MDI 103 (Analyse fonctionnelle et de Fourier)

Enseignants : Olivier Fercoq, Yann Gousseau, Saïd Ladjal, David Madore, François Portier

2016-2017

Table des matières

Chapitre 1

Conventions, notations et rappels

1.1 Complétion de $\mathbb{R}$

1.1.1 Min, max, sup, inf, limites de suites

Nous noterons $\overline{\mathbb{R}}$ la droite réelle complétée par $+\infty$ et $-\infty$:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} ,$$

avec $-\infty < x < +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par suite on pose

$$\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \quad \text{et} \quad \overline{\mathbb{R}}_- = \mathbb{R}_- \cup \{-\infty\} .$$

La complétion de $\mathbb{R}$ permet d'écrire de nombreux résultats sans avoir à distinguer les cas avec limite/supremum/infimum finis de ceux où ils sont infinis. On rappelle les définitions des supremum et infimum étendues sur $\overline{\mathbb{R}}$: pour tout sous-ensemble I de $\overline{\mathbb{R}}$, le supremum de I, noté $\sup I$, est l'unique élément x de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que

(i) x est un majorant de I : $y \in I \Rightarrow y \leq x$,

(ii) Il n'y a pas de majorant strictement inférieur à x : $y < x \Rightarrow \exists z \in I,\ z > y$.

L'infimum, noté $\inf I$, est défini de façon similaire en inversant les inégalités, ou bien en posant $\inf I = -\sup(-I)$. On a en particulier

$$\inf \emptyset = +\infty \quad \text{et} \quad \sup \emptyset = -\infty .$$

Quand $\sup I$ (resp. $\inf I$) appartient à I, on peut aussi l'appeler *maximum* (resp. minimum) de I et le noter $\max I$ (resp. $\min I$). On utilisera aussi les symboles $\vee$ et $\wedge$) pour l'opération induite par max et min entre deux nombres :

$$a \vee b = \max\{a, b\} \quad \text{et} \quad a \wedge b = \min(a, b) .$$

Soit $u = (u_n)$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. Si (u_n) admet une limite quand $n \to \infty$ on note

$$\lim_{n\to\infty} u_n \quad \text{ou} \quad \lim_n u_n \quad \text{ou} \quad \lim u$$

cette limite. Si (u_n) est une suite monotone et ℓ est sa limite on écrira

$$u_n \uparrow \ell \quad \text{ou} \quad u_n \downarrow \ell ,$$

suivant que (u_n) est croissante ou décroissante, respectivement. On note d'autre part, pour tout ensemble $I \subset \mathbb{N}$,

$$\sup_{n\in I} u_n \quad \text{ou} \quad \sup_I u = \sup\{u_n\ ,\ n \in I\} .$$

Si $I = \mathbb{N}$, on écrira aussi plus simplement $\sup_n u_n$ ou $\sup u$. Si la limite de (u_n) n'est pas toujours définie, on peut en revanche toujours définir

$$\liminf_{n\to\infty} u_n = \liminf_n u_n = \liminf u = \lim_n \inf_{p\geq n} u_p$$

$$\text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} u_n = \limsup_n u_n = \limsup u = \lim_n \sup_{p\geq n} u_p \ .$$

De plus (u_n) admet une limite ssi $\liminf u = \limsup u$, auquel cas, c'est aussi $\lim u$.

1.1.2 Sommes finies et infinie

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ indexée par un ensemble I quelconque. Si I est de cardinal fini, $\sum_{i\in I} x_i$ est correctement défini dans $\overline{\mathbb{R}}$ dès lors que (x_i) ne prend pas à la fois les valeurs $-\infty$ et $+\infty$. Pour un I quelconque, si $(x_i)_{i\in I}$ est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, on définit

$$\sum_{i\in I} x_i = \sup \left\{ \sum_{i\in J} x_i \mid J \subset I \text{ de cardinal fini} \right\} \ .$$

On note les parties positives et négatives de $x \in \overline{\mathbb{R}}$ x_+ et x_- respectivement, c'est-à-dire,

$$x_+ = x \vee 0 = \max(x, 0) \quad \text{et} \quad x_- = (-x) \vee 0 = \max(-x, 0) \ .$$

Si $\sum_{i\in I} x_{n+} < \infty$ et $\sum_{i\in I} x_{n-} < \infty$, on dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est *absolument sommable* et on définit

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_{i+} - \sum_{i\in I} x_{i-} \ .$$

Si I est dénombrable alors pour toute suite (i_n) d'indices distincts recouvrant tout l'ensemble I, on a, pour toute famille $(x_i)_{i\in I}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ ou absolument sommable,

$$\sum_{i\in I} x_i = \lim_p \sum_{n=0}^{p} x_{i_n} \ .$$

En particulier, si $I = \mathbb{N}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \lim_p \sum_{n=0}^{p} x_n \ .$$

1.1.3 Extension des notations aux suites et familles de fonctions

Toutes les notations sur les suites et familles de nombres peuvent aussi être utilisées pour une suite ou famille de fonctions (f_n), du moment qu'elles sont toutes à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et définies sur le même ensemble X. Elles s'appliquent alors *ponctuellement*. Par exemple

1. $f \geq 0$ signifie $f(x) \geq 0$ pour tout x,
2. La suite de fonctions (f_n) est décroissante signifie que $(f_n(x))_n$ est une suite décroissante pour tout x,
3. f_+ désigne la fonction
$$f_+(x) = (f(x))_+ = \max(f(x), 0) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathsf{X} \ ,$$
4. $f_n \uparrow g$ signifie
$$f_n(x) \uparrow g(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathsf{X} \ ,$$

5. $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n = f$ signifie
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = f(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathsf{X}\ ,$$
6. etc.

Le type de convergence de fonctions ci-dessus s'appelle *converge ponctuelle*. Nous verrons d'autres types de convergence liés à l'intégrale de Lebesgue : convergence presque partout (p.p.), convergence L^1, etc.

1.2 Applications et ensembles

1.2.1 Fonction indicatrice, image réciproque

Soit A un sous-ensemble de X. On note $\mathbb{1}_A$ et on appelle *fonction indicatrice* de l'ensemble A l'application définie sur X par
$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon ,} \end{cases} \quad \text{pour tout } x \in \mathsf{X}\ .$$

Soit f une application de X dans Y. Soit $A \subseteq \mathsf{Y}$. On note $f^{-1}(A)$ l'*image réciproque* de A par f définie par
$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathsf{X} \,|\, f(x) \in A\}\ .$$
La notation $\{f \in A\}$ désignera aussi l'ensemble $f^{-1}(A)$ et $\{f = y\}$ l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ pour $y \in \mathsf{Y}$. De même $\{f = g\}$ désigne l'ensemble $\{x \in \mathsf{X} \,|\, f(x) = g(x)\}$ pour une autre application g de X dans Y, etc. En particulier la fonction $\mathbb{1}_{f=0}$ désigne l'application définie sur X définie par
$$\mathbb{1}_{\{f=0\}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) = 0 \\ 0 & \text{sinon ,} \end{cases} \quad \text{pour tout } x \in \mathsf{X}\ .$$

1.2.2 Opération sur les suites et familles d'ensembles

Pour tout ensemble X on note $\mathcal{P}(\mathsf{X})$ l'ensemble des parties de X.

Soit $A = (A_n)_{n\in I}$ une famille de sous-ensembles d'un même ensemble X avec I ensemble quelconque. On note
$$\bigcup_{n\in I} A_n = \{x \in \mathsf{X} \,|\, \exists n \in I,\, x \in A_n\}\ . \quad \text{et} \quad \bigcap_{n\in I} A_n = \{x \in \mathsf{X} \,|\, \forall n \in I,\, x \in A_n\}\ .$$
Si $I = \mathbb{N}$, on note
$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \liminf_n A_n = \liminf A = \bigcup_n \bigcap_{p\geq n} A_p$$
$$\text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \limsup_n A_n = \limsup A = \bigcap_n \bigcup_{p\geq n} A_p\ .$$
Si (A_n) est une suite monotone d'ensembles on notera
$$A_n \uparrow B \quad \text{ou} \quad A_n \downarrow B\ ,$$
suivant que (A_n) est croissante ($A_n \subseteq A_{n+1}$ pour tout n) ou décroissante ($A_n \supseteq A_{n+1}$ pour tout n), respectivement. Dans le premier cas, $B = \bigcup_n A_n$, et dans le second $B = \bigcap_n A_n$.

Pour $n \geq 1$ ensembles A_1, ..., A_n, on note $A_1 \times \cdots \times A_n$ l'*ensemble produit* des n-uplet à composantes dans A_1, ..., A_n :

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in A_i \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n\} \ .$$

Plus généralement, pour une famille $(A_i)_{i \in I}$ (non nécessairement finie ni même dénombrable), on notera

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(x_i)_{i \in I} \,|\, x_i \in A_i \text{ pour tout } i \in I\}$$

l'espace produit des familles indexé par I à valeurs dans les (A_i).

1.3 Conventions relatives aux vecteurs

1.3.1 Vecteurs et matrices

Soit p un entier strictement positif. Par convention, on identifie les éléments de $\mathbb{R}^p$ (ou $\mathbb{C}^p$) aux vecteurs colonnes, c'est-à-dire aux matrices de taille $p \times 1$.

Pour une matrice A on note A^T sa matrice transposée et A^H sa matrice transposée conjuguée. Ainsi :

1. si $x \in \mathbb{R}^p$, on note x^T le *vecteur ligne* correspondant,
2. Pour x et y dans $\mathbb{R}^p$, $x^T y$ désigne le produit scalaire euclidien entre x et y,
3. Pour x et y dans $\mathbb{C}^p$, $x^H y$ désigne le produit hermitien entre x et y.

On notera $|x|$ la norme euclidienne de x,

$$|x| = (x^H x)^{1/2}$$

quelque soit la dimension de x.

1.3.2 Fonctions définies sur $\mathbb{R}^p$, dérivées partielles, différentiabilité

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit α un vecteur d'entiers positif (appelé *multiindice*), $\alpha \in \mathbb{N}^p$. On note, pour $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p} \ . \tag{1.1}$$

On note d'autre part ∂_i la dérivée partielle par rapport à la i-ème coordonnées et $\partial = (\partial_1, \ldots, \partial_p)$. Par suite, on note $\partial^\alpha f$ la dérivée partielle de f obtenue en dérivant $f(x_1, \ldots, x_p)$ α_1 fois par rapport à x_1, α_2 fois par rapport à x_2, ..., α_p fois par rapport à x_p :

$$\partial^\alpha f(x_1, \ldots, x_p) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{\alpha_p} f(x_1, \ldots, x_p) \ . \tag{1.2}$$

Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, cette définition est appliquée à chaque composante de f si bien que $\partial^\alpha f$ est aussi une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^q$.

Dans un premier temps, nous appliquerons ∂^α à f en x uniquement si f est α^* fois continûment différentiable dans un voisinage de x, où l'on a noté

$$\alpha^* = \sum_{i=1}^p \alpha_i \ . \tag{1.3}$$

On rappelle que, dans le cas $p = 1$, une fonction f est k fois continûment dérivable sur un sous-ensemble ouvert Ω de $\mathbb{R}$ si elle est k fois dérivable sur Ω et que $f^{(k)}$ est continue sur Ω.

Pour $p > 1$, il faut passer par la notion de *différentielle*, qui permet au passage de montrer que l'ordre dans lequel les dérivations successives sont calculées dans le membre de droite de (1.2) ne change pas le résultat.

Définition 1.1 (Différentiabilité)**.** *Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$. On dit que f est* différentiable *en $x \in \Omega$ s'il existe une fonction $D_x f$ linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ telle que, lorsque $y \to x$,*

$$f(y) = f(x) + D_x(f)\,(y - x) + o(|y - x|)\ .$$

Si f est différentiable en tout point $x \in \Omega$ et que l'application $x \mapsto D_x f$ de Ω dans $\mathbb{R}^{q\times p}$ est continue sur Ω, on dit que f est continûment différentiable *sur Ω.*

Ainsi pour $p = 1$, on a $D_x(f)\,(z) = f'(x)\,z$. Plus généralement pour $p \geq 1$ l'application linéaire $D_x(f)$ peut s'écrire comme un produit scalaire, il existe une matrice $\nabla f(x)$ telle que

$$D_x(f)\,(z) = [\nabla f(x)]^T z\ .$$

Si $q = 1$, $\nabla f(x)$ est un vecteur et est appelé *gradient* de f en x.

Le théorème suivant permet de caractériser facilement les fonctions continûment différentiables.

Théorème 1.2. *Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) La fonction f est continûment dérivable par rapport à chacune de ses variables, i.e. les dérivées partielles $\partial^{\epsilon_i} f$ existent et sont continues sur Ω pour les multiindices canoniques $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p$ (qui vérifient $|\epsilon_i| = 1$ et ϵ_i a une i-ième composante non-nulle).

(ii) La fonction f est continûment différentiable *sur Ω.*

De plus on a alors, pour tout $x \in \Omega$ et $z \in \mathbb{R}^p$,

$$\nabla f(z) = \partial f(x) \quad \text{où} \quad \partial f = \left[\ \partial^{\epsilon_1} f \quad \ldots \quad \partial^{\epsilon_p} f\ \right]^T\ .$$

Il se peut que la fonction $x \mapsto \nabla f$ puisse à son tour être différenciée en tant que fonction de Ω dans $\mathbb{R}^{p\times q}$, cette seconde différentielle est notée $D_x^2 f$. Par suite, on définit $D_x^n f$ pour $n = 1, 2, \ldots$ en itérant et on dit que f est n fois *continûment différentiable* sur Ω si la fonction $x \mapsto \nabla^n f(x)$ est continue en tant que fonction de Ω dans $\mathbb{R}^{q\times p^n}$.

On notera $\mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{R}^q)$, ou plus simplement $\mathcal{C}^n(\Omega)$ si $q = 1$, ou encore $\mathcal{C}^n$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur Ω, l'espace des fonctions *continûment différentiable* sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^q$.

Si $n = 0$, on notera simplement $\mathcal{C}$ au lieu de $\mathcal{C}^0$ (espace des fonctions continues).

Le sous–espace des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ telles que $f(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$ est noté $\mathcal{C}_o$.

Le sous–espace des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ nulles en dehors d'un intervalle borné est noté $\mathcal{C}_c$.

L'intersection de tous les $\mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{R}^q)$ quand n parcourt $\mathbb{N}$ sera noté $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^q)$ (espace des fonctions infiniment dérivables).

Il suit du théorème et des définitions précédentes que pour $p = 2$, si f est $\mathcal{C}^2$, l'ordre de dérivation par rapport à chacune des variables ne compte pas. Ce cas suffit pour écrire plus généralement le résultat suivant.

Théorème 1.3 (Théorème de Schwartz)**.** *Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$. Si f est $\mathcal{C}^n$ dans un voisinage de x, alors pour tout multiindice $\alpha \in \mathbb{N}^p$ tel que $\alpha^* = n$, l'ordre de dérivation utilisé pour calculé $\partial^\alpha f(x)$ par (1.2) ne modifie pas le résultat.*

Chapitre 2

Introduction à la topologie des espaces vectoriels normés

Dans ce chapitre nous étudions la topologie des espaces métriques et normés. Les espaces métriques sont la forme la plus simple d'espaces topologiques. Les espaces vectoriels normés sont des espaces vectoriels munis d'une métrique compatible avec leur structure d'espace vectoriel. Les espaces vectoriels normés permettent de généraliser des résultats de la dimension finie à la dimension infinie par approximations successives ou plus généralement d'un sous-espace simple (ou *concret* tels que l'espace des fonctions continues ou des polynômes trigonométriques) à un espace plus abstrait, plus difficiles à décrire (l'ensemble de toutes les fonctions intégrables par exemple).

Des bases de topologie dans le cadre des e.v.n. sont généralement connues du lecteurs : ensembles *ouverts*, *points adhérents*, ensembles *fermés*, et pour certains *suites de Cauchy*. Nous reprendrons néanmoins la définition de ces notions et leurs propriétés immédiates. Surtout, nous insistons sur l'importance du critère de Cauchy pour la convergence, et par suite, sur celle de la *complétude.*

2.1 Rappels sur les espaces métriques

2.1.1 Espaces métriques, ensembles ouverts et fermés

Définition 2.1 (Distances et espaces métriques)**.** *Soient X est un ensemble et d une fonction de $X \times X$ vers $\mathbb{R}_+$. On appelle d une* distance *et X muni de d un* espace métrique *si la fonction d vérifie les propriétés suivantes :*

(i) Pour tous $x, y \in X$, $\quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(propriété de* séparation*).*

(ii) Pour tous $x, y \in X$, $\quad d(x,y) = d(y,x)$ *(propriété de* symétrie*).*

(iii) Pour tous $x, y, z \in X$, $\quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(*inégalité triangulaire*).*

Et il découle de l'inégalité triangulaire ce que l'on appelle parfois la seconde inégalité triangulaire

$$\text{pour tous } x, y, z \in X, \quad d(x,z) \geq |d(x,y) - d(y,z)| \; . \tag{2.1}$$

Elle est aussi utile que la première et autant la retenir plutôt que de la retrouver à chaque fois. Il n'y a à prouver que le fait que la seconde inégalité triangulaire découle des autres propriétés. Pour trouver cette seconde inégalité, on fixe x, y, z et en application de l'inégalité triangulaire avec le triplet pris dans l'ordre x, z, y on a

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = d(x,z) + d(y,z) \; ,$$

d'où

$$d(x,z) \geq d(x,y) - d(y,z) \ .$$

En inversant les rôles de x et z et en utilisant la symétrie on trouve

$$d(x,z) \geq d(y,z) - d(x,y) \, .$$

On obtient donc (2.1) en prenant le maximum des deux minorations précédentes.

Définition 2.2 (Boule ouverte)**.** *On appelle* boule ouverte *de centre x et de rayon $r > 0$ l'ensemble*

$$B(x,r) = \{y \in X | d(x,y) < r\}$$

Définition 2.3 (Ensembles ouverts)**.** *Si X est un espace métrique pour la distance d, on appelle ouvert de X tout sous-ensemble $A \subset X$ qui vérifie la propriété suivante*

$$\textit{pour tout } x \in A, \textit{ il existe } r > 0 \textit{ t.q. } B(x,r) \subset A \ .$$

Autrement dit A contient une boule ouverte autour de chacun de ses points.

Toute boule ouverte est bien un ouvert suivant cette définition. En effet, $\forall y \in B(x,r), B(y, r - d(x,y)) \subset B(x,r)$ (par inégalité triangulaire).

Proposition 2.4 (Topologie des ouverts)**.** *Les ouverts vérifient les propriétés suivantes (on dit qu'ils forment une* topologie*)*

1. *L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est un ouvert.*
2. *L'ensemble X est un ouvert.*
3. *Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts (I peut être un ensemble infini) alors l'union de tous les A_i, $\cup_i A_i$ est un ouvert.*
4. *Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille* **finie** *d'ouverts (I est de cardinal fini) alors l'intersection des A_i, $\cap_i A_i$, est un ouvert.*

Si on note $\mathcal{T}$ l'ensemble des ensembles ouverts, on dit que $(X, \mathcal{T})$ forment un espace topologique. C'est une notion plus générale que celle d'espace métrique.

Démonstration. 1. Comme l'ensemble vide ne contient aucun point, il n'y a rien à démontrer.

2. Comme toute boule est incluse dans X, alors $\forall x \in X, \ B(x,1) \subset X$ et X est un ouvert.
3. Soit $x \in \cup_i A_i$, alors $\exists i \in I, \ x \in A_i$. Comme A_i est ouvert on a

$$\exists r > 0, \quad B(x,r) \subset A_i \subset \cup_i A_i$$

   et donc $\cup_i A_i$ est bien un ouvert.

4. Il est clair qu'il suffit de montrer cette propriété pour l'intersection de deux ouverts (le cas général s'obtient par récurrence car, rappelons le, seules les intersections **finies** d'ouverts sont considérées).

   Soit donc A et B deux ouverts et $x \in A \cap B$. Comme A et B contiennent des boules centrées en x, $B(x, r_a)$ et $B(x, r_b)$. On note $r_c = \min(r_a, r_b)$ le plus petit des deux rayons. Alors on a

$$B(x, r_c) = B(x, r_a) \cap B(x, r_b) \subset A \cap B \ ,$$

   ce qui prouve que $A \cap B$ est bien un ouvert.

□

Remarque 2.5. Un même ensemble X peut être muni de plusieurs distances. Pour chaque distance, l'espace métrique X change. Si la distance utilisée dans un raisonnement n'est pas évidente il faut la préciser en parlant de l'espace métrique (X, d). On peut donner l'exemple suivant.

L'ensemble X est l'intervalle $]0,1[$ et deux distances peuvent être définies par

$$d_1(x,y) = |x-y| \qquad d_2(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| .$$

On peut vérifier en exercice que toute fonction injective f sur $]0,1[$ définit une distance sur cet intervalle par $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$.

Toutes ces distances font de X différents espaces métriques. Néanmoins si f est continue la distance d définit les mêmes ouverts que d_1. On dit qu'elles définissent la *même topologie* sur X.

Proposition 2.6. *Tout ouvert d'un espace métrique est une union de boules ouvertes. De plus, il est clair qu'une union de boules ouvertes est un ouvert (car les boules ouvertes sont des ouverts). Ainsi, les ouverts d'un espace métrique sont exactement les unions de boules ouvertes.*

Démonstration. Soit O un ouvert. Pour tout $x \in O$, on note r_x le rayon d'une boule $B(x, r_x) \subset O$ (r_x existe par définition des ouverts). Considérons l'ensemble O' défini par

$$O' = \cup_{x \in O} B(x, r_x).$$

$O' \subset O$ car toutes les boules $B(x, r_x)$ sont incluses dans O et leur union aussi.

$O \subset O'$ car pour tout $x \in O$, $x \in B(x, r_x) \subset O'$.

Donc $O = O'$ qui est une union de boules ouvertes. □

Définition 2.7 (Ensembles fermés)**.** *On dit qu'un sous-ensemble $A \subset X$ d'un espace métrique est un fermé si son complémentaire est ouvert. Cela s'écrit*

$$\forall x \notin A, \quad \exists r > 0, \quad B(x,r) \cap A = \emptyset$$

Comme le complémentaire d'une intersection est l'union des complémentaires et que le complémentaire d'une union est l'intersection des complémentaires, on déduit aisément le résultat suivant.

Proposition 2.8. *On a les propriétés suivantes :*

1. *L'ensemble vide et X sont des fermés.*
2. *Une intersection quelconque de fermés est un fermé.*
3. *Une union* **finie** *de fermés est un fermé.*

La propriété 2 de la proposition 2.8 permet de définir la notion de *plus petit fermé* contenant un ensemble A donné. On remarque en effet que

$$\bigcap_{O \in \mathcal{T} \,:\, A \subseteq O^c} O^c$$

est un fermé et qu'il est inclus dans tous les fermés contenant A.

Définition 2.9 (Fermeture, intérieur)**.** *Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique (X, d). On appelle* fermeture *de A et on note $\overline{A}$ le plus petit fermé contenant A :*

$$\overline{A} = \bigcap_{O \in \mathcal{T} \,:\, A \subseteq O^c} O^c .$$

On appelle intérieur *de A et on note $\mathring{A}$ le plus grand ouvert inclus dans A :*

$$\mathring{A} = \bigcup_{O \in \mathcal{T} \,:\, O \subseteq A} O .$$

Ceci nous permet de définir le *support* d'une application.

