A.26}$$

et en appliquant l'hypothèse de récurrence à $d_{A_1,\ldots,A_{m-1}}$, on prouve la première assertion. L'application u admet pour valeurs caractéristiques celles de $\alpha_{A_1,\ldots,A_{m-1}}$, auxquelles on a adjoint la valeur caractéristique 1 avec multiplicité $\dim A_m$. Par hypothèse de récurrence, les valeurs caractéristiques de $\alpha_{A_1,\ldots,A_{m-1}}$ sont toutes dans l'intervalle

$$\left[\left(1-\sqrt{1-d^2_{A_1,\ldots,A_{m-1}}}\right)^{(m-2)/2}, \left(1+\sqrt{1-d^2_{A_1,\ldots,A_{m-1}}}\right)^{(m-2)/2}\right],$$

et il en est donc de même des valeurs caractéristiques de u. Par ailleurs, le corollaire A.17.*ii*. implique que les valeurs caractéristiques de v sont toutes dans l'intervalle

$$\left[\left(1-\sqrt{1-d^2_{(A_1+\cdots+A_{m-1}),A_m}}\right)^{1/2}, \left(1+\sqrt{1-d^2_{(A_1+\cdots+A_{m-1}),A_m}}\right)^{1/2}\right].$$

Le point *ii*. se déduit alors de ces deux encadrements au moyen du corollaire A.8 et de l'inégalité

$$d_{A_1,\ldots,A_m} \leqslant \min\{d_{A_1,\ldots,A_{m-1}}, d_{(A_1+\cdots+A_{m-1}),A_m}\} \tag{A.27}$$

qui est une conséquence triviale de (A.26). □

Corollaire A.27 *Soit d un entier. Il existe deux constantes c et $\eta > 0$ (dépendant de d) telles que, pour tout espace hermitien E de dimension au plus d et pour tous sous-espaces $A_1, \ldots, A_m$ en somme directe dans E tels que*

$$M = \max_{1\leqslant i<j\leqslant m}\{\|p_{A_i}|_{A_j}\|^2\} \leqslant \eta,$$

on ait

$$1 \geqslant d_{A_1,\ldots,A_m} \geqslant 1 - cM.$$

Démonstration : On ne perd pas de généralité en supposant que les A_i sont tous non nuls. Alors, puisque ces sous-espaces sont en somme directe, on a nécessairement $m \leqslant d$. Par la proposition précédente on a

$$d_{A_1,\ldots,A_m} = d_{A_1,A_2}.d_{(A_1+A_2),A_3}.\cdots.d_{(A_1+\cdots+A_{m-1}),A_m}.$$

Pour démontrer le corollaire, il suffit donc de minorer chacun des termes de ce produit. Si M est assez petit, la minoration voulue est fournie par les corollaires A.17.*iii*. et A.25. □

Références

[1] Bost J.-B., Gillet H., Soulé C., Heights of Projective Varieties and Positive Green Forms, *Journal Amer. Math. Soc.* **7** (1994) pp. 903-1027.

[2] Conrad B., *Grothendieck Duality and Base Change*, Lecture Notes in Mathematics **1750**, Springer-Verlag 2000.

[3] Fulton W., *Intersection theory (2nd ed.)*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge Vol. **2**, Springer-Verlag 1998.

[4] Grothendieck A., Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV : Les schémas de Hilbert, *Séminaire Bourbaki* 1960/61, exposé 221, in *Fondements de la géométrie algébrique.*

[5] Grothendieck A., Dieudonné J., Éléments de géométrie algébrique, *Publ. Math. IHÉS* **4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32** (1960-1967).

[6] Hartshorne R., *Residues and Duality*, Lecture Notes in Mathematics **20**, Springer-Verlag 1966.

[7] KOLLAR J., *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge Vol. **32**, Springer-Verlag 1996.

[8] LAURENT M., Hauteur de matrices d'interpolation, in : PHILIPPON P. (Ed.), *Approximations Diophantiennes et Nombres Transcendants, Luminy 1990*, de Gruyter, 1992, pp. 215-238.

[9] MAZUR B., ROBERTS L., Local Euler characteristics, *Inventiones Math.* **9** (1970) pp. 201-234.

[10] MUMFORD D., *Lectures on Curves on an Algebraic Surface* (with a section by G. BERGMAN), Annals of Mathematics Studies **59**, Princeton University Press 1966.

[11] SCHMIDT W.M., On heights of algebraic subspaces and diophantine approximations, *Annals of Math.* **85** (1967) pp. 430-472.

[12] SERRE J.-P., *Corps locaux*, Hermann 1968.