Minimisation de la variation totale

Dans ce TP, on considère différentes approches pour minimiser l'énergie :

$$\int_\Omega |Du| + \frac{1}{2\mu}\|f-u\|^2 \tag{1}$$

On rappelle que les définitions des opérateurs différentiels discretisés sont données dans le TP 3 et que vous pouvez télécharger les programmes matlab correspondants à l'adresse : http ://tsi.enst.fr/ ladjal/opdiff_TP3.zip

1 Fonctionnelle approchée : descente de gradient

Dans cette première partie, on regarde l'approximation suivante du modèle ROF :

$$\int_\Omega \sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2} + \frac{1}{2\mu}\|f-u\|^2 \tag{2}$$

Calculer l'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle ci-dessus. Calculer le minimiseur par une méthode de descente de gradient.

Choisir une image, la bruiter (et la sauver). Déterminer empiriquement la vitesse de convergence de l'algorithme.

2 Algorithmes de projection

On rappelle que la solution du modèle (1) est donnée par :

$$u = f - P_{G_\mu}(f) \tag{3}$$

Il suffit donc de savoir calculer la projection sur la boule de rayon μ dans G pour calculer u.

2.1 Algorithme d'Antonin Chambolle

On peut calculer la projection en utilisant une méthode de point fixe à partir des relations de Kuhn et Tucker.

Le problème discret à résoudre pour calculer la projection est le suivant :

$$\min\left\{\|\mu\mathrm{div}\,(p)-f\|_X^2 : p\ /\ |p_{i,j}| \le 1\ \forall i,j=1,\ldots,N\right\} \tag{4}$$

On le résout par une méthode de point fixe : $p^0=0$, and

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{p_{i,j}^n + \tau(\nabla(\mathrm{div}\,(p^n)-f/\mu))_{i,j}}{1+\tau|(\nabla(\mathrm{div}\,(p^n)-f/\mu))_{i,j}|} \tag{5}$$

Si le paramètre τ vérifie $\tau < 1/8$, alors $\mu\mathrm{div}\,(p^n)$ converge vers $P_{G_\mu}(f)$ lorsque $n \to +\infty$.

En pratique, on observe la convergence pour $\tau < 1/4$.

Vérifier numériquement ces assertions. Regarder la vitesse de convergence empirique.

2.2 Algorithme de gradient projeté

On peut aussi calculer la projection en utilisant un algorithme de gradient projeté.

$$\begin{cases} v^m = \frac{f}{\mu} + \operatorname{div} p^m \\ p_{i,j}^{m+1} = \frac{p_{i,j}^m + \tau(\nabla v^m)_{i,j}}{\max\left\{1, |p_{i,j}^n + \tau(\nabla v^m)_{i,j}|\right\}} \end{cases} \tag{6}$$

et si $\tau < 1/4$, on montre que μv^m converge vers la solution de (1).

Programmer cette approche, et la comparer à l'algorithme de point fixe.

3 Extension au cas de la déconvolution

On considère le cas de la déconvolution :

$$\frac{1}{2\mu}\|Au - f\|^2 + \int_\Omega |Du| \tag{7}$$

où A est un opérateur de flou (numériquement, on pourra prendre pour A un noyau gaussien).

On peut montrer que le schéma suivant permet de calculer la solution u avec $\nu\|A^*A\| \leq 1$:

$$\begin{cases} v_n = u_n + \nu A^*(f - Au_n) \\ u_{n+1} = \operatorname{argmin}_u \left(\frac{1}{2\mu\nu}\|v_n - u\|^2 + \int |Du| \right) \end{cases} \tag{8}$$

Coder cette méthode. Comparer sa vitesse avec les méthodes pour la fonctionnelle approchée.

4 Acclération : algorithme de Nesterov

Une nouvelle classe d'algorithme du premier ordre particulièrement efficace est apparue récemment. L'algorithme suivant permet de calculer la solution de (1).

1. On fixe $k = 0$, $v_0 = 0$, $x_0 = 0$, $L = \mu\|\operatorname{div}\|^2 = 8\mu$.
2. On pose $k = k + 1$, et on calcule $\eta_k = \nabla\left(f - \mu\operatorname{div}(x_k)\right)$.
3. On pose $y_k = P_K(x_k - \eta_k/L)$, avec $K = \left\{x \in L^2 \times L^2 \ / \ \|x\| \leq 1\right\}$.
4. Soit $v_k = v_{k-1} + \frac{k+1}{2}\eta_k$.
5. Soit $z_k = P_K(-v_k/L)$.
6. Soit $x_{k+1} = \frac{2}{k+3}z_k + \frac{k+1}{k+2}y_k$.
7. La sortie de l'algorithm est : $u = f - \mu\operatorname{div}(y_{\text{lim}})$.

Programmer cette méthode. Comparer sa vitesse de convergence avec les autres méthodes étudiées dans ce TP.