Définition 2.10 (Support d'une application)**.** *Soit f une application d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ dans un espace vectoriel F. Le* support *de f est défini comme le* plus petit fermé *contenant l'ensemble $\{f \neq 0\}$. On le notera*

$$\mathrm{Supp} f = \overline{\{f \neq 0\}} \, .$$

2.1.2 Suites et continuité

Définition 2.11 (Suite convergente)**.** *Soient (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X et $x \in X$ un élément de X. On dit que la suite (x_n) converge vers x dans (X, d) si*

$$\textit{pour tout } \epsilon > 0, \textit{ il existe } N \in \mathbb{N} \textit{ tel que pour tout } n \geq N, \, d(x_n, x) \leq \epsilon \, .$$

Ou, dit autrement,

$$\textit{pour tout } \epsilon > 0, \textit{ l'ensemble } \{n | x_n \notin B(x, \epsilon)\} \textit{ est de cardinal fini.}$$

On dit que (x_n) tend vers x. On peut aussi dire "la suite (x_n) est convergente" (sans préciser sa limite).

Il est clair que si une suite (x_n) est convergente, il y a **unicité de la limite**, car si x et y sont limites alors $d(x, y) \leq 2\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$, donc $d(x, y) = 0$ et finalement $x = y$ (par la propriété de séparation).

Définition 2.12 (Sous–suite)**.** *Si (x_n) est une suite de X et ϕ une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même. On dit que la suite (y_n) définie par*

$$y_n = x_{\phi(n)}, \quad n \in \mathbb{N} \, ,$$

est une sous–suite de la suite (x_n).

Les sous–suites héritent de la même limite que la suite d'origine, si elle converge. La preuve du résultat suivant est laissée à titre d'exercice.

Proposition 2.13. *Toute sous-suite d'une suite convergente est une suite convergente et tend vers la même limite.*

Nous pouvons maintenant introduire la notion de continuité pour les applications entre espaces métriques.

Définition 2.14 (Applications continues)**.** *On se donne deux espaces métriques X et Y munis des distances d_X et d_Y respectivement. On dit que la fonction f définie de X vers Y est continue si pour toute suite (x_n) convergente d'éléments de X, qui a pour limite x, la suite $(f(x_n))$ d'éléments de Y converge vers $f(x)$.*

Cette définition peut se caractériser différemment, en ne se reportant qu'à la topologie de l'espace métrique.

Proposition 2.15. *Si X et Y sont des espaces métriques et que f est une fonction de X vers Y. Il y a équivalence entre :*

(i) La fonction f est continue.

(ii) Pour tout ensemble ouvert O de Y l'ensemble $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X.

(iii) Pour tout ensemble fermé F de Y l'ensemble $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.

Démonstration. Les deux derniers points sont équivalents car $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$ (A^c désigne le complémentaire de l'ensemble A)

Prouvons que *(i)* implique *(ii)*. Soit O un ouvert de Y et $x \in f^{-1}(O)$. Comme O est ouvert, il existe ϵ tel que $B(f(x), \epsilon) \subset O$.

Si la boule $B(x, 1/n)$ n'est pas incluse dans $f^{-1}(O)$ cela signifie qu'il existe un point $x_n \in X$ tel que $d(x, x_n) \leq 1/n$ et $d(f(x_n), f(x)) \geq \epsilon$ (car $f(x_n) \notin O \supset B(f(x), \epsilon)$). Si pour tout $n > 0$, la boule $B(x, 1/n)$ n'est pas incluse dans l'image réciproque de O alors la suite (x_n) converge vers x et la suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(x)$. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse que f est continue. Donc

$$\exists N > 0,\ B(x, \frac{1}{N}) \subset f^{-1}(O)$$

ce qui montre que $f^{-1}(O)$ est un ouvert.

Enfin, on montre que *(ii)* implique *(i)*. Soit (x_n) une suite de X qui converge vers x, il nous faut montrer que $(f(x_n))$ tend vers $f(x)$ (avec le point *(ii)* comme hypothèse). Soit $\epsilon > 0$. On considère la boule $B_\epsilon = B(f(x), \epsilon)$ et son image réciproque $C_\epsilon = f^{-1}(B_\epsilon)$. Par hypothèse C_ϵ est ouvert et contient x. Il contient donc une boule autour de x et comme (x_n) tend vers x, les x_n rentrent dans cette boule (et donc dans C_ϵ) à partir d'un certain rang. Par définition de C_ϵ cela implique que les $f(x_n)$ rentrent dans la boule $B(f(x), \epsilon)$ à partir d'un certain rang, ce qui conclut la preuve de la convergence de $(f(x_n))$ vers $f(x)$. □

Proposition 2.16 (Caractérisation séquentielle des fermés)**.** *Il est équivalent de dire que F est fermé ou que pour toute suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ qui converge vers un point x, on a $x \in F$.*

Démonstration. On suppose que F est fermé (*i.e.* son complémentaire est ouvert) et que la suite (x_n) prise dans F converge vers x et on montre qu'alors $x \in F$. La boule $B(x, 1/n)$ contient au moins un élément de F pour tout $n \geq 1$. Il n'y a donc aucune boule de centre x et de rayon non nul qui soit incluse dans le complémentaire de F. Donc x n'est pas dans le complémentaire de F (qui est ouvert).

On suppose maintenant que toute suite (x_n) prise dans F qui converge a sa limite dans F. On va montrer que le complémentaire de F est ouvert. Soit donc, $x \in F^c$. Si $B(x, 1/n) \cap F$ est non vide, on prend x_n dans cette intersection. Si toutes les intersections (pour $n > 0$) sont non vides alors on a construit une suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ qui tend vers $x \in F^c$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. On en déduit que l'une des intersections est vide, *i.e.* qu'il existe une boule centrée en x qui ne rencontre pas F, *i.e.* F^c est ouvert. □

Proposition 2.17 (Caractérisation séquentielle de la fermeture)**.** *Soit E un sous-ensemble d'un espace métrique (X, d). Alors la fermeture de E s'obtient en prenant tous les éléments de X qui s'écrivent comme une limite d'éléments de E :*

$$\overline{E} = \left\{ x \in X\ ,\ \exists (x_n) \in E^{\mathbb{N}},\ \lim_n x_n = x \right\}\ . \tag{2.2}$$

Démonstration. Notons F l'ensemble défini dans la partie droite de l'égalité (2.2) à démontrer.

Comme $\overline{E}$ est un fermé et contient E, il doit au moins contenir les éléments de X qui s'écrivent comme une limite d'éléments de E. Ceci vient de la caractérisation séquentielle des fermés (proposition 2.16). Donc $F \subseteq \overline{E}$.

Comme $\overline{E}$ est le plus petit fermé contenant E, pour conclure, il suffit donc de montrer que F est fermé. Si y_n est une suite de F qui converge vers y, on choisit $x_n \in E$ tel que $d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$. Alors $x_n \to y$ et donc $y \in F$.

□

2.2 Les espaces vectoriels normés

Les distances que nous considérerons seront issues de "normes", ce qui permet de lier distance et opérations d'espaces vectoriels (addition et multiplication par un scalaire).

2.2.1 Définitions

Définition 2.18 (Espace vectoriel normé (e.v.n.))**.** *Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une application $\|\cdot\| : x \mapsto \|x\|$, de E dans $\mathbb{R}^+$, est une* norme *sur E si*

(i) pour tout $x \in E$, $\|x\| \geq 0$,

(ii) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,

(iii) pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in K$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,

(iv) pour tout $(x, y) \in E \times E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

On dit que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé*. On abrégera espace vectoriel normé en* e.v.n.*.*

La fonction $d : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance. L'espace (E, d) est un espace métrique. On dit que d est la distance *associée* à la norme $\|\cdot\|$.

Remarquons que, comme précédemment, l'inégalité $\|x-y\| \geqslant |\|x\| - \|y\||$ découle de l'inégalité triangulaire.

Les exemples classiques d'e.v.n. de dimension finie sont $\mathbb{R}^p$ ou $\mathbb{C}^p$ munis des normes usuelles telles que la norme max ou encore la norme euclidienne. Nous donnons ci-dessous deux exemples simples d'e.v.n. de dimension infinie.

Exemple 2.19 (Espace des suites réelles ou complexes sommables (ℓ^1))**.** On note $\ell^1(\mathbb{Z})$, ou simplement ℓ^1, l'espace des suites réelles ou complexes $u = (u_n)$ indexées sur $n \in \mathbb{Z}$ telles que

$$\|u\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n| < \infty .$$

On vérifie aisément que $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ est un e.v.n. de dimension infinie.

2.2.2 Continuité des applications linéaires et bilinéaires

Il suit des définitions précédentes une caractérisation très simple de la continuité pour les applications linéaires. Le résultat suivant n'a un intérêt que si E est de dimension infinie, puisque sinon, toute application linéaire définie sur E est continue.

Théorème 2.20. *Une application linéaire f entre deux e.v.n. E et F est continue si et seulement si il existe une constante $C \geq 0$ telle que*

$$\textit{pour tout } x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant C\,\|x\|_E . \tag{2.3}$$

Démonstration. Si on suppose que f est continue alors $f^{-1}(B_F(0, 1))$ est un ouvert de E qui contient 0. Donc, il existe un réel strictement positif r tel que $B_E(0, r) \subset f^{-1}(B_F(0, 1))$. Mais si x est un élément de E (non nul) alors $(0.5\,r/\|x\|)x$ appartient à $B_E(0, r)$. Donc

$$\left\| f\left(\frac{r}{2\|x\|}x\right)\right\|_F \leqslant 1 \Rightarrow \|f(x)\| \leqslant \frac{2\|x\|}{r} \text{ par linéarité de f .}$$

On a donc démontré le sens directe de l'implication (en prenant $C = 2/r$).

Montrons maintenant la réciproque. On suppose que (2.3) est vérifié pour un $C > 0$. Soit une suite (x_n) qui tend vers x dans E alors

$$\|f(x_n) - f(x)\|_F = \|f(x_n - x)\|_F \leqslant C\,\|x_n - x\|_E$$

et donc $f(x_n)$ tend vers $f(x)$ et f est continue (critère séquentiel de continuité). (la première égalité fait intervenir la linéarité de f, d'où cette caractérisation très simple de la continuité pour une application linéaire). □

Ce résultat permet de définir une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{A}(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F. (la vérification des propriétés de norme sont laissées au lecteur).

Définition 2.21 (Norme opérateur)**.** *Soit une application linéaire continue f entre deux e.v.n. E et F. On définit la norme de f par*

$$\|f\|_{\mathcal{A}(E,F)} = \inf\left\{C \mid \|f(x)\|_F \leqslant C\,\|x\|_E \textit{ pour tout } x \in E\right\} .$$

Si f et g sont deux applications linéaires continues de E dans F et de F dans G, on obtient

$$\|g \circ f\|_{\mathcal{A}(E,G)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(E,F)}\ \|g\|_{\mathcal{A}(F,G)} .$$

Si maintenant f est une application linéaire continue *bijective* entre deux e.v.n. E et F, de réciproque f^{-1} continue [1], alors

$$\|f^{-1}\|_{\mathcal{A}(E,F)} \times \|f\|_{\mathcal{A}(E,F)} \geq 1 .$$

Dans un e.v.n., se pose la question du choix de la norme (qui influence la notion de topologie et de convergence). La définition suivante permet de réduire sensiblement le nombre des possibilités.

Définition 2.22 (Équivalence de normes)**.** *Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un espace vectoriel E sont dites équivalentes entre elles s'il existe $A, B > 0$ tels que*

$$\textit{pour tout } x \in E,\ A\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant B\|x\|_1.$$

En prenant $A = B = 1$ on constate que cette relation est réflexive. En prenant $1/A$ et $1/B$ on constate qu'elle est symétrique. Et considérant trois normes reliées par les coefficients (A, B) et (A', B') et en considérant (AA', BB'), elle est transitive. C'est donc bien une relation d'équivalence (comme son nom l'indique).

Remarque 2.23. On peut vérifier que les deux distances que nous avons introduites sur $]0, +\infty[$, à savoir $d_1(x, y) = |x - y|$ et $d_2(x, y) = |1/x - 1/y|$ ont les mêmes boules ouvertes (et donc les mêmes fonctions continues et les mêmes suites convergentes) alors que l'on peut trouver des couples (x, y) tels que ces deux distances aient entre elles des rapports arbitraires. Par exemple, si on prend $x = 1/n$ et $y = 1/(n + 1)$ alors $d_1(x, y)/d_2(x, y)$ tend vers 0 alors qu'en prenant $x = n$ et $y = n + 1$ ce même rapport tend vers l'infini. Ces deux distances ne sont donc pas équivalentes au sens de la définition ci-dessus.

La proposition qui suit montre que pour un e.v.n., deux normes définissent les mêmes ouverts revient à dire que ces normes sont équivalentes. Cela est dû au fait que l'on a défini les normes comme étant des distances compatibles avec les opérations d'espace vectoriel (invariance par translation et proportionnalité lors de la multiplication par un scalaire).

Proposition 2.24. *Deux normes sur un même espace vectoriel définissent une même topologie si et seulement si elles sont équivalentes.*

1. En effet, l'inverse d'une application linéaire continue et bijective n'est pas forcément continue. Par contre un théorème qui dépasse le cadre de ce cours permet d'affirmer que si E et F sont complets et que f est linéaire bijective alors f^{-1} est aussi continue.

Démonstration. Dire que les deux normes définissent la même topologie signifie qu'elles ont les mêmes ouverts.

On commence par supposer que les deux topologies sont les mêmes et on veut montrer que les normes sont équivalentes. On considère l'application identité entre E et lui-même. Cette application est continue lorsque l'on munit le E de départ de la topologie induite par la norme $\|.\|_1$ et le E d'arrivé par la topologie induite $\|.\|_2$ car $I^{-1}(O) = O$ et si O est ouvert alors il est ouvert pour les deux topologies par hypothèse. De plus I est linéaire. Donc il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$\|x\|_2 = \|I(x)\|_2 \leqslant C\|x\|_1 .$$

En agissant symétriquement on obtient que les deux normes sont équivalentes.

Maintenant, on suppose que les deux normes sont équivalentes et on veut montrer qu'elles induisent la même topologie.

Dire que les normes sont équivalentes c'est exactement dire que l'application identité est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_2)$ (et réciproquement). Cela implique que pour tout ouvert O pour $\|\cdot\|_2$ on a $I^{-1}(O)$ est un ouvert pour $\|\cdot\|_1$. Or, $I^{-1}(O) = O$. Donc tout ouvert pour $\|\cdot\|_2$ est un ouvert pour $\|\cdot\|_1$. En inversant le rôle des deux normes on montre que les deux topologies sont les mêmes (elles ont les mêmes ouverts). □

Dans les espaces de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et le choix de la norme n'influence donc pas la topologie.

Il n'est pas difficile de munir le produit de 2 e.v.n. d'une norme.

Définition 2.25 (Produit d'e.v.n.)**.** *Si F et G sont des e.v.n., on définit sur l'espace vectoriel $F \times G$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par*

$$\|(f, g)\|_{F\times G} = \max\left(\|f\|_F, \|g\|_G\right).$$

Alors $(F \times G, \|\cdot\|_{F\times G})$ est un e.v.n..

(Vérifier en exercice qu'il s'agit bien d'une norme).

Remarque 2.26*.* On aurait pu écrire

$$\|(f, g)\|_{F\times G} = \|f\|_F + \|g\|_G$$

ou encore

$$\|(f, g)\|_{F\times G} = \sqrt{\left(\|f\|_F^2 + \|g\|_G^2\right)}$$

Qui sont des normes équivalentes.

En effet :

$$\max\left(\|f\|_F, \|g\|_G\right) \leqslant \|f\|_F + \|g\|_G \leqslant 2\max\left(\|f\|_F, \|g\|_G\right)$$

et

$$\max\left(\|f\|_F, \|g\|_G\right) \leqslant \sqrt{\left(\|f\|_F^2 + \|g\|_G^2\right)} \leqslant \sqrt{2}\max\left(\|f\|_F, \|g\|_G\right)$$

L'ensemble des ouverts définis par ces normes est la plus petite collections d'ouverts qui contienne les $O_F \times O_G$ où O_F et O_G sont des ouverts de O_F et O_G. On dit que la topologie (l'ensemble des ouverts) de $F \times G$ est la topologie produit des deux espaces.

Cette définition va nous permettre d'aborder la continuité des applications bilinéaires sur un produit d'e.v.n..

Définition 2.27 (Application bilinéaire)**.** *Soit F, G et H trois espaces vectoriels normés. Une application T définie de $F \times G$ dans H est dite bilinéaire si* *(i)* $\forall f \in F$ *l'application de* G *dans* H *qui à* g *associe* $T(f,g)$ *est linéaire.*

(ii) $\forall g \in G$ *l'application de* F *dans* H *qui à* f *associe* $T(f,g)$ *est linéaire.*

Attention la fonction qui à $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ associe le produit xy est une application bilinéaire de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$. La bilinéarité est une notion différente de la linéarité sur l'espace produit.

Théorème 2.28 (Continuité des applications bilinéaires)**.** *Si* F, G *et* H *sont trois e.v.n. et que* T *est une application bilinéaire de* $F \times G$ *(muni de la norme définie ci-dessus) dans* H*. Il y a équivalence entre les 2 propositions suivantes :*

(i) T *est continue.*

(ii) $\exists A \geqslant 0, \forall (f,g) \in F \times G : \|T(f,g)\|_H \leqslant A.\|f\|_F \|g\|_G$

Attention, pour une application linéaire de $F \times G$ vers H le dernier terme de l'inégalité aurait été $A(\|f\|_F + \|g\|_G)$, ce qui donne une caractérisation différente.

Démonstration. Montrons d'abord l'implication de *(ii)* vers *(i)* en utilisant le critère séquentiel. Soit donc (f_n, g_n) une suite qui converge vers (f,g).

$$\begin{aligned} T(f_n,g_n) - T(f,g) &= T(f_n,g_n) - T(f,g_n) + T(f,g_n) - T(f,g) \\ &= T(f_n - f, g_n) - T(f, g_n - g) \\ &= T(f_n - f, g_n) - T(f_n - f, g) + T(f_n - f, g) - T(f, g_n - g) \\ &= T(f_n - f, g_n - g) + T(f_n - f, g) + T(f, g_n - g) \,. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse du point *(ii)*, on a

$$\|T(f_n,g_n) - T(f,g)\| \leqslant A.\left(\|f_n - f\|.\|g_n - g\| + \|f_n - f\|.\|g\| + \|g_n - g\|.\|g\|\right) \,.$$

Le membre de droite tend vers 0 lorsque (f_n, g_n) tend vers (f,g) et donc $T(f_n,g_n)$ tend bien vers $T(f,g)$. T est donc continue (par le critère séquentiel).

Montrons maintenant l'implication directe de *(i)* vers *(ii)*. Supposons que T est continue. $T^{-1}(B_H(0,1))$ est un ouvert qui contient 0. Il contient donc une boule (pour la norme de $F \times G$) autour de 0. Ceci s'écrit

$$\exists r > 0, \forall (f,g) \in F \times G, \|f\|_F < r \text{ et } \|g\|_G < r \Rightarrow \|T(f,g)\|_H < 1.$$

Par ailleurs, si $f = 0$ ou $g = 0$ alors $T(f,g) = 0$. Sinon, la bilinéarité de T permet d'écrire que

$$T(f.\frac{r}{2\|f\|}, g.\frac{r}{2\|g\|}) = \frac{r^2}{4\|f\|\|g\|} T(f,g)$$

et

$$\left\|(f.\frac{r}{2\|f\|}, g.\frac{r}{2\|g\|})\right\|_H = r/2 < r$$

Il vient donc que

$$\forall (f,g) \in F \times G : \|T(f,g)\|_H \leqslant A.\|f\|_F \|g\|_G$$

avec

$$A = \frac{4}{r^2}.$$

Ce qui conclut la preuve. □

2.2.3 Densité et séparabilité

Souvent, prouver des propriétés au sujet des éléments d'un e.v.n. passe par une démonstration plus facile pour certains points de cet espace (par exemple, les fonctions continues dans l'espace des fonctions intégrables) puis on conclut la démonstration par un argument de densité. La densité d'un sous-ensemble signifie que celui-ci approche d'aussi près que l'on veut n'importe quel point de l'espace.

La séparabilité (à ne pas confondre avec séparation) est une propriété qu'auront la plupart des e.v.n. étudiés dans la suite du cours, et qui signifie qu'une partie dénombrable de l'e.v.n. est dense. La séparabilité garantit la possibilité d'obtenir une "base" dénombrable de l'e.v.n. (on verra dans les compléments qu'un e.v.n. complet de dimension infinie ne peut pas avoir une base algébrique dénombrable). La séparabilité donne une base topologique dénombrable de manipulation presque aussi aisée qu'une base algébrique classique. Cette notion de base topologique sera abordée en détail lorsque l'on parlera de base hilbertienne.

Définition 2.29 (Densité)**.** *Soit E un e.v.n. et A un sous-ensemble de E. On dit que A est dense dans E si*

$$\text{pour tous } x \in E \text{ et } \epsilon > 0, \text{ il existe } y \in A \text{ tel que } \|x - y\| \leqslant \epsilon \, .$$

Définition 2.30 (Séparabilité)**.** *Un e.v.n. est dit séparable s'il contient un sous ensemble dense et dénombrable.*

La notion de séparabilité n'est pas propre aux e.v.n. et pourrait être définie pour tout espace topologique comme l'indique le résultat suivant.

Proposition 2.31. *Soit E un e.v.n.. Il y a équivalence entre les 2 propositions suivantes.*

(i) E est séparable.

(ii) Il existe un ensemble dénombrable de boules $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tel que tout ouvert de E s'écrit comme une union de boules prises dans cet ensemble.

Démonstration. On suppose que tout ouvert de E s'écrit comme union de boules prises dans un ensemble dénombrable de boules. On note $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ cet ensemble de boules. On choisit des points x_i dans chaque A_i. Alors la famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est dense.

En effet, soit y un point de E et $\epsilon > 0$. La boule $B(y, \epsilon)$ est une union d'un certain nombre des A_i. Elle contient donc au moins l'un d'entre eux, A_{i_0}, mais alors x_{i_0} se trouve dans cette boule. Ce qui prouve la densité de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Si une famille dénombrable $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est dense dans E, alors la famille des boules $(B(x_i, r))_{i\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Q}_+^*}$ forme un ensemble dénombrable de boules que l'on note $(A_j)_{j\in J}$. Si O est un ouvert, on va montrer que

$$O = \bigcup_{j, A_j \subset O} A_j \; ,$$

i.e. O est égal à l'union des A_j qui sont inclus dans O. L'inclusion de $\bigcup_{j,A_j\subset O} A_j$ dans O est triviale par définition (on a pris que des boules incluses dans O). Reste l'inclusion réciproque.

