Restauration d'images

1 Introduction

Pour Matlab, une image de taille (m,n) est une matrice I de taille (m,n), et la valeur de $I(i,j)$ correspond à la valeur du niveau de gris de l'image au pixel (i,j).

Matlab est capable de lire a peu près tous les formats standards d'images.

On trouve des images au format *Matlab* dans le répertoire (pour trouver chemin_Matlab, faire which fft, par exemple) :

```
/chemin_Matlab/toolbox/matlab/demos
```

et des images au format *tiff* dans :

```
/chemin_Matlab/toolbox/images/imdemos
```

Exemples de visualisation :

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Chargement d'une image en Matlab:
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
load gatlin2;
% -> L'image est chargee dans la variable X
%Autres images:
%load clown; load gatlin; load mandrill;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Visualisation:
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
imagesc(X);
colormap gray;
%pour voir l'image en niveaux de gris
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Pour ouvrir une deuxieme figure:
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(2);
colormap gray;
XX=imread('cameraman.tif');
imshow(XX);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

2 Discrétisation

Une image numérique, ou discrète, est un tableau à deux dimensions de taille $N \times N$ [1]. On note X l'espace euclidien $\mathbb{R}^{N\times N}$, et $Y = X \times X$. On munit l'espace X du produit scalaire :

$$(u,v)_X = \sum_{1\leq i,j\leq N} u_{i,j} v_{i,j} \tag{1}$$

1. Pour simplifier les notations nous considérons des images carrés mais tout ce qui suit peut s'appliquer pour un tableau de taille $M \times N$ avec $M \neq N$

et de la norme :

$$\|u\|_X = \sqrt{(u,u)_X} \tag{2}$$

Pour définir une variation totale discrète, on introduit d'abord une version discrète de l'opérateur gradient. Si $u \in X$, le gradient ∇u est un vecteur de Y donné par :

$$(\nabla u)_{i,j} = ((\nabla u)^1_{i,j}, (\nabla u)^2_{i,j}) \tag{3}$$

avec

$$(\nabla u)^1_{i,j} = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & \text{si } i < N \\ 0 & \text{si } i = N \end{cases} \tag{4}$$

et

$$(\nabla u)^2_{i,j} = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & \text{si } j < N \\ 0 & \text{si } j = N \end{cases} \tag{5}$$

Cela correspond à l'hypothèse que l'image est étendue par symétrie hors du cadre $N \times N$. La variation totale discrète de u est alors donnée par :

$$J(u) = \sum_{1 \leq i,j \leq N} \|(\nabla u)_{i,j}\|_2 \tag{6}$$

C'est-à-dire la somme des normes des vecteurs (de dimension 2) formant le champ de vecteur "gradient de l'image".

On introduit également une version discrète de l'opérateur divergence. On le définit par analogie avec le cadre continu en posant :

$$\text{div } = -\nabla^* \tag{7}$$

où ∇^* est l'opérateur adjoint de ∇ : i.e., pour tout $p \in Y$ et $u \in X$, $(-\text{div}\, p, u)_X = (p, \nabla u)_Y$. Il est aisé de vérifier que :

$$(\text{div}\,(p))_{i,j} = \begin{cases} p^1_{i,j} - p^1_{i-1,j} & \text{si } 1 < i < N \\ p^1_{i,j} & \text{si i=1} \\ -p^1_{i-1,j} & \text{si i=N} \end{cases} + \begin{cases} p^2_{i,j} - p^2_{i,j-1} & \text{si } 1 < j < N \\ p^2_{i,j} & \text{si j=1} \\ -p^2_{i,j-1} & \text{si j=N} \end{cases} \tag{8}$$

Nous utiliserons aussi une version discrète de l'opérateur Laplacien définie par :

$$\Delta u = \text{div}\,\nabla u \tag{9}$$

Vous pouvez récupérer ces opérateurs à l'adresse `http://perso.telecom-paristech.fr/~ladjal/TPMVA/TP3/opdiff_TP3.zip`

Pour tester ces opérateurs, choisir une image, puis visualiser son gradient vertical, horizontal, la norme de son gradient, son laplacien.