Soit $x \in O$, alors, d'une part $\exists r > 0, B(x, r) \subset O$ car O est ouvert. Et comme les x_i sont denses $\exists i_0$ tel que $\|x - x_{i_0}\| < r/10$. En choisissant r_0 un rationnel tel que $r/10 < r_0 < r/2$, la boule $B(x_{i_0}, r_0)$ fait partie de la famille des A_j, est contenue dans O (par inégalité triangulaire) et contient x. Donc

$$x \in \bigcup_{j, A_j \subset O} A_j \; ,$$

ce qui conclut la preuve. □

2.2.4 Les formes linéaires et leurs noyaux

On se souvient qu'en dimension finie, on a à notre disposition un résultat bien utile pour évaluer les dimensions d'espaces liés aux applications linéaires (image et noyaux) : le théorème du rang. En dimension infinie, un tel résultat n'est plus valide.

Définition 2.32 (Forme linéaire et hyperplan)**.** *Soit E un espace vectoriel. On appelle forme linéaire toute application linéaire allant de E vers son corps de base (qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Le noyau d'une forme linéaire non nulle est appelé un* hyperplan*.*

Si E est un e.v.n., la continuité d'une forme linéaire est définie en munissant le corps de base d'une structure d'e.v.n. (de dimension 1) sur lui-même avec comme norme la valeur absolue ou le module $|x|$.

Le résultat suivant sur les hyperplans, trivial en dimension finie en utilisant le théorème du rang, reste valide en dimension infinie.

Proposition 2.33. *Soit F un hyperplan dans l'espace vectoriel E. Alors il existe un sev G de dimension 1 tel que $F \oplus G = E$. D'autre part, si G un sous-espace vectoriel tel que $F \oplus G = E$ (c'est-à-dire $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$). Alors G est de dimension 1.*

Démonstration. **Existence :** Comme F est le noyau d'une application linéaire f supposée non–nulle, on choisit x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$. Quitte à diviser x_0 par $f(x_0)$ on peut supposer $f(x_0) = 1$. On pose $G = \mathrm{Vect}(x_0)$ (*i.e.* la droite engendrée par x_0). G est bien de dimension 1 et on montre que $G \oplus F = E$: on peut écrire, pour tout élément x de E

$$x = f(x)x_0 + (x - f(x)x_0)$$

comme $f(x - f(x)x_0) = f(x) - f(x)f(x_0) = 0$ on a bien que $G + F = E$. Par ailleurs, si $f(\lambda x_0) = 0$ on a $\lambda = 0$. C'est-à-dire que F et G sont supplémentaires.

Tout G est de dimension 1 Soit f une forme linéaire non–nulle de noyau F. Alors on vérifie que le noyau de la restriction de f à G est nul : si $x \in G$ et $f(x) = 0$ alors $x \in G \cap F = \{0\}$. La restriction de f à G est donc une bijection de G dans le corps de base. D'où le résultat. □

Tout sous–espace vectoriel de dimension finie d'un e.v.n. est fermé (voir les exercices). Le résultat suivant n'a donc un intérêt que pour les e.v.n. de dimension infinie.

Proposition 2.34. *Un hyperplan dans e.v.n. est soit dense soit fermé.*

Démonstration. Soit donc f une forme linéaire non nulle définie sur un e.v.n. E et $K = f^{-1}(\{0\})$ son noyau. Si K n'est pas fermé, il existe $x \in \overline{K} \setminus K$. Donc $f(x) \neq 0$. Pour tout $y \in E$, on écrit

$$y = [y - \frac{f(y)}{f(x)}x] + \frac{f(y)}{f(x)}x\ .$$

Le terme entre crochets est dans K (et donc aussi dans $\overline{K}$) f y est nulle. Le terme suivant est co–linéaire à x. Comme K est un e.v., $\overline{K}$ l'est aussi (il suffit d'utiliser la caractérisation séquentielle de ce dernier pour s'en rendre compte). Cette écriture de y montre donc que $y \in \overline{K}$. Donc K est dense. □

2.3 Complétude

2.3.1 Espaces de Banach (e.v.n. complets)

Le critère de Cauchy est un critère nécessaire pour la convergence qui ne nécessite pas la connaissance de la limite. Dans certains espaces (les espaces de Banach, voir ci-dessous), il devient un critère suffisant, ce qui est très pratique pour prouver une convergence sans avoir besoin d'exhiber la limite.

Définition 2.35 (Suites de Cauchy)**.** *Une suite (x_n) dans un e.v.n. E est dite de Cauchy si*

$$\textit{pour tout } \epsilon > 0, \textit{ il existe } N \textit{ t.q. pour tous } m, n \geqslant N,\ \|x_m - x_n\| \leqslant \epsilon\ .$$

Soit, aussi petit que soit ϵ il existe un rang N à partir duquel tous les x_n sont proches à ϵ près les uns des autres.

Évidemment, toute suite convergente est une suite de Cauchy (à partir d'un certain rang tous les x_n sont proches à $\epsilon/2$ près de la limite ils sont donc au plus à distance ϵ entre eux par inégalité triangulaire).

Par contre, il n'est pas clair que toute suite de Cauchy est une suite convergente. Les espaces dans lesquelles cela est vrai s'appellent "espaces complets" et leurs propriétés sont étudiée ci-après.

Définition 2.36 (e.v.n. complet, ou Banach)**.** *Un e.v.n. E est dit complet (ou encore espace de Banach) si toute suite de Cauchy converge vers un point de l'espace.*

La complétude est une propriété fondamentale, car elle permet de prouver la convergence d'une suite sans avoir à exhiber sa limite. Un e.v.n. de dimension finie est complet. La propriété de complétude sera cruciale pour les e.v.n. de dimension infinie que l'on introduira.

Proposition 2.37 (Séries absolument convergentes)**.** *Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est complet si et seulement si toute série de terme général $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que $\sum_{n\geq 0}\|x_n\| < \infty$ est convergente. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ est* absolument convergente*.*

Bien sûr toute série convergente n'est pas nécessairement absolument convergente.

Démonstration. D'abord on montre que si toute série absolument convergente est convergente alors toute suite de Cauchy est convergente. On suppose donc que toute série absolument convergente est convergente et soit (x_n) une suite de Cauchy. Pour tout entier k il existe un rang N_k tel que

$$\forall n, m \geqslant N_k,\ \|x_n - x_m\| \leqslant \frac{1}{2^k}$$

Quitte à augmenter les N_k on peut supposer que $N_k > N_{k-1}$ (pour forcer la suite N_k à tendre vers l'infini). On considère la suite (y_k) définie par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ y_k = x_{N_k}$$

(c'est une sous-suite de x) et on définit $z_k = y_k - y_{k-1}$ (pour les $k > 0$ et $z_0 = y_0$). On a

$$\|z_k\| \leqslant \frac{2}{2^k}$$

La série des z_k est donc absolument convergente. Elle est convergente par hypothèse. Or la somme $z_0 + z_1 + \cdots + z_k = y_k$. Donc la suite (y_k) est convergente et c'est une sous suite de la suite (x_n). Or une fois qu'une sous-suite d'une suite de Cauchy est convergente alors on montre facilement que la suite toute entière est convergente (vers la même limite).

Maintenant, nous allons montrer que si un e.v.n. est complet (*i.e.* toute suite de Cauchy converge) alors toute série absolument convergente est convergente. Soit (z_n) une série absolument convergente. La suite (y_n) définie par

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$$

est de Cauchy. En effet la série des $\|z_n\|$ est sommable. Si $\epsilon > 0$ il existe N tel que

$$\sum_{k=N}^{\infty} \|z_k\| \leqslant \epsilon$$

et alors pour tout $n > m \geqslant N$, on a

$$\|y_n - y_m\| = \|(y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \cdots + (y_{m+1} - y_m)\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \|z_k\| \leqslant \epsilon$$

L'avant dernière inégalité étant due à l'inégalité triangulaire. On a montré que (y_n) est de Cauchy, donc converge, ainsi que la série des (z_n), ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition 2.38 (Prolongement d'une application linéaire continue)**.** *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, F complet, et G un sous-espace vectoriel dense dans E. Si A est un opérateur linéaire continu de G dans F, alors il existe un prolongement unique $\tilde{A}$ linéaire continu de E dans F et la norme opérateur de $\tilde{A}$ est égale à la norme de A.*

Démonstration. Soit $x \in E$. Comme G est dense dans E, il existe une suite (x_n) dans G telle que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. La suite (x_n) étant convergente, elle est de Cauchy. A étant linéaire continu on a

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leq \|A\| \|x_n - x_m\| \;.$$

On en déduit que Ax_n est une suite de Cauchy de F qui est complet. La suite Ax_n est donc convergente vers un élément y de F. On vérifie facilement que y ne dépend pas de la suite x_n et on pose donc $\tilde{A}f = y$. $\tilde{A}$ est linéaire par construction et de plus on a

$$\|\tilde{A}x\| = \lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|A\|_{\mathcal{A}(G,F)} \|x_n\| = \|A\|_{\mathcal{A}(G,F)} \|x\| \;,$$

ce qui prouve que

$$\|\tilde{A}\|_{\mathcal{A}(E,F)} \leq \|A\|_{\mathcal{A}(G,F)} \;.$$

Comme $\tilde{A}x = Ax$ pour tout $x \in G$, on a

$$\|\tilde{A}\|_{\mathcal{A}(E,F)} = \|A\|_{\mathcal{A}(G,F)} \;.$$

Enfin, G étant dense dans E, il est clair que $\tilde{A}$ est unique. En effet, si $\tilde{A}_1$ et $\tilde{A}_2$ sont deux applications linéaires égales sur G et continues sur E, alors $\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 = \tilde{D}$ est une application linéaire continue nulle sur G et $\tilde{D}^{-1}(\{0\})$ est un fermé qui contient une partie dense (G), c'est donc l'espace tout entier (E) et on a bien

$$\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 \;,$$

ce qui conclut la preuve. □

2.3.2 Complétion

Comme nous l'avons dit, la propriété de complétude a un grand intérêt pratique pour pouvoir étudier la convergence d'une suite.

Le résultat suivant est assez rassurant puisqu'il explique que si un espace n'est pas complet, on peut toujours le compléter. La difficulté (cachée) du résultat est que l'espace complet obtenu peut être difficile à décrire ou à étudier.

Théorème 2.39 (Complétion d'un e.v.n.)**.** *Si E est un e.v.n. alors il existe un e.v.n. F tel que*

1. *L'e.v.n. F est complet.*
2. *Il existe une application linéaire notée I de E vers F qui est isométrique et telle que $I(E)$ est dense dans F.*

De plus, si F_2 est un autre e.v.n. qui vérifie les deux propriétés et que I_2 est l'isométrie dont il est fait mention au point (2) alors $I_2 \circ I^{-1}$ se prolonge en une isométrie bijective entre F et F_2. En d'autres termes F est unique à une isométrie près.

Remarque 2.40. Le premier exemple de complétion d'un espace est la construction de $\mathbb{R}$ à partir des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$.

Démonstration. **Existence :** Soit G l'ensemble des suites de Cauchy de E. On considère la relation $\sim$ entre éléments de G définie par

$$(x \sim y) \Leftrightarrow (\lim(x - y) = 0)$$

i.e. les suites x et y sont en relation si et seulement si la suite $x - y$ tend vers 0. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence (elle est bien symétrique, réflective et transitive).

On note F l'ensemble des classes d'équivalence de G modulo la relation $\sim$. Ainsi un élément de F est un ensemble de suites de Cauchy dont les différences deux à deux tendent vers 0.

On va munir F d'une structure d'espace vectoriel normé et montrer qu'il est complet pour cette norme. Disons tout de suite ce que sera l'application I (qui injecte E dans F) : $\forall t \in E,\ I(t)$ est la classe d'équivalence dans G de la suite constante égale à t (qui est bien de Cauchy).

Pour la suite de la démonstration, nous utilisons les notations suivantes :

— Une lettre majuscule, par exemple X désignera un élément de F : c'est un ensemble de suites de Cauchy liées entre elles par la relation $\sim$.

— Une lettre en caractère gras, par exemple $\mathbf{x}$ désignera une suite d'éléments de E dont les termes seront notés x_n. Une suite peut aussi être notée $(x_n)_n$ (notation habituelle).

— Enfin, lorsque nous considérerons des suites d'éléments de F (c'est-à-dire des suites de suites d'éléments de E) nous utiliserons un exposant pour noter la position dans la suite. Par exemple Y^m est le m-ième terme de la suite $(Y^m)_m$ et est un élément de F.

La norme sur F : Si X est un élément de F on définit sa norme par

$$\|X\|_F = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| \text{ où } \mathbf{x} \text{ est un élément de } X$$

On vérifie facilement que cette définition a un sens. En effet, si $\mathbf{x}$ est une suite de Cauchy alors la suite $(\|x_n\|)_n$ est aussi une suite de Cauchy ($\forall t, l \in E | \|t\| - \|l\|| \leqslant \|t - l\|$ par inégalité triangulaire). Et comme $\mathbb{R}$ est complet la suite des $(\|x_n\|)_n$ admet une limite. Par ailleurs si $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ alors $\|x_n\| - \|y_n\|$ tend vers 0 et donc la valeur de $\|X\|_F$ ne dépend pas de la suite $\mathbf{x} \in X$ choisie.

Somme de deux éléments de F Si X et Y sont deux classes d'équivalence de $\sim$ on définit $X +_F Y$ comme étant la classe d'équivalence de $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ où $\mathbf{x} \in X$ et $\mathbf{y} \in Y$. On vérifie encore une fois que la somme de deux suites de Cauchy est bien de Cauchy et que la classe de $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ne dépend pas des suites $\mathbf{x} \in X$ et $\mathbf{y} \in Y$ choisies.

On fait de même pour définir la multiplication par un scalaire :$\forall \lambda \in (\mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{R}), X \in F,\ \lambda X$ est la classe d'équivalence de $\lambda\mathbf{x}$ où $\mathbf{x} \in X$ est une suite de l'ensemble X. Encore une fois la classe de $\lambda\mathbf{x}$ ne dépend pas du $\mathbf{x} \in X$ choisi.

On vérifie que ces opérations induisent une structure d'espace vectoriel sur F. Il nous reste à montrer que ce que nous avons appelé $\|.\|_F$ est bien une norme et que F est complet pour cette norme.

1. Si X et Y vérifient $\|X-Y\|_F=0$ il faut montrer que $X=Y$. Or l'assertion $\|X-Y\|_F=0$ signifie
$$\forall \mathbf{x}\in X,\ \mathbf{y}\in Y,\ \lim \|x_n-y_n\|_E=0 \Leftrightarrow \forall \mathbf{x}\in X,\ \mathbf{y}\in Y,\ (x\sim y)\Leftrightarrow X=Y\ .$$
2. La symétrie est triviale.
3. Inégalité triangulaire : Soient $\mathbf{x}\in X$ et $\mathbf{y}\in Y$ deux suites de deux éléments de F, on a
$$\|X+Y\|_F=\lim_n \|x_n+y_n\|_E\leqslant \lim_n \|x_n\|_E+\|y_n\|_E=\|X\|_F+\|Y\|_F\ .$$
4. Par les définitions, il est clair que $\|\lambda X\|_F=|\lambda|\|X\|_F$.

Enfin, la preuve de la **complétude de** F se fait comme suit :
Une petite définition technique : Pour $\epsilon>0$, une suite $(x_n)_n$ d'un e.v.n est dite **ϵ-serrée** si
$$\forall m,n,\quad \|x_n-x_m\|\leqslant\epsilon$$

On remarque que si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy et $\epsilon>0$ il existe une suite $(y_n)_n$ qui lui est équivalente (au sens de $\sim$) qui est ϵ-serrée. Cela est immédiat, il suffit de prendre $y_n=x_{n+N}$ où N est l'indice associé à ϵ par la définition des suites de Cauchy.

On prouve maintenant que F est complet. On fixe une suite $(X^m)_m$ de Cauchy de F. Il est clair qu'il suffit de démontrer que n'importe quelle sous-suite de $(X^m)_m$ converge pour montrer que $(X^m)_m$ converge. On fixe $(Y^k)_k$ une sous-suite de $(X^m)_m$ qui vérifie
$$\forall n,k\geqslant m,\quad \|Y^k-Y^n\|_F\leqslant\frac{1}{m}$$
(il suffit, pour tout m de prendre $Y^m=X^{N(m)}$ tel que $N(m)$ est l'indice associé à $\frac{1}{m}$, il faut faire attention que$N(m)$ soit croissant en fonction de m)

Pour tout m on fixe $\mathbf{y}^m\in Y^m$ une suite dans la classe Y^m et qui est $\frac{1}{m}$-serrée (c'est possible par la remarque qui vient après la définition des suites ϵ-serrées).

Enfin, on pose
$$z_n=y_n^n$$

D'abord, $(z_n)_n$ est de Cauchy. En effet,
$$\|z_n-z_m\|=\|y_n^n-y_m^m\|\leqslant\|y_n^n-y_l^n\|+\|y_l^n-y_l^m\|+\|y_l^m-y_n^m\|$$
En prenant n et m assez grands pour que $\|Y^n-Y^m\|_F\leqslant\epsilon$ et que y^n et y^m soient ϵ-serrées et en faisant tendre l vers l'inifini, on obtient $\|z_n-z_m\|\leqslant 3\epsilon$ (car $\|y_l^n-y_l^m\|$ tend vers $\|Y^n-Y^m\|_F$).

On va montrer que les suites $\mathbf{y}^m$ tendent vers la suite $\mathbf{z}$ (au sens de la norme de l'espace F des suites de Cauchy) ce qui prouvera que la classe de $\mathbf{z}$ est limite de la suite $(Y^m)_m$ et donc de $(X^m)_m$)

Soit $\epsilon>0$ et M un entier tel que $\epsilon>\frac{1}{M}$. Soit $n,k\geq M$, on a
$$\|z_n-y_n^k\|=\|y_n^n-y_n^k\|\leqslant\|y_n^n-y_l^n\|+\|y_l^n-y_l^k\|+\|y_l^k-y_n^k\|$$

Lorsque l tend vers l'infini, la quantité $\|y_l^n-y_l^m\|$ tend vers la distance entre les suites y^m et y^n qui est plus petite que $1/M\leqslant\epsilon$. Par ailleurs, les suites $\mathbf{y}^k$ et $\mathbf{y}^n$ sont ϵ-serrées. D'où,
$$\forall k\geqslant M,\ \forall n\geqslant M,\quad \|z_n-y_n^k\|\leqslant 3\epsilon$$
On en déduit que la distance entre la suite $\mathbf{z}$ et la suite $\mathbf{y}^k$ est inférieure à 3ϵ. La classe de la suite $\mathbf{z}$ est donc limite de la suite $(Y^m)_m$. Ceci conclut la preuve de complétude de F.

Il nous reste à montrer que $I(E)$ est dense dans F (on rappelle que $I(t)$ est la classe de la suite (de Cauchy) constante égale à t).

Soit $X \in F$, $\epsilon > 0$ et $\mathbf{x} \in X$ une suite représentant la classe X. Soit N l'indice associé à ϵ pour la suite $\mathbf{x}$ par la définition des suites de Cauchy ($n, m \geqslant N \Rightarrow \|x_n - x_m\| \leqslant \epsilon$) alors on a

$$\|X - I(x_N)\|_F \leqslant \epsilon$$

En effet, $\|x_n - x_N\| \leqslant \epsilon$ dès que $n \geqslant N$.

Unicité Maintenant que nous avons construit un espace F qui vérifie les axiomes annoncés dans le théorème. Supposons qu'un autre e.v.n. F_2 vérifie les mêmes axiomes (il est complet et I_2 est une isométrie linéaire de E vers F_2 dont l'image est dense). On va montrer qu'il existe J, une application linéaire, isométrique et sujective de F vers F_2. Ceci signifie que F est unique à isométrie près.

Soit J l'extension par continuité à F de la fonction $I_2 \circ I^{-1}$. Par la proposition 2.38 J est bien linéaire et continue. Elle est aussi isométrique par continuité de la fonction norme dans un e.v.n. ($\|J(x_n)\|$ tend vers $\|x\|$ si x est limite des x_n et comme J est isométrique sur une partie dense, elle est isométrique sur F). Par ailleurs, $I_2(E) \subset J(F)$ et donc $J(F)$ est dense dans F_2.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que J est surjective. Soit $y \in F_2$, on approche y par une suite (y_n) définie par

$$y_n = J(x_n),\ x_n \in F\ ,$$

ce qui est possible car $J(F)$ est dense dans F_2. La suite (y_n) est de Cauchy car convergente. Et on a

$$\forall m, n,\ \|y_n - y_m\| = \|J(x_n - x_m)\| = \|x_n - x_m\|\ .$$

Donc la suite (x_n) est de Cauchy et donc convergente vers un point x car F est complet. Par continuité de J, on a

$$J(x) = y\ ,$$

et J est surjective. (En dimension infinie il peut exister une application linéaire injective de E vers E sans que cette application ne soit surjective. Cela est impossible en dimension finie à cause du théorème du rang). □

Exemple 2.41. Étudions l'e.v.n. suivant : soit E l'espace vectoriel des suites de réels indexées par $\mathbb{N}$ dont le support est fini. On muni E de la norme

$$\|(x_n)\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

Cette norme est bien définie car seul un nombre fini de x_n sont non nuls par définition de l'espace.

L'espace E est-il complet ?

La réponse est non et pour le prouver il suffit d'exhiber une suite de Cauchy qui ne converge pas vers un point de l'espace. On définit la suite de suites (x_n^k) par

$$x_{kn} = \begin{cases} \frac{1}{n^2+1} & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout k fixé on a donc défini une suite dont le support est fini $(x_n^k)_n$. Montrons que (x^k) est une suite est de Cauchy pour la norme choisie. Pour tout $k \geq j$, on a

$$\|x^k - x^j\|_1 = \sum_{n=j+1}^{k} \frac{1}{n^2+1} \leq \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}\ ,$$

qui tend vers 0 quand $j \to \infty$. La suite (x^k) est donc de Cauchy.

Il nous faut montrer que cette suite ne converge vers aucun point de E : Cela est clair car quelque soit la suite $y = (y_n)$ à support fini, on notant K le plus grand indice tel que $y_K \neq 0$ on a que

$$m \geq K+1 \Rightarrow \|x^m - y\|_1 \geq \frac{1}{(K+1)^2+1} \ ,$$

donc (x^k) ne peut converger vers y dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Évidemment on voudrait dire que cette suite de suites tend vers la suite $(1/(n^2+1))$ mais cette dernière suite n'est pas dans l'espace.

Étude du complété topologique de E

On va dans la suite montrer les faits suivants.

1. L'espace $\ell^1(\mathbb{N})$ est complet.
2. L'espace E est dense dans $\ell^1(\mathbb{N})$. À ce stade on sait, d'après ce qui précède, que $\ell^1(\mathbb{N})$ est l'unique (à isométrie bijective près) espace complet dont E soit un sous-espace dense.
3. Toute suite de Cauchy de E converge ponctuellement vers une suite $\ell^1(\mathbb{N})$. Ceci n'est pas clair a priori, car la convergence ponctuelle diffère de la convergence en norme 1.

Démonstration. 1. **L'espace $\ell^1(\mathbb{N})$ est complet :** Nous avons vu que pour qu'un espace soit complet il faut et il suffit que toute série absolument convergente soit convergente (proposition 2.37).

Soit (z^n) une série de suites prises dans $\ell^1(\mathbb{N})$ qui est absolument convergente :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|z^n\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |z_k^n| < \infty \ .$$

Alors pour tout k fixé, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_k^n| < \infty \ .$$

Notons y_k la limite de la série de terme général $(z_k^n)_n$ et $y = (y_k)_k$. Alors

$$\begin{aligned}
\left\| y - \sum_{n=0}^{p} z^n \right\|_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left| y_k - \sum_{n=0}^{p} z_k^n \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} z_k^n \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=p+1}^{\infty} |z_k^n| \\
&= \sum_{n=p+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |z_k^n| \ = \sum_{n\geq p+1} \|z^n\|_1,
\end{aligned}$$

qui converge vers 0 quand $p \to \infty$ puisque cette série de terme positif est bornée.

2. **L'espace E est dense dans $\ell^1(\mathbb{N})$**

Soit $y = (y_k) \in \ell^1(\mathbb{N})$. Pour tout n on définit la suite $x^n = (x_k^n)_k$ par

$$x_k^n = \begin{cases} y_k & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $x^n \in E$ et pour tout n et

$$\|x^n - y\|_1 = \sum_{k>n} |y_k| \ ,$$

qui tend bien vers 0 quand $n \to \infty$, puisque $y \in \ell^1(\mathbb{N})$.

3. **Toute suite de Cauchy de E converge ponctuellement vers une suite de** $\ell^1(\mathbb{N})$
Soit (x^n) une suite prise dans E qui est de Cauchy (pour la norme $\|\cdot\|_1$). On a vu que $\ell^1(\mathbb{N})$ est complet. Donc (x^n) converge vers $y = (y_k)_k \in \ell^1(\mathbb{N})$. Alors, pour tout k, on a

$$|x_k^n - y_k| \leq \|x^n - y\|_1 \ ,$$

qui converge vers 0. D'où la convergence ponctuelle vers y de ℓ^1.

$\square$

Chapitre 3

Espaces L^p

Dans ce chapitre nous introduisons Les espaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$ en tant qu'*espaces vectoriels normés* (e.v.n.).

Nous commençons par rappeler les propriétés de l'intégrale de Lebesgue nécessaires à l'ensemble du cours.

3.1 Intégrale de Lebesgue

3.1.1 Mesure de Lebesgue

Soit $N \geq 1$. On note $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^N$, c'est-à-dire la plus petite tribu contenant les ouverts de $\mathbb{R}^N$. On note $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ la tribu des boréliens de $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, c'est-à-dire la plus petite tribu contenant les ouverts de $\bar{\mathbb{R}}$, ou de façon équivalente, la plus petite tribu contenant les ouverts de $\mathbb{R}$ et les singletons $\{-\infty\}$ et $\{\infty\}$. Dans la suite, on note pour tout $a_i \leq b_i$, $i = 1, \ldots, N$, le pavé

$$[a, b] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N] = \left\{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \ : \ a_i \leq x_i \leq b_i, \ 1 \leq i \leq N\right\} \ .$$

De même on note $]a, b[$, $[a, b[$,$]a, b]$ en remplaçant les inégalités correspondantes par des inégalités strictes. On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est aussi la plus petite tribu contenant les pavés, ou même les pavé semi-fermés "en haut à droite", ce qu'on écrit

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \sigma\left([a, b] \ : \ a \leq b \in \mathbb{R}^N\right) = \sigma\left(]-\infty, b] \ : \ b \in \mathbb{R}^N\right) \ .$$

Ces classes d'ensembles sont de plus des π-systèmes (stables par intersection finie). C'est ce qui permet d'avoir le résultat suivant en appliquant les théorèmes classiques d'existence et d'unicité des mesures, que l'on admet dans ce cours.

Théorème 3.1. *Il existe un unique mesure λ_N sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ qui vérifie, pour tout pavé $[a, b] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$,*

$$\lambda_N([a, b]) = \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i) \ . \tag{3.1}$$

Définition 3.2 (Mesure de Lebesgue)**.** *On appelle la mesure λ_N définie par le théorème 3.1 la* mesure de Lebesgue *de dimension N.*

Remarque 3.3. Il faut faire attention au fait que λ_N n'est pas une mesure de probabilité, ni même une mesure finie. Elle est en revanche finie sur les ensembles compacts (fermés bornés de $\mathbb{R}^N$). On dit que c'est une *mesure de Radon*.

Observons que la propriété (3.1) implique en particulier que la mesure de Lebesgue d'un pavé ne dépend que de la dimension de ses côtés et par conséquent est *invariante par translation.* Par suite cette propriété s'étend à tout borélien.

Proposition 3.4 (Invariance par translation de la mesure de Lebesgue)**.** *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^N$, $\lambda_N(A) = \lambda_N(\mathcal{T}^t(A))$, où*

$$\mathcal{T}^t(A) = \{x + t \ : \ x \in A\} \ .$$

Démonstration. Voir l'exercice 3.5 pour une preuve en dimension 1 (la même idée peut s'appliquer en dimension quelconque). □

Exercice 3.5. Soit λ la mesure de Lebesgue de dimension 1 et $t \in \mathbb{R}$. On note, pour tout $M > 0$, $\lambda_{|M}$ la mesure (finie) définie par

$$\lambda_{|M}(A) = \lambda(A \cap [-M, M[), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ .$$

Autrement dit, $\lambda_{|M}$ est la restriction de λ à l'espace $([-M, M[\,, \mathcal{B}([-M, M[))$, où

$$\mathcal{B}([-M, M[) = \{A \cap [-M, M[), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \ .$$

On note de plus $\mathcal{T}^t_{|M}$ la translation périodisée sur $[-M, M[$,

$$\mathcal{T}^t_{|M}(A) = [-M, M[\cap \left(\mathcal{T}^t(A) + 2M\mathbb{Z}\right) \ .$$

1. Montrer que pour tout $M > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $\lambda_{|M} \circ \mathcal{T}^t_{|M} = \lambda_{|M}$ sur la classe d'ensembles $\{[a, b] \ : \ -M \leq a \leq b < M\}$.
2. En utilisant le théorème d'unicité des mesures finies (deux mesures finies qui coïncident sur un π-système, coïncident sur la tribu engendrée par ce π-système), en déduire que $\lambda_{|M} \circ \mathcal{T}^t_{|M} = \lambda_{|M}$ sur $([-M, M[\,, \mathcal{B}([-M, M[))$.
3. Conclure que $\lambda \circ \mathcal{T}^t = \lambda$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

3.1.2 Intégrale des fonctions boréliennes, espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$

On rappelle la définition des fonctions boréliennes.

Définition 3.6 (Fonctions boréliennes)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$. On dit que f est une* fonction borélienne *si elle est mesurable de $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ou $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou $A \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.*

On rappelle (cf. cours de probabilité) que les fonctions continues ou continues par morceaux sont toutes boréliennes et que le maximum, minimum, la somme et le produit de fonctions boréliennes, du moment que l'opération est bien défini (en évitant $\infty + (-\infty)$ et $0 \times \pm\infty$) est une fonction borélienne. Enfin la limite simple d'une suite de fonctions boréliennes, quand elle existe, est borélienne. Toutes ces propriétés montrent que toutes les fonctions usuelles sont boréliennes et on pourra se passer de justifier cette propriété sauf dans le cas où cela est explicitement demandé.

On rappelle que comme pour tout espace mesuré, il est possible de définir une intégrale pour les fonctions boréliennes définies sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. Il est d'usage de noter cette intégrale de plusieurs façon, typiquement pour $N = 1$:

$$\int f = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x \ .$$

On préférera la première expression qui fait l'économie des bornes et de même pour $a, b \in \mathbb{R}$, on préférera écrire

$$\int_{[a,b]} f = \int \mathbb{1}_{[a,b]} \times f$$

si $a \leq b$ ou $-\int_{[b,a]} f$ si $a > b$ plutôt que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Plus généralement on pourra utiliser les écritures équivalentes suivantes :

$$\int f = \int f\,\mathrm{d}\lambda_N = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \cdots \int f(x_1, \ldots, x_N)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_N\ .$$

En fait cette dernière expression n'a pas tout à fait le même sens : il s'agit d'une intégrale multiple où l'on intègre successivement chaque variable par rapport à la mesure de Lebesgue de dimension 1. La dernière égalité n'est donc justifié en général que sous les hypothèses des théorèmes de Fubini et Tonelli (voir ci-dessous). De même on rappelle que $\int f$ n'est pas forcément *bien défini* pour toute fonction borélienne f. En fait $\int f$ est définie uniquement si au moins l'une des deux intégrale $\int f_+$ ou $\int f_-$ est finie, avec $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$ (si bien que $f = f_+ - f_-$), auquel cas

$$\int f := \int f_+ - \int f_-\ .$$

De même pour une fonction à valeur complexe $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$ avec f_1, f_2 à valeurs réelles, on défini $\int f = \int f_1 + \mathrm{i} \int f_2$.

Définition 3.7 (Espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$)**.** *On dira que* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *ou* $\bar{\mathbb{R}}$ *est* intégrable *si c'est une fonction borélienne et* $\int |f| = \int f_+ + \int f_- < \infty$. *On note* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ *l'ensemble des fonctions intégrables définies sur* $\mathbb{R}^N$.

Remarque 3.8. Insistons sur deux choses qui sont liées :

— Lors de la construction de l'intégrale de Lebesgue on commence par donner un sens à $\int f$ pour **toute** fonction f **borélienne et positive**. Cette quantité peut valoir $+\infty$. Les fonctions de $\mathcal{L}^1$ sont celles pour lesquelles la partie positive et négative ont une intégrale finie, ce qui permet de définir leur intégrale comme ci-dessus à partir de l'intégrale des fonctions positives, et ce sans ambiguïté.

— Dans ce cours la notation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f$$

est admise et elle est équivalente à $\int f$ mais **n'est pas définie** comme

$$\lim_{B \to +\infty, A \to -\infty} \int_A^B f$$

il se peut que pour une fonction borélienne, la limite ci-dessus existe mais que cette fonction ne soit pas $\mathcal{L}^1$. Par exemple la fonction $\sin(x)/x$ est dans ce cas et n'est pas $\mathcal{L}^1$. Dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue, si une fonction a une intégrale finie, alors sa partie positive et négative ont aussi une intégrale finie. Si la fonction est positive on admet de parler de son intégrale, quitte à ce qu'elle soit infinie.
Par contre, il est vrai que si $f \in \mathcal{L}^1$ alors

$$\lim_{B \to +\infty, A \to -\infty} \int_A^B f = \int f$$

qui se démontre avec le théorème de convergence dominée (on rappelle que $\int_A^B f$ est définie comme $\int \mathbb{1}_{[A,B]} \times f$).

On rappelle le résultat utile suivant.

Théorème 3.9. *L'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ est un espace vectoriel et l'intégrale $f \mapsto \int f$ définit une forme linéaire sur cet espace et $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$.*

En fait, la linéarité de l'intégrale s'étend aux fonctions non-intégrables : du moment que l'on évite les additions impropres ($\infty - \infty$) et que l'on utilise la convention $0 \times \infty = 0$, on peut écrire pour $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$ boréliennes et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\int (\lambda f + g) = \lambda \int f + \int g .$$

Un outil essentiel issu de la construction de l'intégrale est le théorème de convergence monotone.

Théorème 3.10 (Théorème de convergence monotone)**.** *Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ ou $\bar{\mathbb{R}}_+$ une suite de fonctions boréliennes positives et f sa limite simple. Alors f est borélienne et si de plus $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, alors*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n .$$

Ce théorème permet d'écrire toute intégrale de fonction positive $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ ou $\bar{\mathbb{R}}_+$ comme la limite d'une suite d'intégrales de fonction *simples* (c'est-à-dire prenant un nombre fini de valeurs distinctes) en posant

$$f_n = n\mathbb{1}_{\{f^{-1}([n,\infty])\}} + \sum_{k=0}^{n2^n-1} k2^{-n}\mathbb{1}_{\{f^{-1}([k2^{-n},(k+1)2^{-n}[)\}} .$$

On vérifie alors que f_n converge en tout point vers f en croissant et prend au plus $n2^n + 1$ valeurs distinctes. Cette approximation de f permet de montrer des résultats pour des fonctions boréliennes à partir de résultats sur les mesures d'ensembles comme dans le résultat suivant.

Proposition 3.11 (Invariance par translation de l'intégrale de Lebesgue)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$ borélienne. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^N$,*

$$\int f = \int \mathcal{T}^t(f) , \tag{3.2}$$

(en particulier, si l'une des intégrales est impropre, l'autre l'est aussi), où

$$\mathcal{T}^t(f) : x \mapsto f(x - t) .$$

Démonstration. Voir l'exercice 3.12. □

Exercice 3.12. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

1. Montrer que $\mathcal{T}^t(A) = \mathcal{T}^t(\mathbb{1}_A)$ (ce qui justifie l'abus de notation...).

Montrer que (3.2) est vrai successivement pour :

2. $f = \mathbb{1}_A$.
3. f fonction simple borélienne.
4. f fonction borélienne positive.
5. $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$ borélienne.

3.1.3 Égalité presque partout (p.p.)

Un ensemble de cardinal infini (par exemple tel que $\mathbb{Q}$ ou même plus “gros” que ce dernier tel que l'ensemble de Cantor) peut en fait passer inaperçu pour la mesure de Lebesgue, on parle alors d'*ensemble négligeable*.

Définition 3.13 (Ensemble négligeable)**.** *Soit A un borélien de $\mathbb{R}^N$. On dit que A est* négligeable *si $\lambda_N(A) = 0$.*

Comme un singleton peut être vu comme un pavé de taille nulle, $\{x\} = [x, x]$, on a que les singletons sont négligeables et par σ-additivité de la mesure de Lebesgue, il s'en suit que tout ensemble dénombrable est négligeable.

Cette notion s'étend des ensembles aux fonctions boréliennes en remarquent le résultat suivant.

Lemme 3.14. *Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ ou $\bar{\mathbb{R}}_+$ une fonction borélienne positive. Alors $\int f = 0$ si et seulement si $\{f \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ f(x) \neq 0\}$ est négligeable.*

Exercice 3.15. En utilisant que $\{f \neq 0\} = \cup_{n>0}\{f > 1/n\} = \cup A_n$ puis que l'intégrale de f est plus grande que celle de $\frac{1}{n}\mathbb{1}_{A_n}$ démontrer le lemme 3.14.

Il s'en suit immédiatement que si deux fonctions boréliennes ne se distinguent que sur un ensemble négligeable, i.e. $\{f \neq g\}$ est négligeable, alors elles ont même intégrale. Le lemme 3.14 indique aussi que $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ muni de

$$\|f\|_1 = \int |f|$$

n'est pas un e.v.n. puisque $\|f\|_1 = 0$ implique seulement que $\{f \neq g\}$ est négligeable et non $f = 0$. En revanche il est utile de remarquer que

(i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \ \|f\|_1$.

(ii) Pour tous $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

On dit que $\|\cdot\|_1$ définit une *semi-norme* sur $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

Définition 3.16 (Égalité presque partout (p.p.))**.** *Soit f et g deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}_+$ ou $\bar{\mathbb{R}}_+$. On dira que f et g sont* égales presque partout *et on notera $f \overset{\text{p.p.}}{=} g$ si $\{f \neq g\}$ est négligeable, ou, de façon équivalente, $\int |f - g| = 0$.*

Il est facile de vérifier que la relation $\overset{\text{p.p.}}{=}$ est une relation d'équivalence. L'ensemble des classes d'équivalence associées forme donc une partition des fonctions boréliennes et on peut voir toute application définie pour les fonctions boréliennes qui sont constantes sur ces classes comme des applications définies sur les classes. Par exemple l'intégrale peut être définie sur les classes d'équivalence de $\overset{\text{p.p.}}{=}$.

On dira aussi qu'une fonction f vérifie une propriété presque partout (abréviation p.p.) s'il exsite g vérifiant cette propriété telle que $f \overset{\text{p.p.}}{=} g$. Par exemple $f \geq 0$ p.p. signifie que $\{f < 0\}$ est négligeable. De même on étend la convergence simple à la convergence p.p. en disant que $f_n \to f$ p.p. si $\{x \ : \ f_n(x)$ ne converge pas vers $f(x)\}$ est négligeable.

3.1.4 Échange de limite et d'intégrale

On a déjà vu le théorème de convergence monotone, qui permet d'échanger limite et intégrale dans un cas très spécifique, celui des suites croissantes de fonctions positives. Nous rappelons maintenant deux conséquences classiques de ce théorème : le lemme de Fatou et le théorème de convergence dominée.

Lemme 3.17 (Lemme de Fatou). *Soit (f_n) une suite de fonctions $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ ou $\bar{\mathbb{R}}_+$ boréliennes positives. Alors on a*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \ .$$

Théorème 3.18 (Théorème de convergence dominée). *Soit (f_n) une suite de fonctions $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$ boréliennes. Supposons qu'il existe une fonction intégrable g telle que, pout tout $n \geq 1$, $|f_n| \leq g$ p.p. et qu'il existe une fonction f borélienne telle que $f_n \to f$ p.p. Alors f est intégrable et on a*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| = 0 \ . \tag{3.3}$$

Ceci implique en particulier que

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n \ .$$

Quand (3.3) est vérifiée, on utilisera la définition suivante.

Définition 3.19. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ et $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On dira que f_n converge vers f au sens L^1 et on notera*

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \ ,$$

si (3.3) est vérifiée,

Les théorèmes 3.10 et 3.18 impliquent le résultat suivant qui permet d'échanger intégrale et série.

Théorème 3.20. *Soit (f_n) une suite de fonctions $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$ boréliennes. Alors si les f_n sont à valeurs positives ou si*

$$\int \sum_n |f_n| < \infty \ , \tag{3.4}$$

alors on peut écrire

$$\int \sum_{n\geq 1} f_n = \sum_{n\geq 1} \int f_n \ .$$

3.1.5 Intégrale multiple et théorème de Fubini-Tonelli

Soit f une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^N$ avec $N = N_1 + N_2$ et $N_1, N_2 \geq 1$.

Par commodité, on a rassemblé les théorèmes de Fubini et Tonelli dans l'énoncé suivant.

Théorème 3.21 (Théorèmes de Fubini et Tonelli). *Soit f est une fonction $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$ borélienne. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^{N_1}$, $y \mapsto f(x,y)$ est borélienne de $\mathbb{R}^{N_2} \to \mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$, et $x \mapsto \int f_\pm(x,y)\,\mathrm{d}y$ sont boréliennes de $\mathbb{R}^{N_1} \to \bar{\mathbb{R}}$, et de même en échangeant les rôles de x et y. Supposons maintenant que l'une des conditions suivantes soit vérifiée*

(i) $f \geq 0$ p.p. (Critère de Tonelli).

(ii) $\int |f| < \infty$ (Critère de Fubini).

Alors on a

$$\int f = \int_{\mathbb{R}^{N_1}} \left[\int_{\mathbb{R}^{N_2}} f(x,y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^{N_2}} \left[\int_{\mathbb{R}^{N_1}} f(x,y)\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y \ . \tag{3.5}$$

En particulier si (i) n'est pas vrai et que l'on veut vérifier (ii), on peut toujours utiliser que

$$\int |f| = \int_{\mathbb{R}^{N_1}} \left[\int_{\mathbb{R}^{N_2}} |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^{N_2}} \left[\int_{\mathbb{R}^{N_1}} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y \ . \tag{3.6}$$

3.1.6 Changement de variable

Si F et ϕ sont deux fonctions $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, alors on peut utiliser l'identité bien connue

$$(F \circ \phi)' = \phi' \times F' \circ \phi$$

pour en déduire en posant $f = F'$ que

$$\int_a^b f \circ \phi \times \phi' = F(\phi(a)) - F(\phi(b)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f \, . \tag{3.7}$$

Il existe une version multidimensionnelle de cette formule de changement de variable qui prend un point de vue légèrement différent afin de le rendre généralisable. La fonction f est juste supposée borélienne (et non continue) mais en revanche ϕ doit vérifier une hypothèse plus forte définie comme suit.

Définition 3.22 (Difféomorphismes)**.** *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^N$. On dit qu'une application $\phi : U \to V$ est un* difféomorphisme *de classe $\mathcal{C}^1$ (ou simplement un* difféomorphisme*) si ϕ est bijective, continûment dérivable sur U et son application réciproque ϕ^{-1} est continûment dérivable sur V.*

En utilisant la formule de différentielle pour la composition $\phi \circ \phi^{-1}$ qui est l'identité sur V, on a en particulier que l'application différentielle $D_x\phi$ est inversible pour tout $x \in U$ et pour tout $y \in V$,

$$D_y\phi^{-1} = [D_{\phi^{-1}(y)}\phi]^{-1} \, .$$

Définition 3.23. *Soit ϕ une fonction continûment dérivable sur un ouvert U. On appelle* jacobien *de ϕ et on note J_ϕ la fonction définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ par*

$$J_\phi(x) = \det[D_x(\phi)] = \det[\partial\phi(x)] \, ,$$

où $D_x(\phi)$ dénote l'application différentielle de f en x et $\partial\phi(x)$ la matrice jacobienne associée, c'est-à-dire $[D_x(\phi)]\,(y) = (\partial\phi(x))^T\, y$.

On a en particulier pour un difféomorphisme $\phi : U \to V$,

$$J_{\phi^{-1}} = \frac{1}{J_\phi \circ \phi^{-1}} : V \to U \, .$$

Il s'agit donc, pour $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$ borélienne, de trouver une expression de l'intégrale de $f \circ \phi$ pour $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ à l'aide d'une nouvelle intégrale ne faisant intervenir que la fonction f.

Dans le théorème suivant, pour un ensemble borélien $V \subseteq \mathbb{R}^N$, on dira que f est borélienne sur V si $\mathbb{1}_V \times f$ est borélienne. Bien sûr, il suffit de connaître f sur V pour le vérifier, on appliquera donc aussi cette définition si f est uniquement définie sur V. En particulier, si f est borélienne, elle l'est sur V.

Théorème 3.24 (Changement de variable dans $\mathbb{R}^N$)**.** *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^N$. Soit $\phi : U \to V$ un difféomorphisme. Alors, pour tout $f : V \to \mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$ borélienne, on a $f \circ \phi$ borélienne sur U et*

$$\int_U f \circ \phi = \int_V \frac{f}{|J_\phi \circ \phi^{-1}|} \, . \tag{3.8}$$

(en particulier, si l'une des intégrales est impropre, l'autre l'est aussi).

Donnons ici des formulations équivalentes de la conclusion.

(i) Pour tout $f : V \to \mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$ borélienne, on a $f \circ \phi$ borélienne sur U et

$$\int_U (f \circ \phi) \times |J_\phi| = \int_V f \, . \tag{3.9}$$

Cette formulation correspond à celle déjà mentionnée en (3.7) dans la cas $N = 1$ sous des hypothèses différentes. En effet, pour $N = 1$, $J_\phi = \phi'$ et la valeur absolue prend *automatiquement* soin du changement de signe éventuel antre $\int_a^b$ et $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)}$ dû au fait que $\phi(b)$ et $\phi(a)$ n'aurait pas le même ordre que a et b.

(ii) Pour tout $f : U \to \mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$ borélienne, on a $f \circ \phi^{-1}$ borélienne sur V et

$$\int_V f \circ \phi^{-1} = \int_U f \times |J_\phi| \, . \tag{3.10}$$

Pour obtenir l'assertion (i), il suffit d'appliquer (3.8) à la fonction $f \times (|J_\phi \circ \phi^{-1}|)$ au lieu de f. De même en remplaçant ϕ par ϕ^{-1} dans (3.8), on obtient (ii) et on peut revenir à la conclusion initiale du théorème en faisant les échanges inverses.