3 Restauration de Tychonov

On considère le problème :

$$\inf_u \|f - u\|^2_X + \lambda \|\nabla u\|^2_X \tag{10}$$

(La notation $\|\nabla u\|^2_X$ signifie que l'on fait la somme des normes au carré de tous les vecteurs du champ de vecteur ∇u)

3.1 Résolution par descente de gradient

Dans le but de minimiser la fonctionnelle ci-dessus nous voulons effectuer une décente de gradient. Pour calculer le gradient d'une telle fonctionnelle, on utilise le calcul des variations. Voici un exemple pour le terme $\|\nabla u\|_X^2$ (on note Ω la partie de $\mathbb{R}^2$ que couvre l'image)

$$\|\nabla u\|_X^2 = \int_\Omega < \nabla u(x) | \nabla u(x) > dx = (\nabla u, \nabla u)_Y = (-\mathrm{div}\, \nabla u, u)$$

La dernière égalité est obtenue par dualité. En remplaçant u par $u + \delta u$ et en développant on obtient les 4 termes suivants

$$(-\mathrm{div}\, \nabla u, u) + (-\mathrm{div}\, \nabla \delta u, u) + (-\mathrm{div}\, \nabla u, \delta u) + (-\mathrm{div}\, \nabla \delta u, \delta u)$$

Le dernier terme est négligeable si δu est petit et le premier correspond à la partie constante. Par ailleurs le laplacien est autoadjoint car produit d'un opérateur par son adjoint. Les deux termes du milieu sont donc égaux. Il vient que la variation de la quantité $\|\nabla u\|_X^2$ lorsque u varie de δu est, au premier ordre

$$-2(\Delta u, \delta u)$$

C'est donc le produit scalaire de δu par (-2 fois) le laplacien. Le gradient de cette fonctionnelle est donc $-2\Delta u$.

Après avoir calculé le gradient complet de la fonctionnelle (10) calculer son minimum par une méthode de gradient à pas constant.

3.2 Résolution par transformée de Fourier

On rappelle que la TFD d'une image discrète $(f(m,n))$ $(0 \leq m \leq N-1$ et $0 \leq n \leq N-1)$ est donnée par $(0 \leq p \leq N-1$ et $0 \leq q \leq N-1)$:

$$\mathcal{F}(f)(p,q) = F(p,q) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) e^{-j(2\pi/N)pm} e^{-j(2\pi/N)qn} \tag{11}$$

et la transformée inverse est :

$$f(m,n) = \frac{1}{N^2} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} F(p,q) e^{j(2\pi/N)pm} e^{j(2\pi/N)qn} \tag{12}$$

On a de plus $\|\mathcal{F}(f)\|_X^2 = N^2 \|f\|_X^2$ et $(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g))_X = N^2 (f,g)_X$.

On peut montrer que [2] :

$$\|\mathcal{F}(\nabla f)\|^2 = \sum_{p,q} |\mathcal{F}(\nabla f)(p,q)|^2 = \sum_{p,q} 4 \left|\mathcal{F}(f)(p,q)\right|^2 \left(\sin^2 \frac{\pi p}{N} + \sin^2 \frac{\pi q}{N} \right) \tag{13}$$

En utilisant l'identité de Parseval, en déduire que la solution u de (10) vérifie :

$$\mathcal{F}(u)(p,q) = \frac{\mathcal{F}(f)(p,q)}{1 + 4\lambda \left(\sin^2 \frac{\pi p}{N} + \sin^2 \frac{\pi q}{N} \right)} \tag{14}$$

Coder cette nouvelle version. Attention, avant d'effectuer la transformée de Fourier d'une image, il vaut mieux la prolonger par symmétrie.

2. En effet une dérivation discrète est une convolution, et il n'y a plus qu'à constater que la TFD (en module au carré) du noyau de dérivation est de la forme $\sin^2 \frac{\pi q}{N}$

4 Régularisation ϕ

4.1 Débruitage

On considère le problème :

$$\inf_u \|f-u\|_X^2 + \lambda \int \phi(|\nabla u|) \tag{15}$$

Calculer le gradient de la fonctionnelle.
Calculer le minimum par une méthode de descente de gradient.
Faire des tests avec : $\phi(t)=t$, $\phi(t)=\frac{t^2}{1+t^2}$, $\phi(t)=\log(1+t^2)$, $\phi(t)=2\sqrt{1+t^2}-2$.
Tester les différents choix de fonctions ϕ en débruitage. Commentaires ?

4.2 Déconvolution (optionnelle)

On considère le problème :

$$\inf_u \|f-Au\|_X^2 + \lambda \int \phi(|\nabla u|) \tag{16}$$

Même questions que précédemment (pour le applications numériques, on prendra pour A un noyau gaussien).