L'exemple classique de changement de variable est le changement de variable polaire.

Exemple 3.25 (Changement de variable polaire). On a pour tout f borélienne sur $\mathbb{R}^2$,

$$\int f = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}'} f(r\cos\theta, r\sin(\theta)) \, r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \, , \tag{3.11}$$

où $\mathbb{T}'$ désigne la droite réelle modulo 2π (i.e n'importe quel intervalle semi–ouvert de longueur 2π). Il s'agit d'une application presque directe du théorème 3.24. En effet, soit D la demi-droite réelle positive du plan complexe. On définit $\phi : U = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus D = V$ par

$$\phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \, .$$

Alors ϕ est un difféomorphisme de jacobien $J_\phi(r, \theta) = r$ et on obtient le résultat en remarquant que U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et que les intégrales écrites de chaque côté de (3.11) sont les mêmes quand on les remplace par $\int_V$ et $\int_U$ puisque qu'on ne change les fonctions à intégrer que sur des ensembles négligeables.

3.2 Espaces $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$

3.2.1 Espace $L^1(\mathbb{R}^N)$

Nous avons mentionné au paragraphe 3.1.3 que la relation $\overset{\text{p.p.}}{=}$ est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence de $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ est notée $[f]$, c'est-à-dire :

$$[f] = \left\{ g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}); f \overset{\text{p.p.}}{=} g \right\} \, .$$

En utilisant les définitions usuelles, il est aisé de montrer que cette relation d'équivalence est compatible avec les opérations usuelles sur les fonctions intégrables :

$$[f] + [g] = [f + g], \;\; \lambda[f] = [\lambda f], \;\; \|[f]\|_1 = \int |f|,$$

et donc l'espace des classes d'équivalence est un espace vectoriel normé.

Définition 3.26 (Espace $L^1(\mathbb{R}^N)$). *Nous appelons* $(L^1(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_1)$ *l'espace vectoriel normé des classes d'équivalence des fonctions intégrables.*

Le fait de considérer des classes d'équivalence plutôt que des fonctions peut sembler artificiel, mais cela est indispensable pour que $\|\cdot\|_1$ soit une norme. Il est de plus courant d'identifier (abusivement) $[f]$ à f, ce que nous nous efforcerons de ne pas faire en prenant soin de définir $f \in \mathcal{L}^1$ ou $f \in L^1$ dans les cas appropriés.

La première conséquence de la définition de l'evn $(L^1, \|\cdot\|_1)$ est de remarquer que la convergence $f_n \xrightarrow{L^1} f$ de la définition 3.19 appliquée aux classes d'équivalences correspond à la définition usuelle de convergence dans l'evn $(L^1, \|\cdot\|_1)$, $\lim_n \|f_n - f\|_1 = 0$.

Nous verrons plus tard (théorème 3.41) que L^1 est complet. Un autre résultat fondamental est le suivant.

Théorème 3.27. *L'intégrale définit une application linéaire continue de $L^1(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors $|\int f - \int g| = |\int (f-g)| \leq \int |f-g|$. □

Si

$$\sum_{k=1}^{n} f_k \xrightarrow{L^1} f \ ,$$

on écrira simplement

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \quad \textit{au sens } L^1 \ .$$

On admettra le résultat fondamental suivant (qui provient du fait que λ_N est une mesure de Radon).

Théorème 3.28. *L'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.*

3.2.2 Inégalités

Nous avons introduit les espaces $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ et $L^1(\mathbb{R}^N)$ aux paragraphes 3.1.2 et 3.2.1 et établit un certain nombre de propriétés intéressantes pour cet espace. Nous allons étendre cette définition en introduisant un exposant $p > 1$ autorisant des comportements moins restrictifs à l'infini.

Définition 3.29 (Espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$)**.** *Pour tout réel $p \in [1, \infty)$, nous appelons $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$ l'espace des fonctions boréliennes $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathbb{C}}$ vérifiant $|f|^p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. Cette définition est étendue à $p = \infty$ de la façon suivante. On appelle $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$ l'espace des fonctions boréliennes f à valeurs complexes pour lesquelles il existe une fonction g bornée telle que $g \overset{\text{p.p.}}{=} f$.*

Nous allons montrer que, pour tout $p \geq 1$, $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$ est un espace vectoriel et que

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \right)^{1/p} \tag{3.12}$$

définit une semi–norme sur cet espace. Pour $p = \infty$ ces propriétés sont immédiatement vérifiées en prenant

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}^N} |g(t)| \ : \ g \overset{\text{p.p.}}{=} f \right\} \ . \tag{3.13}$$

Lemme 3.30 (Inégalité de Young)**.** *Soient $a,\ b \in \mathbb{R}_+$, et $(p,q) \in]1, +\infty[^2$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \, . \tag{3.14}$$

Démonstration. La fonction exponentielle $x \mapsto \exp(x)$ est convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a donc, pour tout $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0,1]$,

$$\exp(tx_1 + (1-t)x_2) \le t\exp(x_1) + (1-t)\exp(x_2)\,.$$

Soient $a,\ b > 0$. On obtient (3.14) en posant $t = \frac{1}{p}$, $(1-t) = \frac{1}{q}$, $x_1 = p\ln(a)$ et $x_2 = q\ln(b)$. □

Les deux théorèmes suivants fournissent des inégalités de norme pour les produits et les sommes de fonctions.

Théorème 3.31 (Inégalité de Hölder)**.** *Soient* $1 \le p \le \infty$ *et* $1 \le q \le \infty$*, tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Si* $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$ *et* $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^N)$*, alors* $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ *et*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p\ \|g\|_q\ . \tag{3.15}$$

Démonstration. Cette inégalité est élémentaire si $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ ou si $p = 1$ ou $q = 1$. Nous supposons donc que $\|f\|_p \neq 0$ et $\|g\|_q \neq 0$ et que $1 < p < \infty$ (et donc $1 < q < \infty$). Pour tout réels positifs a et b, nous avons (Lemme 3.30) :

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^N$, en prenant

$$a = \tfrac{|f(x)|}{\|f\|_p} \text{ et } b = \tfrac{|g(x)|}{\|g\|_q},$$

nous obtenons

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\,\|g\|_q} \le \frac{|f(x)|^p}{p\,\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\,\|g\|_q^q}.$$

En intégrant les deux membres de l'identité précédente, nous obtenons,

$$\frac{\int |fg|}{\|f\|_p\,\|g\|_q} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

Théorème 3.32 (Inégalité de Minkowski)**.** *Soit* $1 \le p \le \infty$*. Si* $f,\ g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$*, alors* $f + g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$ *et*

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p\,. \tag{3.16}$$

Démonstration. La preuve du cas $p = \infty$ est laissée à titre d'exercice. Le cas $p = 1$ est déjà traité. Nous supposons donc $1 < p < \infty$. Pour tous nombres réels positifs a et b et $p \ge 1$, la convexité de $x \mapsto x^p$ implique

$$(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Donc, en tout point

$$|f+g|^p \le (|f| + |g|)^p \le 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p),$$

ce qui prouve que $f + g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$.

Soit $q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Comme

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \le |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1} \tag{3.17}$$

et $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^N)$ (comme $(p-1)q = p$), l'inégalité de Hölder implique que

$$|f||f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) \text{ et } |g||f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N).$$

De plus,

$$\begin{aligned}\int |f||f+g|^{p-1} &\leq \|f\|_p \left\||f+g|^{p-1}\right\|_q \\ &= \|f\|_p \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} = \|f\|_p \|f+g\|_p^{p/q} \ .\end{aligned}$$

De façon similaire,

$$\int |g||f+g|^{p-1} \leq \|g\|_p \|f+g\|_p^{p/q} \, .$$

Maintenant, en utilisant (3.17), nous obtenons

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &\leq \int |f||f+g|^{p-1} + \int |g||f+g|^{p-1} \\ &\leq \|f\|_p \|f+g\|_p^{p/q} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{p/q} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f+g\|_p^{p/q} \, .\end{aligned}$$

Comme $p - \frac{p}{q} = 1$, (3.16) en découle. □

L'inégalité suivante généralise les inégalités de convexité, à savoir, si φ est convexe et que les λ_i sont des réels positifs dont la somme est 1 et que les g_i sont des réels alors

$$\varphi(\sum_i \lambda_i g_i) \leqslant \sum_i \lambda_i \varphi(g_i) \ .$$

Proposition 3.33 (Inégalité de Jensen)**.** *Soient $-\infty \leq a < b \leq \infty$. On dispose d'une fonction φ définie sur un intervalle $]a,b[$ à valeurs réels et convexe et λ une fonction $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ borélienne positive de masse totale 1 ($\int \lambda = 1$) et enfin une fonction $g : \mathbb{R}^N \to]a,b[$ borélienne telle que $g \times \lambda$ est intégrable. Alors on a*

$$\varphi\left(\int g\,\lambda\right) \leqslant \int (\varphi \circ g)\,\lambda \ .$$

Démonstration. Par hypothèse λ peut être vu comme une densité sur $\mathbb{R}^N$ et donc

$$\int g\lambda = \mathbb{E}[g(X)] \ ,$$

où X est une variable aléatoire de $\mathbb{R}^N$ de densité λ. On applique alors l'inégalité de Jensen classique (cf. cours de probabilités) :

$$\varphi\left(\mathbb{E}[g(X)]\right) \leqslant \mathbb{E}[\varphi\left(g(X)\right)] \ .$$

□

On déduit de l'inégalité de Minkowski le résultat suivant.

Théorème 3.34. *Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. L'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. On a bien $\|f\|_p \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in \mathcal{L}^p$. De plus, $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$. L'inégalité (3.16) implique que $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ pour tout $f,\ g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$. L'application $f \mapsto \|f\|_p$ est donc une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$. □

3.2.3 L'espace de Banach $L^p(\mathbb{R}^N)$

Si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$, on a par le lemme 3.14,

$$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f \overset{\text{p.p.}}{=} 0.$$

Ces résultats permettent de construire les evn $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \in [1, \infty]$ et de définir $\|\cdot\|_p$ sur cet espace, pour lequel elle devient une norme, exactement comme on a procédé pour $p = 1$ (voir la définition 3.26 et ce qui précède cette définition).

Définition 3.35 (Espace $L^p(\mathbb{R}^N)$). *Soit $1 \leq p \leq \infty$. Nous appelons $(L^p(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_p)$ l'evn des classes d'équivalence des fonctions de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$.*

En particulier, si f et g sont des éléments de $L^p(\mathbb{R}^N)$, la relation $f = g$ (égalité des classes d'équivalence) signifie $\tilde{f} \overset{\text{p.p.}}{=} \tilde{g}$ pour tous $\tilde{f} \in f$ et $\tilde{g} \in g$.

Remarque 3.36. Il est courant de confondre une classe d'équivalence f de $L^p(\mathbb{R}^N)$ avec n'importe quel représentant $\tilde{f} \in f$. Cette ambiguïté ne porte en général pas à conséquence mais comporte un certain risque !

Définition 3.37 (Convergence dans $L^p(\mathbb{R}^N)$). *Soit $1 \leq p \leq \infty$. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $L^p(\mathbb{R}^N)$ (ou $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$) converge vers $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ (ou $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$), ce que nous notons $f_n \xrightarrow{L^p} f$, si*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0 .$$

Dans les résultats suivants, il faut bien **prendre garde au fait que $p < \infty$**.

Théorème 3.38 (Convergence dominée dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$). *Soit $1 \leq p < \infty$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$ une suite vérifiant :*

- *$f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$,*
- *il existe $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ p.p.*

Alors, $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$ et $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

Démonstration. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$ et $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n| \leq g$ presque-partout, nous avons $|f| \leq g$ presque partout et donc $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$.

On remarque ensuite que

$$0 \leq h_n = |f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p g^p \text{ p.p. } ,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $h_n \to 0$, p.p. quand $n \to \infty$. Comme $g^p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, on peut appliquer le Théorème de convergence dominée, qui implique que $h_n \to 0$ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$. □

Théorème 3.39 (Réciproque partielle du théorème 3.38). *Soit $1 \leq p < \infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$ et $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$. On suppose que $f_n \xrightarrow{L^p} f$ quand $n \to \infty$. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :*

- *$f_{n_k} \xrightarrow{\text{p.p.}} f$, lorsque $k \to +\infty$,*
- *il existe $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$ telle que $|f_{n_k}| \leq g$ p.p. , pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Ce théorème est une conséquence de la proposition suivante sur les séries absolument convergentes. □

Proposition 3.40 (Séries absolument convergentes dans L^p). *Soient $1 \leq p < \infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p < +\infty$. Alors :*

(i) $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$ *presque-partout. On pose* $f(x) \overset{\text{p.p.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

(ii) $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$

(iii) On a $\sum_{k=0}^{n} f_k \xrightarrow{L^p} f$ *lorsque* $n \to +\infty$. *De plus, il existe* $h \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$ *telle que* $|\sum_{k=0}^{n} f_k| \leq h$, *presque-partout, pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} |f_k| \ .$$

Clairement $|f_k| \in \mathcal{L}^p$ pour tout k et par suite $g_n \in \mathcal{L}^p$ pour tout n. De plus la suite $(g_n^p)_n$ est une suite croissante de fonction. D'après le théorème de convergence monotone pour les fonctions boréliennes positives (théorème 3.10) on obtient que la limite G de la suite de fonctions $(g_n^p)_n$ est borélienne et

$$\int G = \lim_n \int g_n^p \ .$$

Or, en appliquant l'inégalité de Minkowski (théorème 3.32), on a

$$\int g_n^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \right)^p \leq A = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p \right)^p < \infty \ .$$

On en conclut que G est intégrable. En particulier $G < \infty$ p.p. ce qui montre (i).

Pour montrer les 2 derniers points de la proposition, il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$ (Théorème 3.10) en prenant $h \overset{\text{p.p.}}{=} G^{1/p}$. En effet, par construction, $\sum_{k=0}^{n} f_k \xrightarrow{\text{p.p.}} f$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{k=0}^{n} f_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_k| \leq h \ , \quad \text{p.p.} \ ,$$

et $\int h^p = \int G < \infty$. Le Théorème de convergence dominée dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$ (Théorème 3.38) montre alors que $f \in \mathcal{L}^p$ (point (ii)) et $\sum_{k=0}^{n} f_k \xrightarrow{L^p} f$ (conclusion du point (iii)). □

Théorème 3.41. *Soit $1 \leq p < \infty$. L'espace vectoriel normé $(L^p, \ \|\cdot\|_p)$ est complet. (C'est un espace de Banach).*

Démonstration. La proposition 3.40 montre que toute série absolument convergente de L^p est donc convergente dans L^p. Comme $(L^p, \ \|\cdot\|_p)$ est un evn et que toute série absolument convergente est convergence dans cet espace, $(L^p, \ \|\cdot\|_p)$ est complet. □

Enfin le résultat suivant est une extension du théorème 3.28 à $p \in]1, \infty[$.

Théorème 3.42. *Soit $1 \leq p < \infty$. L'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $(L^p(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_p)$.*

Démonstration. On considère des fonctions à valeurs réelles, le résultat pour les fonctions à valeurs complexes étant une conséquence du résultat dans ce cas particulier.

Le résultat est déjà connu pour $p = 1$ (théorème 3.28). Pour l'étendre au cas $p > 1$, on va utiliser le résultat pour $p = 1$. Soit $f \in L^p$ et $\epsilon > 0$. Soit n un entier suffisamment grand pour que

$$\left\| f_+ - (f_+ \wedge n) \times \mathbb{1}_{[-n,n]} \right\|_p \leq \epsilon/2 \, . \tag{3.18}$$

(un tel entier n par application du théorème de convergence dominée dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$). Alors $(f_+ \wedge n) \times \mathbb{1}_{[-n,n]}$ est intégrable (car cette fonction est bornée à support compact). Il existe d'après le théorème 3.28 $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ à valeurs dans $[0, n]$ et à support dans $[-n-1, n+1]$ tel que

$$\left\| g - (f_+ \wedge n) \times \mathbb{1}_{[-n,n]} \right\|_1 \leq n^{1-p} (\epsilon/2)^p \, .$$

En utilisant que $a^p \leq a$ pour $0 \leq a \leq 1$, on obtient que

$$\begin{aligned}
\left\| g - (f_+ \wedge n) \times \mathbb{1}_{[-n,n]} \right\|_p^p &= n^p \int \left| \frac{g - (f_+ \wedge n) \times \mathbb{1}_{[-n,n]}}{n} \right|^p \\
&\leq n^p \int \left| \frac{g - (f_+ \wedge n) \times \mathbb{1}_{[-n,n]}}{n} \right| \\
&= n^{p-1} \left\| g - (f_+ \wedge n) \times \mathbb{1}_{[-n,n]} \right\|_1 \\
&\leq (\epsilon/2)^p \, .
\end{aligned}$$

Avec l'inégalité (3.18), on obtient $\| f_+ - g \|_p \leq \epsilon$. De même on peut trouver $h \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ telle que $\| f_- - h \|_p \leq \epsilon$. Donc $\| f - (g - h) \|_p \leq 2\epsilon$. Ceci prouve la densité des fonctions continues à support compact. □

3.2.4 Inclusions entre L^p ?

En général il n'y a pas d'inclusions entre les espace L^p cependant, lorsqu'une fonction est à support compact on a le résultat suivant (on peut trouver la démonstration à la proposition 7.4) :

Proposition 3.43. *Si $f \in L^p$ et que f est à support compact alors $f \in L^q$ pour tout $q \leq p$. Et ceci est aussi vrai pour $p = \infty$.*

On peut aussi se demander, pour une fonction fixée, pour quels p a-t-on $f \in L^p$? La proposition suivante dit que l'ensemble des p possibles forme un intervalle (ouvert, fermé ou semi-fermé) :

Proposition 3.44. *Si $p \leq q$ et que $f \in L^p \cap L^q$ alors $\forall p', \; p \leq p' \leq q, \quad f \in L^{p'}$. Autrement dit $(L^p \cap L^q) \subset L^{p'}$ dès que $p \leq p' \leq q$*

Démonstration. Si p et q sont finis alors il suffit de remarque que $min(|f|^p, |f|^q) \leq |f|^{p'} \leq max(|f|^p, |f|^q)$ (en distinguant les cas $|f| \geq 1$ et $|f| < 1$). Si $q = \infty$, alors on peut diviser f par $\|f\|_\infty$ sans changer son appartenance aux esapces $L^{p,p',q}$. Mais alors $|f| \leq 1$ et $p < p'$ implique que $|f|^{p'} \leq |f|^p$, ce qui montre que $f \in L^{p'}$. □

3.3 Convolution

3.3.1 Convolution dans L^1

On a vu à la proposition 3.11 si f est intégrable, alors la fonction translatée $\mathcal{T}_t f$ est intégrable pour tout $t \in \mathbb{R}^N$ et $\int \mathcal{T}_t f = \int f$. Donc pour f intégrable, on peut voir $t \mapsto \mathcal{T}_t f$ comme une fonction à valeurs dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ ou même dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ si on considère les classes d'équivalence de $\overset{\text{p.p.}}{=}$. Le théorème suivant établit sa continuité.

Théorème 3.45. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors la fonction $t \mapsto \mathcal{T}_t f$ est continue de $\mathbb{R}^N$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Comme $\mathcal{T}_{t+s} f = \mathcal{T}_t(\mathcal{T}_s f)$ et que $\mathcal{T}_s f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, il suffit de montrer la continuité en 0, c'est-à-dire,

$$\lim_{t \to 0} \int |\mathcal{T}_t f - f| = 0 .$$

S $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, on obtient facilement le résultat par convergence dominée.

Supposons maintenant que f est une fonction intégrable arbitraire. Soit $\epsilon > 0$. D'après le théorème 3.28, il existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ tel que $\|f - g\|_1 \leq \epsilon$. Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_t f - f\|_1 &\leq \|\mathcal{T}_t f - \mathcal{T}_t g\|_1 + \|\mathcal{T}_t g - g\|_1 + \|g - f\|_1 \\ &= \|\mathcal{T}_t g - g\|_1 + 2\,\|g - f\|_1 \\ &\leq \|\mathcal{T}_t g - g\|_1 + 2\epsilon . \end{aligned}$$

Comme $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, nous savons que $\mathcal{T}_t g$ converge vers g dans L^1 quand $t \to 0$, ce qui conclut le résultat. □

On introduit la définition suivante.

Définition 3.46 (Produit de convolution)**.** *Dans toute la suite, pour f et g boréliennes, on appelle le* produit de convolution *de f et g et l'on note $f \star g$ la fonction définie par*

$$(f \star g)(x) = \int f(x - y) g(y) \mathrm{d}y$$

en tout point x où cette intégrale est correctement définie.

On discute maintenant quelques propriétés élémentaires des produits de convolution.

Théorème 3.47. *Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, alors $f \star g$ est défini et fini en presque tout point. La classe d'équivalence ainsi définie, aussi notée $f \star g$, appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$ et l'on a $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ et*

$$\int f \star g = \int f \times \int g . \tag{3.19}$$

Démonstration. Par le critère de Tonelli du théorème 3.21, on a

$$\int |f(x - y) g(y)| \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int \left(\int |f(x - y) g(y)| \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty .$$

On en déduit que

$$\int \left| \int f(x - y) g(y) \mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \leq \int \left(\int |f(x - y) g(y)| \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \|f\|_1 \|g\|_1 \ ,$$

et donc que $x \mapsto \int f(x - y) g(y) \mathrm{d}y = f \star g(x)$ est intégrable et vérifie $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Le critère de Fubini du théorème 3.21 donne quant à lui (3.19). □

Il est clair que $f \star g(x)$ est invariant tant que f et g restent dans les mêmes classes d'équivalence. D'après le théorème 3.47, on peut donc voir l'application $(f, g) \mapsto f \star g$ comme une application de $L^1(\mathbb{R}^N) \times L^1(\mathbb{R}^N) \to L^1(\mathbb{R}^N)$. Par linéarité de l'intégrale, il est clair que cette application est bilinéaire. On a aussi les propriétés suivantes.

Théorème 3.48. *Le produit de convolution comme application de $L^1(\mathbb{R}^N) \times L^1(\mathbb{R}^N) \to L^1(\mathbb{R}^N)$ est commutatif et associatif.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors $f \star g = g \star f$. En appliquant le théorème 3.24 avec $\phi : y \mapsto x - y$ (de Jacobien égal à -1), on a pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} f \star g(x) &= \int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int g(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= g \star f(x) \ . \end{aligned}$$

Soient f, g et $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$(f \star g) \star h(x) = \int (f \star g)(x-y)h(y)\,\mathrm{d}y = \int \left(\int f(z-x+y)g(z)h(y)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \ .$$

On voit facilement que le critère de Fubini du théorème 3.21 s'applique et que l'on peut effectuer ces deux intégrales dans l'ordre qu'on veut sans changer le résultat. En l'effectuant d'abord par rapport à y puis à z on trouve

$$(f \star g) \star h(x) = \int (f \star h(x-z))\, g(z)\,\mathrm{d}z = (f \star h) \star g(x) \ .$$

D'où le résultat en jouant avec la commutativité. □

3.3.2 Convolution entre L^p et L^q

On a restreint la définition de $f \star g$ pour f et g dans $L^1(\mathbb{R}^N)$. Il est cependant clair que $f \star g(x)$ est bien défini pour des fonctions f et g qui ne sont pas toutes deux intégrables. Le résultat suivant explore d'autres cas possibles qui restent très simples.

Théorème 3.49. *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors on a les assertions suivantes.*

(i) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$, la fonction $f \star g$ est définie en tout point et est une fonction continue bornée par $\|f\|_p \|g\|_q$: la convolution définie sur $L^p \times L^q$ est à valeurs dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$.

(ii) La convolution $(f, g) \mapsto f \star g$ définie sur $L^p(\mathbb{R}^N) \times L^q(\mathbb{R}^N)$ vue comme application à valeurs dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ (on identifie $f \star g$ à sa classe d'équivalence) est bilinéaire continue.

(iii) Si de plus p et q sont finis, alors $f \star g$ tend vers 0 à l'infini : la convolution définie sur $L^p \times L^q$ est à valeurs dans $\mathcal{C}^o(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration. D'abord il faut remarquer que p et q ne peuvent être infinis tous les deux en même temps. On va supposer que p est fini.

On fixe $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ et on note T_1 la fonction de $\mathbb{R}^N$ vers $L^p(\mathbb{R}^N)$ qui est définie par

$$T_1 : x \mapsto T_1(x) = \mathcal{T}_x f \ .$$

D'après le Théorème 3.45, la fonction T_1 est continue.

On note T_2 la fonction qui va de $L^p(\mathbb{R}^N)$ vers lui-même définie par

$$h \mapsto (t \mapsto h(-t))$$

(i.e la fonction symétrie). Il est clair que T_2 est linéaire et que c'est une isométrie. C'est donc une application continue. Or on a

$$f \star g(x) = \int T_2 \circ T_1(x) \times g \ .$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a $T_2 \circ T_1(x) \times g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$|(f \star g)(x)| \leqslant \|T_2(T_1(x)) \times g\|_1 \leq \|T_2(T_1(x))\|_p \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q \ .$$

ce qui montre que $f \star g$ est bien défini en tout point et borné sur $\mathbb{R}^N$. On a aussi immédiatement la bilinéarité ce qui donne le point (ii).

On note T_3 la fonction qui va de $L^p(\mathbb{R}^N)$ vers $L^1(\mathbb{R}^N)$ définie par

$$h \mapsto h \times g \ .$$

Enfin, on note T_4 la fonction de $L^1(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathbb{C}$ par

$$h \mapsto \int h$$

C'est bien une application linéaire continue car $|\int h| \leqslant \|h\|_1$.

Alors, on remarque que

$$(f \star g)(x) = T_4(T_3(T_2(T_1(x))))$$

comme composition de fonctions continues, la fonction $f \star g$ est continue, ce qui montre le point (i).

Il nous reste à prouver le point (iii). On suppose p et q finis. Il est clair que si f et g sont à support compact, $f \star g$ tend bien vers 0 (elle est nulle à partir d'une certaine position). La fonction convolution est bilinéaire continue. Si f_n et g_n sont des suites de fonctions à support compact qui tendent vers f et g respectivement, alors, la suite $f_n \star g_n$ est une suite de fonctions à support compact qui tend dans L^∞ vers $f \star g$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe N tel que $n \geqslant N \Rightarrow \|f_n \star g_n - f \star g\|_\infty \leqslant \epsilon$. De plus, comme $f_N \star g_N$ tend vers 0.

$$\exists A,\ |x| \geqslant A \Rightarrow |(f_N \star g_N)(x)| \leqslant \epsilon$$

On en déduit que

$$\exists A,\ |x| \geqslant A \Rightarrow |(f \star g)(x)| \leqslant 2\epsilon$$

□

Nous concluons avec un troisième cas général pour lequel le produit de convolution est correctement défini : il est toujours possible de considérer le produit de convolution d'une fonction intégrable avec une fonction de l'espace L^p et on montre que le résultat est L^p. Pour cela nous utiliserons l'inégalité de Jensen.

Théorème 3.50. *(Convolution L^p contre L^1) Soit $f \in L^1$ et $g \in L^p$ avec p fini. Alors $f \star g$ est défini et fini en presque tout point. De plus l'application $(f, g) \mapsto f \star g$ définie sur $L^1 \times L^p$ est à valeurs dans L^p et est bilinéaire continue avec*

$$\|f \star g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p \ .$$

Démonstration. D'abord si f est nulle presque partout alors le résultat est trivial. Sinon, quitte à diviser par une constante, on peut supposer que $\|f\|_1 = 1$. Nous notons $\lambda(t) = |f(t)|$. La fonction λ vérifie l'hypothèse de l'inégalité de Jensen. On pose $\varphi(z) = |z|^p$. C'est une fonction convexe. Considérons la quantité suivante (qui existe, possiblement infinie)

$$\left| \int \lambda(t)|g(x-t)| \, \mathrm{d}t \right|^p$$

Si $t \mapsto \lambda(t)|g(x-t)|$ est L^1 alors on applique l'inégalité de Jensen et on a

$$\left|\int \lambda(t)|g(x-t)|\ \mathrm{d}t\right|^p \leqslant \int \lambda(t)|g(x-t)|^p\ \mathrm{d}t\ . \tag{3.20}$$

En fait cette inégalité reste vraie quand $t \mapsto \lambda(t)|g(x-t)|$ est d'intégrale infinie car alors

$$\int \lambda(t)|g(x-t)|^p\ \mathrm{d}t = +\infty\ .$$

En effet, supposons que $\int \lambda(t)|g(x-t)|^p\ \mathrm{d}t < \infty$. En utilisant que $a \leq a^p$ pour tout $a \geq 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\int \lambda(t)|g(x-t)|\ \mathrm{d}t &\leq \int_{|g(x-\cdot)|\leq 1} \lambda + \int_{|g(x-\cdot)|>1} \lambda(t)|g(x-t)|^p\ \mathrm{d}t \\ &\leq \int \lambda + \int \lambda(t)|g(x-t)|^p\ \mathrm{d}t \\ &< \infty\ .\end{aligned}$$

On a donc toujours l'inégalité (3.20) y compris quand le membre de gauche est infini.

Nous allons utiliser le théorème 3.21 pour montrer que $f \star g$ existe et est dans L^p. En effet, on remarque

$$\int \left(\int \lambda(t)|g(x-t)|^p\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}t = \|g\|_p^p < \infty\ .$$

D'après le critère de Tonelli cela implique que

$$\int \left(\int \lambda(t)|g(x-t)|^p\ \mathrm{d}t\right)\ \mathrm{d}x = \|g\|_p^p$$

et donc que la fonction

$$x \mapsto \int \lambda(t)|g(x-t)|^p\ \mathrm{d}t$$

est intégrable d'intégrale $\|g\|_p^p$. Mais nous avons montré que la fonction

$$x \mapsto \left|\int \lambda(t)|g(x-t)|\ \mathrm{d}t\right|^p$$

est plus petite en tout point que $\int \lambda(t)|g(x-t)|^p\ \mathrm{d}t$. Elle est donc intégrable et d'intégrale inférieure ou égale à $\|g\|_p^p$. Donc

$$\int \left|\int \lambda(t)\ |g(x-t)|\ \mathrm{d}t\right|^p\ \mathrm{d}x \leqslant \int\int \lambda(t)|g(x-t)|^p\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x = \|g\|_p^p\ .$$

D'où

$$\|f \star g\|_p \leqslant \|\lambda \star |g|\|_p \leqslant \|g\|_p\ ,$$

ce qui donne bien le résultat pour $\|f\|_1 = 1$. $\square$

Chapitre 4

Espaces de Hilbert

4.1 Définitions

Définition 4.1. *Soit E un K-espace vectoriel, K désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'application $\langle .|. \rangle$ de $E \times E$ dans K est appelée produit scalaire (si $K = \mathbb{R}$) ou produit hermitien (si $K = \mathbb{C}$) si*

(i) $\langle .|. \rangle$ *est linéaire par rapport à son premier argument*

(ii) $\forall x, y \in E \qquad \langle x|y \rangle = \overline{\langle y|x \rangle}$

(iii) $\langle x|x \rangle \geq 0$

(iv) $\langle x|x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

L'espace E muni de $\langle .|. \rangle$ s'appelle un espace pré-hilbertien.

Remarques : Dans le cas où $K = \mathbb{R}$, les propriétés (i) et (ii) impliquent la linéarité par rapport à la deuxième variable. Dans le cas où $K = \mathbb{C}$, ces même propriétés impliquent que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, tout $x, y, z \in E$, $\langle z|x + \lambda y \rangle = \langle z|x \rangle + \overline{\lambda} \langle z|y \rangle$. On dit que l'application $\langle .|. \rangle$ est sesqui-linéaire.

Comme en dimension finie, nous avons le résultat suivant [1].

Proposition 4.2. *Inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour tout $f, g \in E$*

$$| \langle f|g \rangle |^2 \leq \langle f|f \rangle \langle g|g \rangle ,$$

l'égalité n'ayant lieu que si f et g sont colinéaires.

Démonstration. Si f ou g est nul, le résultat est immédiat.

Sinon, on pose $\langle f|g \rangle = e^{i\theta} | \langle f|g \rangle |$ (dans le cas de $K = \mathbb{R}$, $\theta = 0$ et la même démonstration s'applique) et on développe $||f + te^{i\theta} g||^2 \geq 0$, ce qui donne

$$||f||^2 + t \left\langle f \middle| e^{i\theta} g \right\rangle + t \left\langle e^{i\theta} g \middle| f \right\rangle + t^2 ||g||^2 \geq 0, \text{ soit}$$

$$||f||^2 + 2t | \langle f|g \rangle | + t^2 ||g||^2 \geq 0.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz exprime que le discriminant de ce trinôme de degré deux est négatif (ce qui est nécessaire pour que le trinôme soit toujours positif).

Le cas d'égalité implique que le discriminant du trinôme précédent est nul, ce qui implique l'existence d'un certain t tel que $f + te^{i\theta} g = 0$ et que donc f et g sont colinéaires.

□

1. On note $\|f\|^2 = \langle f|f \rangle$. On verra plus loin que $\|.\|$ est une norme

Une conséquence immédiate de ce résultat est que le produit scalaire permet de définir une norme sur E.

Proposition 4.3. *Soit E un espace pré-hilbertien. Alors*

$$||x|| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$$

est une norme sur E.

Démonstration. Tout est immédiat sauf l'inégalité triangulaire qui est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re(\langle x|y\rangle) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x|y\rangle| + \|y\|^2 \leq$$

$$\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

□

La relation de Pythagore reste valable comme en dimension finie : si f et g sont orthogonaux (c'est–dire si $\langle f|g\rangle = 0$), alors

$$||f+g||^2 = ||f||^2 + ||g||^2.$$

Cette relation s'étend à une somme finie de vecteurs orthogonaux deux à deux.

Définition 4.4. *Un espace pré-hilbertien est dit espace de Hilbert s'il est complet pour la norme $||x|| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$.*

Exemples d'espaces de Hilbert

- Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ munis respectivement de $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ et $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ sont des espaces de Hilbert.
- $L^2(\mathbb{R}^N)$, muni du produit scalaire $\langle f|g\rangle = \int f(x)\overline{g(x)}dx$ est également un espace de Hilbert : on a vu qu'il est complet (Théorème 3.41).
- On pose $l^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $u = (u_1, ..., u_n, ...)$ avec $u_n \in \mathbb{C}$ et vérifiant $\sum_n |u_n|^2 < \infty$. Muni du produit scalaire $(u,v) = \sum_n u_n \overline{v_n}$, c'est un espace de Hilbert. En effet, on remarque que $l^2(\mathbb{N})$ peut être plongé naturellement dans $L^2(\mathbb{R})$ en posant $u(x) = u_n$ si $x \in [n, n+1[$ et qu'il apparaît alors comme un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$. La complétude de $L^2(\mathbb{R})$ implique donc la complétude de $l^2(\mathbb{N})$.

4.2 Projection et orthogonalité

Le théorème suivant est l'un des résultats fondamentaux dans les espaces de Hilbert. Tout d'abord, on rappelle la définition d'un ensemble convexe.

Définition 4.5. *Un sous-ensemble A d'un espace vectoriel est dit convexe si pour tout x, y et tout réel $t \in [0,1]$ on a*

$$tx + (1-t)y \in A$$

Théorème 4.6. *(**Théorème de projection**) Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé et non vide de H.*

Pour tout f de H, on note $d(f, C)$ la borne inférieure des distances entre f et tous les points de C.

Pour tout $f \in H$ il existe un unique point de C, appelé projection de f sur C *et noté g ci-dessous dont la distance à f soit minimale.*

$$\forall h \in C, \quad d(f, C) = \|f - g\| \leq \|f - h\|$$

Cette projection se caractérise comme l'unique point g de C tel que

$$\forall h \in C, \ \Re\left(\langle f - g | h - g \rangle\right) \leq 0. \tag{4.1}$$

Si C est un sous-espace vectoriel fermé de H, la projection de f est l'unique point $g \in C$ tel que $f - g$ soit orthogonal à tous les éléments de C.

Lemme 4.7. *(identité du parallélogramme). La somme des carrés des longueurs des cotés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses diagonales.*

$$||u||^2 + ||v||^2 = \frac{1}{2}(||u + v||^2 + ||u - v||^2).$$

Démonstration. (du théorème 4.6) Montrons d'abord l'**unicité**.

S'il existait deux éléments g_1 et g_2 réalisant $\|f - g_1\| = \|f - g_2\| = d(f, C)$, on aurait en considérant leur milieu $\frac{g_1+g_2}{2}$ et en appliquant l'identité du parallélogramme à $u = f - g_1$ et $v = f - g_2$,

$$\frac{1}{2}||2f - (g_1 + g_2)||^2 = ||f - g_1||^2 + ||f - g_2||^2 - \frac{1}{2}||g_1 - g_2||^2.$$

Donc $||f - \frac{g_1+g_2}{2}||^2 < d(f, C)^2$. Mais comme $\frac{g_1+g_2}{2}$ est dans C (par convexité), c'est impossible.

On montre maintenant l'**existence** du projeté.

Soit g_n une suite de C telle que $||f - g_n|| \to d(f, C)$. En utilisant de nouveau l'inégalité du parallélogramme,

$$\frac{1}{2}||g_n - g_m||^2 = ||f - g_n||^2 + ||f - g_m||^2 - 2||f - \frac{g_n + g_m}{2}||^2.$$

Comme C est convexe on a $||f - \frac{g_n+g_m}{2}||^2 \geq d(f, C)^2$ ce qui implique que

$$\frac{1}{2}||g_n - g_m||^2 \leq ||f - g_n||^2 + ||f - g_m||^2 - 2d(f, C)^2.$$

Quand n et m tendent vers l'infini, le membre de droite tend vers 0. La suite g_n est donc de Cauchy et converge (car H est complet) vers un élément g de C (car C est fermé).

Montrons l'inégalité (4.1). Pour tout $h \in C$, et $t \in [0, 1]$, les points $g + t(h - g)$ du segment $[g, h]$ appartiennent à C. On a donc

$$\forall t \in [0, 1], \ ||g - f||^2 \leq ||f - g - t(h - g)||^2 \text{ ce qui est équivalent à} \tag{4.2}$$

$$\forall t \in [0, 1], \ t^2||h - g||^2 - 2t\Re\left(\langle f - g | h - g \rangle\right) \geq 0.$$

On divise par $t > 0$ et on fait tendre t vers 0^+ pour obtenir (4.1). Réciproquement, si (4.1) est vérifiée pour tout $h \in C$, (4.2) aussi et en faisant $t = 1$ on voit que $||f - g||$ réalise la distance minimale de f à un point de C.

Considérons pour terminer le cas où C est un sous-espace vectoriel fermé de H. Soit g la projection de f. Pour tout v dans C, $g + e^{i\theta}v$ appartient à C. On a donc $\Re(e^{i\theta}\langle v | g - f \rangle) \leq 0$ pour tout θ et donc $\langle v | g - f \rangle = 0$. Réciproquement, si $g \in C$ vérifie $\langle v | g - f \rangle = 0$ pour tout $v \in C$, on a $\langle v - g | g - f \rangle = 0$ (car $v - g \in C$) pour tout v dans C et par la deuxième partie du théorème g est bien la projection de f sur C. $\square$

Exercice de cours 4.8. *Démontrer en utilisant (4.1) que la projection P sur un convexe fermé est une application contractante : $||Pf_1 - Pf_2|| \leq ||f_1 - f_2||$. On pourra étudier la dérivée du trinôme $\|t(f-g) + (1-t)(Pf - Pg)\|^2$ en $t = 0\ldots$*

Définition 4.9. *On appelle orthogonal d'un sous-ensemble A de H et note $A^\perp$ l'ensemble*

$$A^\perp = \{v, \forall f \in A,\ \langle v|f\rangle = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel fermé de H.

Démonstration. Pour v fixé, la fonction $f \mapsto \langle f|v\rangle$ est linéaire et continue (par Cauchy-Schwarz). On note $K_v = \{f,\ \ \langle f|v\rangle = 0\}$ son noyau, c'est un sous-espace vectoriel fermé. On remarque que

$$A^\perp = \cap_{v\in A} K_v.$$

C'est une intersection de sous-espaces vectoriels fermés. Or n'importe quelle intersection de fermés est fermée et de même pour une intersection de sous-espaces vectoriels. □

Corollaire 4.10. *Si F est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H, alors tout élément de H se décompose de manière unique sous la forme*

$$f = g + h,\ g \in F,\ h \in F^\perp \tag{4.3}$$

où g est la projection de h sur F et h la projection de f sur $F^\perp$. On a donc

$$H = F + F^\perp,\ (F^\perp)^\perp = F,\ H^\perp = \{0\}.$$

Si $A \subset H$, on a toujours

$$A^\perp = \overline{\mathrm{Vect}(A)}^\perp \text{ et donc } (A^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Vect}(A)}.$$

Remarque 4.11. L'application qui à f associe g dans le corollaire précédent est une application linéaire et s'appelle projecteur orthogonal sur F.

Démonstration. La relation (4.3) est une conséquence du théorème 4.6 : si $f \in H$ on note g sa projection sur F. Par la dernière assertion du théorème de projection, cette projection est caractérisée par le fait que $f - g = h \in F^\perp$. Comme $f - h = g \in F \subset F^{\perp\perp}$, h est par cette même caractérisation la projection de f sur $F^\perp$. Donc, on a décomposé f en somme d'un élément de F (g) et d'un élément de $F^\perp$ (h). Comme, il est clair que l'intersection de F et de $F^\perp$ est réduite à $\{0\}$ cette décomposition est unique et on a

$$H = F \oplus F^\perp.$$

Montrons que $F = F^{\perp\perp}$. On a immédiatement $F \subset F^{\perp\perp}$. Donc la décomposition $f = g + h$ sur F et $F^\perp$ est aussi une décomposition sur $F^{\perp\perp}$ et $F^\perp$. $F^\perp$ étant fermé cette dernière décomposition est unique. Or si $f \in F^{\perp\perp}$ on a $f = f + 0$ qui est une décomposition sur $F^{\perp\perp}$ et $F^\perp$. Par identification on obtient $f \in F$.

Comme $\{0\}^\perp = H$ on a $H^\perp = \{0\}^{\perp\perp} = \{0\}$.

On remarque enfin que $A^\perp = \overline{\mathrm{Vect}(A)}^\perp$. En effet, si un élément f est orthogonal à A, il est orthogonal aux combinaisons linéaires d'éléments de A et donc à $\mathrm{Vect}(A)$ et par un passage à la limite immédiat à $\overline{\mathrm{Vect}(A)}$. Donc

$$(A^\perp)^\perp = (\overline{\mathrm{Vect}(A)})^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Vect}(A)}.$$

□

Corollaire 4.12. *et définition* **totalité** *d'un système dans un Hilbert. On dit qu'un sous-ensemble A de l'espace de Hilbert H est total si l'espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(A)$ *engendré par A est dense dans H. Pour que A soit total dans H, il faut et il suffit que $A^\perp$ soit réduit à $\{0\}$.*

Démonstration. Si A est total, $\overline{\mathrm{Vect}(A)}$ est égal à H et donc $A^\perp = \overline{\mathrm{Vect}(A)}^\perp = H^\perp = \{0\}$. Réciproquement, si $A^\perp = \{0\}$, on a $\overline{\mathrm{Vect}(A)}^\perp = \{0\}$ et donc $\overline{\mathrm{Vect}(A)} = H$, ce qui signifie que A est total. □

Théorème 4.13. *(***Riesz***) Pour tout $f \in H$, l'application $v \in H \mapsto \langle v|f\rangle$ est une forme linéaire continue sur H. Réciproquement, si $\tilde{f}$ est une forme linéaire continue sur H, il existe un unique élément $f \in H$ tel que*

$$\tilde{f}(v) = \langle v|f\rangle\,.$$

Démonstration. La première assertion découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Réciproquement, soit $\tilde{f}$ une forme linéaire continue et non nulle sur H et L son noyau, qui est un espace vectoriel fermé. Comme $\tilde{f} \neq 0$, L est un sous-espace strict et donc $L^\perp$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit $g \in L^\perp$, non nul. Quitte à multiplier g par une constante, on peut supposer que $\tilde{f}(g) = 1$. On pose pour tout $v \in H$

$$v = \tilde{f}(v)g + (v - \tilde{f}(v)g) = v_1 + v_2.$$

Le second terme vérifie $\tilde{f}(v_2) = 0$ et appartient donc à L. Comme $g \in L^\perp$, on a donc

$$\langle v|g\rangle = \tilde{f}(v)||g||^2.$$

Il en résulte que

$$\tilde{f}(v) = \left\langle v \middle| \frac{g}{||g||^2} \right\rangle.$$

$g/\|g\|^2$ est le vecteur f annoncé dans le théorème. L'unicité de ce vecteur vient du fait que si $\langle v|g_1 - g_2\rangle = 0$ pour tout v, alors $g_1 - g_2$ est dans $H^\perp = \{0\}$. □

Le théorème que nous allons maintenant énoncer est parfois appelé "théorème fondamental du traitement du signal", car il exprime que tout traitement linéaire continu appliqué à un signal temporel se réduit au choix d'une convolution. En première analyse, le traitement du signal doit être invariant par translation temporelle, puisque ce traitement ne dépend en général pas de l'instant, inconnu, où le signal commence.

Définition 4.14. *Si f est une fonction sur $\mathbb{R}^N$ et $x \in \mathbb{R}^N$, on rappelle que $(\mathcal{T}_x f)(y) = f(y-x)$. C'est la translatée de f par le vecteur x. On dit qu'un opérateur T agissant sur des fonctions est invariant par translation si $T(\mathcal{T}_x f) = \mathcal{T}_x(Tf)$.*

On note $C_b(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions continues et bornées, muni de la norme $||f||_\infty$. On vérifie aisément que c'est un espace de Banach.

Théorème 4.15. *(L'universalité de la convolution) Soit $T : L^2(\mathbb{R}^N) \to C_b(\mathbb{R}^N)$ un opérateur linéaire, invariant par translation et continu. Alors il existe g dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ telle que $T(f) = g \star f$.*

Démonstration. On considère la forme linéaire $f \to (Tf)(0)$, qui est continue. En effet,

$$|(Tf)(0)| \leq ||Tf||_\infty \leq A||f||_{L^2},$$

la première inégalité exprime qu'une fonction continue est plus petite en zéro (ou en tout point de R^N) que sa norme $\|.\|_\infty$. La seconde exprime la continuité de l'opérateur T.

Il existe donc, par le théorème de Riesz, une fonction $g_0 \in L^2$ telle que

$$(Tf)(0) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\overline{g_0}(y)dy. \tag{4.4}$$

Par hypothèse aussi, $T(\mathcal{T}_x f) = \mathcal{T}_x T f$. Donc par (4.4),

$$Tf(x) = (\mathcal{T}_{-x}(Tf))(0) = T(\mathcal{T}_{-x} f)(0) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x+y)\overline{g_0}(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\overline{g_0}(-y)dy = (f \star g)(x),$$

où $g(y) = \overline{g_0}(-y)$.

□

4.3 Bases hilbertiennes

Nous commençons cette section par une caractérisation de la convergence d'une série d'éléments orthogonaux dans un espace de Hilbert.

Proposition 4.16. *Soient $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ des vecteurs deux à deux orthogonaux dans un espace de Hilbert. Alors*

$$\left(\sum_{n=0}^{N} x_n \text{ converge lorsque } N \to \infty\right) \Leftrightarrow \left(\sum ||x_n||^2 < +\infty\right)$$

Et dans ce cas toutes les séries $\sum_{n=0}^N x_{\sigma(n)}$ convergent vers la même limite quelque soit σ une permutation de $\mathbb{N}$.

Démonstration. Si $\sum x_n$ converge, alors par le théorème de Pythagore $\sum_{n=0}^N ||x_n||^2 = ||\sum_{n=0}^N x_n||^2$ qui converge par continuité de la norme. Réciproquement si $\sum ||x_n||^2$ converge, alors par Pythagore $||\sum_{n=p}^q x_n||^2 = \sum_{n=p}^q ||x_n||^2$ et donc $\sum x_n$ est une suite de Cauchy et converge (par complétude).

Par ailleurs, si σ est une permutation et que $\sum ||x_n||^2 < \infty$ alors $\sum ||x_{\sigma(n)}||^2 < \infty$ et donc $\sum_{n=0}^N x_{\sigma(n)}$ converge par la première partie de la proposition. Il reste à montrer que la limite ne dépend pas de σ. Soit N un entier et $m(N)$ défini comme le premier entier tel que

$$\{0, \dots, N\} \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(m(N))\}$$

On note $S_N = \sum^N x_n$ et $S^\sigma_{m(N)} = \sum^{m(N)} x_{\sigma(k)}$. On sait que S_N et $S^\sigma_{m(N)}$ convergent vers des limites dont il faut montrer qu'elles sont les mêmes. On a

$$\|S^\sigma_{m(N)} - S_N\|^2 \le \sum_{n\ge N+1} \|x_n\|^2$$

car les seuls termes présents dans la différences $S^\sigma_{m(N)} - S_N$ sont des x_k avec $k \ge N+1$ par définition de $m(N)$. Lorsque N tend vers l'infini, la quantité de droite tend vers 0.

□

Définition 4.17. *Soit un espace de Hilbert séparable (c'est à dire qui admet un sous-ensemble dénombrable dense). On appelle* base hilbertienne *de H un système orthonormé fini ou infini $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est total. En d'autres termes, (e_n) est une base hilbertienne si $\langle e_n|e_m\rangle = \delta_{n,m}$ et $\overline{\mathrm{Vect}((e_n)_n)} = H$.*

Théorème 4.18. *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.*

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite dense de H. En eliminant de cette suite tout élément f_N qui serait combinaison linéaire de $f_0, \dots, f_{N-1}$ on en extrait par récurrence sur N un sous-système libre (que nous appellerons encore par commodité (f_n)), c'est–dire tel qu'aucun vecteur de la suite n'est combinaison linéaire des autres. Le système obtenu n'est plus nécessairement dense, mais il reste total. On applique alors le procédé de Hilbert-Schmidt à la suite f_n. Cela veut dire qu'on pose par récurrence

$$g_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \langle f_{n+1} | g_k \rangle \frac{g_k}{||g_k||^2},$$

ce qui donne un système orthogonal et on pose finalement $e_n = \frac{g_n}{||g_n||}$, ce qui donne une suite e_n orthonormée. Le système est bien total, puisque les e_n engendrent les f_n, et c'est donc une base hilbertienne. □

Théorème 4.19. égalité de Parseval *Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Alors tout élément de H peut s'écrire comme la somme d'une série convergente*

$$f = \sum_n \langle f | e_n \rangle e_n = \sum_n c_n(f) e_n$$

et les coordonnées $c_n(f) = \langle e_n | f \rangle$ sur la base vérifient l'égalité de Parseval

$$||f||^2 = \sum_n |c_n(f)|^2.$$

Réciproquement, si c_n est une suite vérifiant $\sum_n |c_n|^2 < \infty$, la série $\sum_n c_n e_n$ converge dans H et sa somme f vérifie $c_n(f) = c_n$.

Démonstration. On pose $f_m = \sum_0^m c_n(f) e_n$. On vérifie que $\langle f - f_m | e_n \rangle = 0$ pour $n \leq m$. Donc f_m est la projection orthogonale de f sur l'espace engendré par les e_n pour $0 \leq n \leq m$. Donc $||f_m||^2 \leq ||f||^2$. Par le théorème de Pythagore, on obtient

$$||f_m||^2 = \sum_1^n |c_n(f)|^2 \leq ||f||^2, \tag{4.5}$$

ce qui prouve que la série $\sum_n c_n(f) e_n$ est convergente dans H (proposition 4.16). Appelons g sa somme. Reste à montrer que $f = g$. Mais si $n \leq m$, on voit que $\langle f_m - g | e_n \rangle = 0$ et en passant à la limite quand $m \to \infty$, on obtient $\langle f - g | e_n \rangle = 0$. Donc $f - g$ est orthogonal à un système total et est donc nul. La relation de Parseval s'obtient en passant à la limite dans (4.5).

La réciproque du théorème est immédiate en reprenant les arguments précédents. □

Exercice de cours 4.20. *(Inégalité de Parseval) Montrer que si (e_n) est un système orthonormé quelconque de H, alors $\sum_n | \langle e_n | f \rangle |^2 \leq ||f||^2$. Montrer que si cette inégalité est une égalité pour tout $f \in H$, alors (e_n) est une base hilbertienne. Montrer que tout système orthonormé peut être complété en une base hibertienne.*

Corollaire 4.21. *isométrie (d'un Hilbert séparable) à l^2 Tout espace de Hilbert séparable est isométrique à $l^2(\mathbb{N})$. Il suffit d'associer à $f \in H$ son vecteur de coordonnées sur une base hilbertienne, $c = (c_1(f), ..., c_n(f), ...)$. En particulier, on a*

$$\langle f | g \rangle = \sum_n c_n(f) \overline{c_n(g)}.$$

4.4 Les séries de Fourier

On considère dans ce paragraphe l'espace $L^2_p(0,1)$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes ou réelles, 1-périodiques (c'est–dire des fonctions f telles que $f(x+1) = f(x)$ pour tout x). On munit cet espace du produit scalaire

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f\overline{g}dx.$$

Il est immédiat de voir que la formule précédente définit un produit scalaire (comme sur $L^2(\mathbb{R})$). Il est également immédiat de voir que l'espace $L^2_p(0,1)$ est complet, en vertu du théorème 3.41. Il s'agit donc d'un espace de Hilbert.

On considère la famille

$$\{e_k(x) = e^{2i\pi kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

de fonctions de $L^2_p(0,1)$. Il s'agit d'un système orthonormé (verifiez le). Pour $f \in L^2_p(0,1)$, on note

$$c_k(f) = \langle f|e_k\rangle$$

appelés les coefficients de Fourier de la fonction f. Une des questions centrales de l'analyse harmonique est de savoir si les séries de fonctions $\sum c_k e_k$ convergent et en quel sens. Un des résultats les plus simples en ce sens est le suivant, (sa démonstration se trouve dans le chapitre sur la transformée de Fourier sur [0,1[)

Théorème 4.22. *Le système $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_p(0,1)$.*

Nous pouvons alors appliquer le théorème 4.19. Pour toute fonction $f \in L^2_p(0,1)$, on a

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e_k,$$

la série précédente convergeant au sens L^2, et l'égalité de Parseval s'écrit

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 = ||f||^2_{L^2_p(0,1)}.$$

Nous allons montrer quelques propriétés classiques des transformées de Fourier dans le cas des séries de Fourier. On procèdera de la manière suivante :

1. Démontrer la propriété pour des fonctions simples (les polynômes trigonométriques).
2. Étendre la propriété à $L^2_p(0,1)$ grâce à la densité de ces fonctions simples (qui découle du fait que les e_k sont un système total).

Définition 4.23. *Un polynôme trigonométrique est une fonction qui est combinaison linéaire finie de fonctions e_k. Il est équivalent de dire que ce sont les fonctions dont la suite des $c_n(f)$ de coefficients dans la base des e_n est à support finie.*

Nous allons définir la convolution pour les fonction périodiques, parfois appelée convolution circulaire.

Définition 4.24. *Si f et g sont des fonctions 1-périodique leur convolution $f \star_c g$ désigne la fonction*

$$(f \star_c g)x = \int_0^1 f(t)g(x-t)dt$$

si une telle quantité existe. Il est clair que cette fonction est aussi 1-périodique.

Remarque 4.25.

1. La restriction de $f \star_c g$ à [0,1] coïncide avec la convolution, sur $\mathbb{R}$, de f restreinte à [0,1] avec la fonction g restreinte à [-1,1]. De cette remarque on peut déduire que la convolution circulaire de deux fonctions L^2_p est L^∞ et continue (voir chapitre précédent).
2. Une fonction bornée sur [0,1] est L^1 et aussi L^2. Plus généralement $L^a(0,1) \subset L^b(0,1)$ dès que $a \leq b$.
3. En particulier la convolution circulaire de deux fonctions L^2_p est une fonction de L^2_p. Et on a
$$\|f \star_c g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$
En effet, si on note $f_1 = f/\|f\|_2$ et $g_1 = g/\|g\|_2$, alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous dit que
$$(f_1 \star_c g_1)(x) \leq 1$$
et que donc $\|f_1 \star_c g_1\|_2 \leq 1$ et on obtient le résultat annoncé en multipliant par les normes de f et g. Ainsi, la convolution circulaire est une application bilinéaire continue de $L^2_p \times L^2_p$ vers L^2_p

Proposition 4.26. Quelques propriétés des séries de Fourier *Dans ce qui suit f et g sont des fonctions de $L^2_p(0,1)$.*

(i) $c_n(f \star_c g) = c_n(f)c_n(g)$.

(ii) $c_n(f.g) = \sum_k c_k(f)c_{n-k}(g)$.

Démonstration.

(i) On vérifie facilement la propriété lorsque f et g sont des polynômes trigonométriques (faites-le).

On fixe l'entier n et on considère les deux fonctions bilinéaires suivantes, définies sur $L^2_p \times L^2_p$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$
$$\varphi_1(f,g) = c_n(f \star_c g)$$
$$\varphi_2(f,g) = c_n(f).c_n(g)$$
Ces deux fonctions coïncident pour des couples (f,g) de polynômes trigonométriques. Elles sont continues. En effet, φ_1 est la composition de la prise du coefficient c_n avec la convolution circulaire (dont on a vu à la remarque précédente qu'elle était continue). Quant à φ_2, elle est la composition de la fonction $(x,y) \mapsto xy$ de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$ avec la fonction qui à (f,g) associe $(c_n(f), c_n(g))$ qui est clairement continue (deux composantes continues).

Enfin, deux fonctions continues et qui coïncident sur un ensemble dense sont égales. D'où le résultat.

(ii) Procéder de la même manière en exercice...

□

Chapitre 5

La transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$

Dans ce chapitre nous définissons la transformée de Fourier des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et en démontrons les principales propriétés. On définit d'abord la transformée de Fourier des fonctions sommables puis on démontre le théorème d'inversion. Enfin, on étend la transformée de Fourier à L^2 et on démontre qu'elle établit une isométrie bijective entre L^2 et lui-même.

Tous les espaces L^p font référence, dans ce chapitre, aux fonctions de $L^p(\mathbb{R})$ (fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier et à valeurs complexes).

5.1 La transformée de Fourier sur L^1

Définition 5.1. La transformée de Fourier sur L^1
Soit $f \in L^1$, on appelle transformée de Fourier de f, que l'on note $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ la fonction définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-2i\pi\xi.x} dx.$$

$\hat{f}$ est bien définie en tout point comme intégrale du produit d'une fonction bornée ($x \mapsto e^{-2i\pi\xi.x}$) par une fonction L^1 ($x \mapsto f(x)$) (inégalité de Hölder).

Proposition 5.2. *Dans ce qui suit f et g sont deux fonctions de L^1, λ et α sont des réels.*

(i) $\hat{f}$ est bornée par $\|f\|_1$ ($\|f\|_\infty \leq \|f\|_1$) et donc, la transformée de Fourier est continue de L^1 dans L^∞ (elle est clairement linéaire).

(ii) $\hat{f}$ est continue.

(iii) $\hat{f}(\xi)$ tend vers 0 lorsque $|\xi|$ tend vers $+\infty$.

(iv) $\mathcal{F}(f \star g) = \hat{f}.\hat{g}$ (noter que la convolution de f et g est bien une fonction L^1 d'après le théorème 3.47).

(v) $\int \hat{f} g = \int f \hat{g}$.

(vi) Si $g(x) = f(x).e^{2i\pi\alpha.x}$ alors $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - \alpha)$.

(vii) Si $g(x) = f(x - \alpha)$ alors $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-2i\pi\alpha.\xi}$.

(viii) Si $g(x) = \overline{f(-x)}$ alors $\hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$.

(ix) Si $g(x) = f(x/\lambda)$ avec $\lambda > 0$ alors $\hat{g}(\xi) = \lambda\hat{f}(\lambda\xi)$.

Démonstration.

(i) La fonction $x \mapsto e^{-2i\pi\xi.x}$ est dans L^∞ et bornée par 1. Son produit contre la fonction f est donc une fonction de L^1 dont l'intégrale est inférieure à $\|f\|_1$ (inégalité de Hölder).

(ii) Soit ξ_n une suite de réels qui tendent vers ξ. On a

$$\hat{f}(\xi_n) = \int f(x)e^{-2i\pi\xi_n.x}dx.$$

Les fonctions $x \mapsto f(x)e^{-2i\pi\xi_n.x}$ sont dominées par $|f|$ et tendent ponctuellement vers $x \mapsto f(x)e^{-2i\pi\xi.x}$. Le théorème de convergence dominée permet de conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \hat{f}(\xi_n) = \hat{f}(\xi).$$

(iii) On remarque que

$$2\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi) - \widehat{f_{\frac{1}{2\xi}}}(\xi)$$

où $f_{\frac{1}{2\xi}}$ est la $\frac{1}{2\xi}$-translatée de f. Or, pour toute fonction h continue et bornée on a

$$\forall x, |h(x)| \leqslant \|h\|_\infty.$$

Il vient

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \frac{1}{2}\|\hat{f} - \widehat{f_{\frac{1}{2\xi}}}\|_\infty = \frac{1}{2}\|\widehat{f - f_{\frac{1}{2\xi}}}\|_\infty$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|f - f_{\frac{1}{2\xi}}\|_1.$$

Mais quand $|\xi|$ tend vers $+\infty$, $f_{\frac{1}{2\xi}}$ tend vers f en norme L^1 (voir le théorème 3.45) . On en déduit que $|\hat{f}(\xi)|$ tend bien vers 0.

(iv) Nous allons utiliser le théorème de Fubini. La vérification des conditions d'application du théorème de Fubini se fait de manière similaire à la vérification faite pour démontrer le théorème 3.47. Posons donc le calcul

$$\mathcal{F}(f\star g)(\xi) = \int\int f(y)g(x-y)e^{-2i\pi\xi.x}dxdy = \int\int f(y)g(x-y)e^{-2i\pi\xi.(x-y)}e^{-2i\pi\xi.y}dxdy$$
$$= \int\int \left(f(y)e^{-2i\pi\xi.y}\right)\left(g(x-y)e^{-2i\pi\xi.(x-y)}\right)dxdy$$

Après changement de variable $t = x$ et $z = x - y$ l'intégrale devient

$$= \int\int \left(f(t)e^{-2i\pi\xi.t}\right)\left(g(z)e^{-2i\pi\xi.z}\right)dtdz = \int_z \left(\int_t f(t)e^{-2i\pi\xi.t}dt\right) g(z)e^{-2i\pi\xi.z}dz$$
$$= \int \hat{f}(\xi)g(z)e^{-2i\pi\xi.z}dz = \hat{f}(\xi)\int g(z)e^{-2i\pi\xi.z}dz = \hat{f}(\xi).\hat{g}(\xi)$$

(v) La fonction $\hat{f}g$ est L^1 comme produit d'une fonction L^∞ par une fonction L^1. Il en va de même de $f\hat{g}$. En appliquant le théorème de Fubini on a

$$\int \hat{f}g = \int_\xi \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int_\xi\left(\int_t f(t)e^{-2i\pi\xi.t}dt\right)g(\xi)$$
$$= \int\int f(t)g(\xi)e^{-2i\pi\xi.t}dtd\xi = \int_t\left(\int_\xi g(\xi)e^{-2i\pi t.\xi}d\xi\right)f(t) = \int_t \hat{g}(t)f(t)dt$$

Les autres propriétés sont à faire en exercice. Montrons par exemple la numéro *(vii)*.

$$\hat{g}(\xi) = \int \overline{f(-t)} e^{-2i\pi\xi.t} dt = \int \overline{f(u)} e^{2i\pi\xi.u} du = \overline{\int f(u) e^{-2i\pi\xi.u} du} = \overline{\hat{f}(\xi)}$$

□

Définition 5.3. Un couple de fonctions auxiliaires
On définit, pour tout $n \geqslant 1$ entier, les deux fonctions H_n et h_n [1] *par*

$$H_n(x) = e^{-\frac{|x|}{n}} \text{ et } h_n(x) = n.\frac{2}{1 + 4\pi^2.(nx)^2}$$

Remarquer que H_n est une homothétie de H_1 ($H_n(nx) = H_1(x)$) et h_n est presque une homothétie de h_1 ($h_n(x) = n.h_1(nx)$) sauf qu'elle est multipliée par un facteur qui assure que l'intégrale de h_n est égale à celle de h_1. Comparer cela au point (ix) de la proposition 5.2 avec en tête l'idée que h_n est la transformée de Fourier de H_n.

Proposition 5.4. propriétés des fonctions auxiliaires
On a les propriétés suivantes

(i) $\forall n \geqslant 1, \forall 1 \leqslant p \leqslant +\infty, h_n \in L^p$ *et* $H_n \in L^p$.

(ii) $\mathcal{F}(H_n) = h_n$.

(iii) $\int h_n(t)dt = 1$.

(iv) *Si* $f \in L^p, p < +\infty$ *alors*

$$h_n \star f \text{ tend vers } f \text{ dans } L^p.$$

(v) *Si* $f \in L^1$ *alors*

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f \star h_n)(x) = \int \hat{f}(\xi) H_n(\xi) e^{2i\pi x.\xi} d\xi$$

(vi) *Si f est une fonction bornée et qu'elle est continue en un point x alors*

$$(f \star h_n)(x) \text{ tend vers } f(x) \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini.}$$

Remarque 5.5.
Noter que l'on ne dit pas encore que la transformée de Fourier de h_n est H_n. Cela sera une conséquence du théorème d'inversion dont les fonctions h_n et H_n sont des ingrédients de démonstration.

Si cela était vrai (et ça l'est) la propriété numéro (v) serait un théorème d'inversion appliqué à la fonction $f \star h_n$. Le théorème d'inversion sera donc prouvé en passant par un de ses cas particuliers qu'est la propriété (v).

Démonstration.

(i) Il est clair que h_n et H_n sont à la fois bornées et dans L^1. Soit une fonction $f \in L^1 \cap L^\infty$ on va montrer qu'elle est dans tous les espaces L^p avec $1 < p < +\infty$. Pour cela, il suffit de montrer que la fonction $|f|^p$ est dans L^1. Mais,

$$|f|^p = |f|.|f|^{p-1}.$$

La fonction $|f|$ est dans L^1 et la fonction $|f|^{p-1}$ est bornée. Leur produit est donc bien dans L^1. CQFD.

1. ne pas confondre l'indice en bas du h_n avec la notation utilisée pour la translation !

(ii) Faire le calcul...

(iii) Faire le changement de variable $t = \mathrm{tg}(\theta)$.

(iv) Remarquons d'abord que $f \star h_n$ est le produit de convolution d'une fonction L^p par une fonction L^1 ($h_n \in L^1$...). D'après le théorème 3.50, c'est une fonction de L^p. Mais h_n est aussi dans L^q (où q est l'exposant conjugué de p) le produit de convolution est donc, en plus, continue (théorème 3.49). On a

$$(f \star h_n)(x) - f(x) = \int h_n(t)f(x-t)dt - \int h_n(t)f(x)dt = \int h_n(t).\left(f(x-t) - f(x)\right)dt$$

$$= \int h_1(u)\left(f\left(x - \frac{u}{n}\right) - f(x)\right)du$$

L'inégalité de Jensen (proposition 3.33) nous permet d'affirmer que

$$|(f \star h_n)(x) - f(x)|^p \leqslant \int h_1(u)\left|f\left(x - \frac{u}{n}\right) - f(x)\right|^p du$$

Et après application du thèorème de Fubini

$$\|f \star h_n - f\|_p^p \leqslant \int h_1(u)\|f_{\frac{u}{n}} - f\|_p^p du$$

La suite de fonction $u \mapsto h_1(u)\|f_{\frac{u}{n}} - f\|_p^p$ est dominée par $2^p\|f\|_p^p.h_1(u)$ et tend en tout point u vers 0 (par le théorème 3.45). Le théorème de convergence dominée permet donc de conclure que $f \star h_n$ tend bien vers f en norme L^p.

(v) Commençons par vérifier que la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(t, \xi) \mapsto |f(t)|H_n(\xi)$$

est bien intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Pour cela, comme c'est une fonction positive, il suffit de vérifier que, par exemple, son intégrale par rapport à ξ est intégrable par rapport à t

$$\int |f(t)|\left(\int H_n(\xi)d\xi\right)dt = \int |f(t)|.2ndt = 2n\|f\|_1.$$

Ce résultat justifiera les interversions d'ordre d'intégration dans le calcul qui suit.

$$\int \hat{f}(\xi)H_n(\xi)e^{2i\pi\xi.x}d\xi = \int\int f(t)e^{-2i\pi\xi.t}H_n(\xi)e^{2i\pi\xi.x}dtd\xi = \int f(t)\left(\int H_n(\xi)e^{-2i\pi(t-x).\xi}d\xi\right)dt$$

$$= \int f(t)h_n(t-x)dt \overset{[2]}{=} \int f(t)h_n(x-t)dt = (f \star h_n)(x)$$

(vi) f étant dans L^∞ et h_n dans L^1, le produit de convolution $f \star h_n$ existe bien et est continue.

$$(f \star h_n)(x) = \int h_n(t)f(x-t)dt = \int h_1(u)f\left(x - \frac{u}{n}\right)du$$

La suite de fonctions $u \mapsto h_1(u)f\left(x - \frac{u}{n}\right)$ est dominée par $\|f\|_\infty.h_1(u)$ et tend en tout point u vers $f(x)$ (par continuité de f en x). Le théorème de convergence dominée permet de conclure que

$$\lim_{n\to\infty}(f \star h_n)(x) = \int h_1(u)f(x)du = f(x).$$

2. h_n est paire.

□

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème d'inversion. Nous commençons par définir la transfomée de Fourier inverse.

Définition 5.6. *Si $f \in L^1$, on appelle transformée de Fourier inverse, que l'on note $\overline{\mathcal{F}}(f)$ la fonction (continue) définie par*

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(x) = \int f(t) e^{2i\pi x.t} dt.$$

Théorème 5.7. Le théorème d'inversion
Si $f \in L^1$ et que $\hat{f} \in L^1$, alors

$$\text{pour presque tout } x, \overline{\mathcal{F}}(\hat{f})(x) = f(x).$$

L'égalité ayant lieu presque partout on peut donc écrire

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = f$$

l'égalité étant prise dans L^1. En particulier, on déduit de ce qui précède que si $\hat{f} \in L^1$ alors f est égale presque partout à une fonction continue (car f est la transformée de Fourier inverse de $\hat{f}$ et que la transformée de Fourier inverse à les même propriétés que la transformée de Fourier).

Corollaire 5.8.
Si $f \in L^1$ et $\hat{f} = 0$ alors $f = 0$. Autrement dit, la transformée de Fourier est injective.

Démonstration.
La preuve du corollaire à partir du théorème est immédiate car la fonction nulle est bien L^1 et que sa transformée de Fourier inverse est nulle.

Passons à la preuve du théorème. On sait que $f \star h_n$ tend vers f en norme L^1. On peut donc extraire une sous suite $f \star h_{n^k}$ et un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ de mesure nulle tels que

$$\forall x \notin E, \lim_{k \to \infty} (f \star h_{n^k})(x) = f(x). \tag{5.1}$$

Par ailleurs, on sait que (point (v) de la proposition 5.4)

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f \star h_{n^k})(x) = \int \hat{f}(\xi) H_{n^k}(\xi) e^{2i\pi x.\xi} d\xi$$

Mais la suite de fonctions

$$\xi \mapsto \hat{f}(\xi) H_{n^k}(\xi) e^{2i\pi x.\xi}$$

tend ponctuellement vers $\hat{f}(\xi) e^{2i\pi x.\xi}$ et est dominée par $|\hat{f}|$ qui est L^1 par hypothèse. Le théorème de convergence dominée permet donc de dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{k \to \infty} (f \star h_{n^k})(x) = \int \hat{f}(\xi) e^{2i\pi x.\xi} d\xi = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f})(x) \tag{5.2}$$

En combinant (5.2) et (5.1) on obtient

$$\forall x \notin E, f(x) = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f})(x).$$

□

5.2 Extension de la transformée de Fourier à L^2

Théorème 5.9. *On a les propriétés suivantes*

(i) Si $f \in L^1 \cap L^2$ alors $\mathcal{F}(f) \in L^2$ et $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$.

(ii) Il existe une unique application linéaire continue de L^2 dans L^2 qui est une isométrie et qui est égale à $\mathcal{F}$ sur $L^1 \cap L^2$. On la notera encore $\mathcal{F}$.

(iii) Im($\mathcal{F}$) est dense dans L^2.

(iv) $\mathcal{F}$ est bijective de L^2 dans lui-même.

Démonstration.

(i) Soit $f \in L^1 \cap L^2$. On note $\tilde{f}$ la fonction définie par $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$. On note $g = f \star \tilde{f}$. g est à la fois L^1 comme convolution de deux fonctions L^1 et continue de limite nulle à l'infini comme convolution de deux fonction L^2 (elle est donc dans tous les espace L^p) et vérifie $g(0) = \|f\|_2^2$. $(g \star h_n)(0)$ tend donc vers $g(0)$ (par continuité de g en 0) et est égal à (par le fait que $g \in L^1$)

$$(g \star h_n)(0) = \int H_n(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi.$$

De plus

$$\hat{g} = \hat{f}.\overline{\hat{f}} = |\hat{f}|^2 (\text{ produit de convolution de deux fonctions } L^1).$$

La suite de fonctions

$$\xi \mapsto H_n(\xi)\hat{g}(\xi)$$

tend de manière croissante (à ξ fixé) vers la fonction

$$\xi \mapsto \hat{g}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2.$$

Le théorème de convergence monotone permet de conclure que la fonction $|\hat{f}|^2$ est intégrable et que son intégrale est égale à la limite des intégrales des fonctions
$\xi \mapsto H_n(\xi)\hat{g}(\xi)$ et on sait que

$$\int H_n(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi = (g \star h_n)(0)$$

D'où

$$\hat{f} \in L^2 \text{ et } \|\hat{f}\|_2^2 = g(0) = \|f\|_2^2.$$

(ii) On va définir T un opérateur linéaire continue qui étend $\mathcal{F}$ à L^2 tout entier. $L^1 \cap L^2$ contient les fonctions continues à support compact. Il est donc dense dans L^2. Si $f \in L^2$ on peut l'approcher par une suite de fonctions $f_n \in L^1 \cap L^2$. Comme $\mathcal{F}$ est une isométrie, la suite $(\mathcal{F}(f_n))$ est une suite de Cauchy. Elle admet donc une limite dans L^2 (qui est complet). Il est facile de voir que cette limite ne dépend pas de la suite f_n. En effet, si f_n et g_n tendent toutes les deux vers f, alors la suite r_n définie par

$$r_{2n} = f_n$$

$$r_{2n+1} = g_n$$

tend aussi vers f. Mais $\mathcal{F}(r_n)$ tend vers la même limite que $\mathcal{F}(r_{2n}) = \mathcal{F}(f_n)$ et que $\mathcal{F}(r_{2n+1}) = \mathcal{F}(g_n)$. Ces deux limites sont donc égales (une suite ne peut avoir deux limites différentes).

On note $T(f)$ cette limite. Ainsi, T est uniquement défini (la limite ne dépend pas de la suite choisie) et il est bien défini (toute fonction de L^2 peut-être approchée par une suite de fonctions de $L^1 \cap L^2$).

Il faut montrer que T est bien linéaire. Soit f et g deux fonctions L^2, f_n et g_n deux suites de $L^1 \cap L^2$ qui tendent vers f et g respectivement (dans L^2). La suite $f_n + g_n$ tend vers $f + g$. La suite $\mathcal{F}(f_n + g_n)$ tend, par définition de T, vers $T(f + g)$. Mais

$$\mathcal{F}(f_n + g_n) = \mathcal{F}(f_n) + \mathcal{F}(g_n).$$

Chacun des deux termes de la somme tend vers $T(f)$ et $T(g)$ respectivement. Donc $\mathcal{F}(f_n + g_n)$ tend vers $T(f) + T(g)$. Donc, $T(f + g)$ qui est la limite de $\mathcal{F}(f_n + g_n)$ est égal à $T(f) + T(g)$. On fait de même pour montrer que $T(\lambda f) = \lambda T(f)$. La linéarité de la transformée de Fourier à permis de montrer la linéarité de T.

Montrons que T est une isométrie. Soit $f \in L^2$ et f_n une suite de $L^1 \cap L^2$ qui tend vers f. Alors $\|f_n\|_2$ tend vers $\|f\|_2$ (inégalité triangulaire [3], $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$). De plus, $\mathcal{F}(f_n)$ tend vers $T(f)$ et $\|\mathcal{F}(f_n)\|_2$ tend vers $\|T(f)\|_2$. Mais $\|\mathcal{F}(f_n)\|_2 = \|f_n\|_2$, ce qui termine la preuve de : $\|T(f)\|_2 = \|f\|_2$.

(iii) $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$ est un sev de L^2. Pour montrer sa densité il suffit de montrer que son orthogonal est réduit à $\{0\}$. Soit $w \in L^2$ telle que

$$\forall f \in L^2 < w|\mathcal{F}(f) >= 0.$$

H_n est une fonction de L^2 et sa transformée de fourier, h_n, est donc un élément de $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$. Mais le produit de H_n par une onde pure est aussi dans L^2 donc toutes les translatées de h_n sont aussi dans l'image de $\mathcal{F}$. Ceci s'écrit (par hypothèse sur w)

$$w \star h_n = 0.$$

Mais $w \star h_n$ tend vers w en norme 2. Donc,

$$w = 0.$$

CDFQ.

(iv) L'opérateur $\mathcal{F}$ est une isométrie et son image est dense dans L^2. Il est injectif (comme toute isométrie...) et il nous reste à montrer qu'il est surjectif.

Soit $f \in L^2$. Soit $f_n = \mathcal{F}(g_n)$ une suite qui approche f et qui se trouve dans l'image de $\mathcal{F}$. On a

$$\forall m, n, \|f_n - f_m\|_2 = \|\mathcal{F}(g_n - g_m)\|_2 = \|g_n - g_m\|_2.$$

La suite g_n est donc de Cauchy et admet une limite g dans L^2. La continuité de la transformée de Fourier nous permet de conculre que

$$\mathcal{F}(g) = f \text{ et } f \in \mathrm{Im}(\mathcal{F}).$$

□

On va démontrer certaines formules impliquant la transformée de Fourier sur L^2 en utilisant la continuité de différents opérateurs.

3. On a $\|y\| = \|x + (y - x)\| \leqslant \|x\| + \|y - x\|$ donc $\|y - x\| \geqslant \|x\| - \|y\|$. On obtient le résultat utilisé en faisant jouer à x et y des rôles symétriques.

Proposition 5.10. *On étend la fonction "transformée de Fourier inverse",$\overline{\mathcal{F}}$, à L^2 de la même manière que l'on étend la transformée de Fourier. Et on a les résultats suivants*

(i) $\forall f \in L^2, \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = f$.

(ii) $\forall f, g \in L^2, f \star g = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f}.\hat{g})$.

Démonstration.

(i) L'égalité à démontrer est vraie pour les fonctions de $L^1 \cap L^2$ dont les transformées de Fourier sont L^1 (théorème d'inversion). Les fonctions du type $f \star h_n$ où $f \in L^1 \cap L^2$ vérifient cette propriété ($\mathcal{F}(f \star h_n) = \hat{f}.H_n \in L^1$ car $\hat{f}$ est bornée et H_n est L^1). Par ailleurs $f \star h_n$ tend vers f (en norme 2 et 1). Ces fonctions sont donc denses dans $L^1 \cap L^2$ qui est dense dans L^2. Par continuité, l'égalité est vraie sur L^2 tout entier.

(ii) Soit f_n et g_n deux suites de $L^1 \cap L^2$ qui tendent en norme 2 vers f et g. On a

$$\mathcal{F}(f_n \star g_n) = \hat{f_n}.\hat{g_n}.$$

Mais $\hat{f_n}, \hat{g_n}$ sont L^2, leur produit est donc L^1. On peut appliquer le théorème d'inversion qui donne

$$f_n \star g_n = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f_n}.\hat{g_n}).$$

La continuité de l'opérateur de multiplication de deux fonction L^2 (dont le résultat est L^1) combiné à la continuité de la transformée de Fourier de L^1 vers L^∞ nous dit que le membre de droite tend vers

$$\overline{\mathcal{F}}(\hat{f}.\hat{g}) \text{ dans } L^\infty.$$

La continuité de la convolution de deux fonctions L^2 dans L^∞ nous dit que le membre de gauche tend vers

$$f \star g \text{ dans } L^\infty.$$

Les deux suites $f_n \star g_n$ et $\overline{\mathcal{F}}(\hat{f_n}.\hat{g_n})$ étant égales (terme à terme) leur limite est la même dans L^∞. A priori cela signifie qu'il y a une simple égalité presque partout. Mais les deux fonctions $f \star g$, $\overline{\mathcal{F}}(\hat{f}.\hat{g})$ sont continues et leurs valeurs ponctuelles [4] sont données par les formules respectives de la convolution et de la transformée de Fourier inverse. Deux fonctions continues égales presque partout sont égales et on a

$$\forall x, \int f(t)g(x-t)dt = \int \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)e^{2i\pi x.\xi}d\xi.$$

□

4. Les valeurs ponctuelles du seul représentant continue dans la classe d'égalité presque partout de ces deux fonctions.

Chapitre 6

Rgularité et transformation de Fourier, la classe de Schwartz

Dans ce chapitre on commence par prouver la densité des fonctions régulières dans les espaces L^p puis on démontre les résultats essentiels sur l'échange de régularité et de décroissance à l'infini par la transformation de Fourier. Enfin, On introduit une classe de fonctions à la fois très régulières et à décroissance rapide, la classe de Schwartz, $\mathcal{S}$.

6.1 Densité des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty$ dans les espaces L^p (pour $p < \infty$)

Définition 6.1.
On note $\mathcal{C}_c^\infty$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables et qui sont à support compact. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Et il est non réduit à la fonction nulle.

Démonstration. $\mathcal{C}_c^\infty \neq \{0\}$ demande à être prouvé. Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Cette fonction est bien $\mathcal{C}^\infty$. Si on considère la fonction

$$\rho(x) = f(x).f(1-x).$$

ρ est bien $\mathcal{C}^\infty$ (comme produit de fonctions qui le sont) et à support compact (si $x \notin [0,1]$ alors $f(x) = 0$ ou $f(1-x) = 0$). Elle est non nulle ($\rho(0.5) = e^{-4}$) et toujours positive.

Par ailleurs, si on pose $t = \int \rho$ et $\rho_1(x) = \rho(x)/t$ alors

$$\int \rho_1 = 1$$

□

On définit une suite de fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty$ par

$$\rho_n(x) = n.\rho_1(n.x).$$

Si bien que pout tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int \rho_n = 1.$$

On a le théorème suivant

Théorème 6.2.
Soit $1 \leqslant p < \infty$

(i) *Si* $g \in \mathcal{C}_c^0$ *et* $h \in \mathcal{C}_c^\infty$ *alors* $g * h$ *est dans* $\mathcal{C}_c^\infty$. *Et*

$$(g \star h)^{(n)} = (g \star h^{(n)}).$$

(ii)

$$\forall f \in L^p, f \star \rho_n \text{ tend vers } f \text{ dans } L^p$$

(iii) *Les fonctions* $\mathcal{C}_c^\infty$ *sont denses dans* L^p.

Démonstration.

(i) Le fait que le produit de convolution existe résulte, par exemple, du fait que g et h sont toutes les deux L^2. Leur produit de convolution est donc une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini et est défini en tout point par la formule

$$(g \star h)(x) = \int g(t)h(x-t)dt.$$

Le fait que $g \star h$ soit à support compact est évident.
Soit τ_n une suite de réels non nuls qui tend vers 0.

$$\frac{(g \star h)(x+\tau_n) - (g \star h)(x)}{\tau_n} = \int g(t) \left(\frac{h(x-t+\tau_n) - h(x-t)}{\tau_n} \right) dt$$

h est continûment dérivable. La quantité entre parenthèses est donc égale (par le théorème des accroissements finis) à $h'(y)$ pour un certain y (si h et g sont à valeurs complexes on borne le module de cette quantité par le maximum du module de h'). Mais h' est à support compact (car h l'est) et continue. Elle est donc bornée. La fonction g est L^1 (car continue et à support compact). Donc la suite de fonctions

$$t \mapsto g(t)\frac{h(x-t+\tau_n) - h(x-t)}{\tau_n}$$

est dominée par $t \mapsto \|h'\|_\infty . g(t)$ et tend ponctuellement (parce que h est dérivable en tout point) vers

$$t \mapsto g(t)h'(x-t).$$

Le théorème de convergence dominée permet de conclure que $g \star h$ est dérivable en x et que sa dérivée est égale à

$$(g \star h)'(x) = \int g(t)h'(x-t) = (g \star h')(x).$$

Mais h' est encore continûment dérivable à support compact. On peut donc itérer la preuve et démontrer par récurrence que $(g \star h)$ est $\mathcal{C}_c^\infty$ et sa dérivée n-ième est

$$(g \star h)^{(n)} = (g \star h^{(n)}).$$

(ii) La preuve de ce résultat est identique à celle de du point (iv) de la proposition 5.4.

(iii) Soit $f \in L^p$ et $\epsilon > 0$. Soit $g \in \mathcal{C}_c^0$ telle que

$$\|g - f\|_p < \epsilon$$

(densité des fonctions continues à support compact).
D'après le point précédent

$$\exists n, \|g \star \rho_n - g\|_p < \epsilon.$$

Et $g \star \rho_n$ est dans $\mathcal{C}_c^\infty$ et

$$\|f - g \star \rho_n\|_p \leqslant \|f - g\|_p + \|g - g \star \rho_n\|_p < 2\epsilon.$$

□

6.2 Échange de régularité et de décroissance à l'infini

Théorème 6.3.

(i) Si $f \in \mathcal{C}^1 \cap L^1$ et que $f' \in L^1$ alors

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = 2i\pi\xi\hat{f}(\xi).$$

(ii) Si $f \in L^1$ et $(x \mapsto xf(x)) \in L^1$ alors $\hat{f}$ est continûment dérivable et

$$\mathcal{F}(f)' = \mathcal{F}(x \mapsto -2i\pi x f(x)).$$

(iii) Si $f \in \mathcal{C}^n \cap L^1$ et que $f^{(k)} \in L^1$ pour tout $k \leqslant n$ alors

$$\mathcal{F}(f^{(n)})(\xi) = (2i\pi\xi)^n\hat{f}(\xi).$$

(iv) Si $f \in L^1$ et $(x \mapsto x^k f(x)) \in L^1$ pour tout $k \leqslant n$ alors $\hat{f}$ est n fois continûment dérivable et

$$\mathcal{F}(f)^{(n)} = \mathcal{F}(x \mapsto (-2i\pi x)^n f(x)).$$

Démonstration.

(i) Commençons par remarquer que f tend vers 0 à l'infini. En effet,

$$f(A) = f(0) + \int_0^A f'(t)dt$$

mais la dérivée de f est dans L^1 donc f admet une limite en l'infini. Cette limite ne peut être autre chose que 0 car sinon f ne serait pas intégrable.
On va terminer la preuve grâce à une intégration par parties

$$\int_{-A}^{A} f'(t)e^{-2i\pi\xi.t}dt = \left[f(t)e^{-2i\pi\xi.t}\right]_{-A}^{A} - \int f(t)(-2i\pi\xi)e^{-2i\pi\xi.t}dt$$

$$= f(A)e^{-2i\pi\xi.A} - f(-A)e^{-2i\pi\xi.-A} + (2i\pi\xi)\int f(t)e^{-2i\pi\xi.t}dt$$

Lorsque A tend vers l'infini on a

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = 2i\pi\xi\hat{f}(\xi).$$

(ii) La suite τ_n est destinée à tendre vers 0 et considère la quantité :

$$\frac{\hat{f}(\xi+\tau_n)-\hat{f}(\xi)}{\tau_n} = \int f(x)\frac{\left(e^{-2i\pi(\xi+\tau_n).x}-e^{-2i\pi\xi.x}\right)}{\tau_n}dx$$

Si on note $\varphi_n(x) = f(x)\frac{\left(e^{-2i\pi(\xi+\tau_n).x}-e^{-2i\pi\xi.x}\right)}{\tau_n}$. On a la majoration suivante grâce au théorème des accroissements finis

$$|\varphi_n(x)| \leq |f(x)| \max_{y\in[\xi,\xi+\tau_n]} |-2i\pi x e^{-2i\pi y.x}| = 2\pi|f(x)x|$$

qui est une fonction L^1 par hypothèse. Par ailleurs, $\varphi_n(x)$ tend ponctuellement vers $f(x)\times -2i\pi x e^{-2i\pi\xi.x}$ (dérivabilité de la fonction exponentielle). Le théorème de convergence dominée permet de conclure

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\hat{f}(\xi+\tau_n)-\hat{f}(\xi)}{\tau_n} = -2i\pi\int f(x)xe^{-2i\pi\xi.x}dx$$

qui signifie exactement que la $\mathcal{F}(f)$ est bien dérivable et a pour dérivée la transformée de Fourier de $x\mapsto -2i\pi x f(x)$.

(iii) Récurrence du point (i).

(iv) Récurrence du point (ii).

□

6.3 La classe $\mathcal{S}$

D'après le théorème précédent, si l'on veut avoir une classe de fonctions telle que $\mathcal{F}(f)$ soit encore dans cette classe si f y est, il faut que f soit à la fois très régulière et très décroissante à l'infini, ainsi sa transformée de Fourier aura aussi ces deux propriétés. Du moins, on l'espère. C'est l'intérêt de la classe de Schwartz.

Définition 6.4. La classe $\mathcal{S}$
On dit qu'une fonction f est dans la classe de Schwartz et on note $f\in\mathcal{S}$ si

(i) f est $\mathcal{C}^\infty$ et

(ii)

$$\forall n,k\in\mathbb{N}, f^{(n)}(x).x^k \longrightarrow_{|x|\to\infty} 0.$$

Autrement dit, f est indéfiniment dérivable et le produit de f ou de n'importe laquelle de ses dérivées par un polynôme tend vers 0 à l'infini.

On a les propriétés suivante pour la classe $\mathcal{S}$.

Proposition 6.5. *Dans ce qui suit f et g sont des éléments de $\mathcal{S}$ et P est un polynôme à une variable. On a*

(i)

$$f^{(n)}\in\mathcal{S}$$

(ii)

$$f.g\in\mathcal{S}$$

(iii)

$$P.f\in\mathcal{S}$$

(iv)
$$\forall 1 \leqslant p \leqslant \infty, f \in L^p$$
(v)
$$\mathcal{C}_c^\infty \subset \mathcal{S}$$
et donc $\mathcal{S}$ est dense dans tous les L^p $(p < \infty)$.

La classe $\mathcal{S}$ est donc stable par dérivation, produit, produit par un polynôme et elle est dense dans les L^p pour p fini.

Démonstration.
La plupart des points sont des conséquences de la définition de $\mathcal{S}$. Le dernier prouve qu'elle n'est pas réduite à $\{0\}$ (un exemple typique d'élément de $\mathcal{S}$ est la gaussienne e^{-x^2} dont la transformée de fourier a été calculée en TD).

(i) Les dérivées de $f^{(n)}$ sont des dérivées de f...

(ii) formule de Leibnitz
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

(iii) ...

(iv) Il suffit de montrer que f est à la fois dans L^1 et bornée. f est bornée parce que, par définition, elle est continue et tend vers 0 à l'infini (prendre $k = 0$ dans la définition de $\mathcal{S}$). Par ailleurs, $(1 + x^2).f(x)$ tend vers 0 à l'infini et est continue, elle est donc bornée.
$$\exists M, |f(x)| \leqslant \frac{M}{1 + x^2}.$$
Cette dernière fonction étant L^1, f l'est aussi.

(v) Une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty$ vérifie trivialement les conditions qu'il faut pour appartenir à $\mathcal{S}$ (elle est égale à 0 hors d'un compact).

□

Le théorème suivant rend les fonctions de $\mathcal{S}$ très agréables à manipuler dans le cadre de la théorie des distributions. Il dit que la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{S}$ est une fonction de $\mathcal{S}$.

Théorème 6.6.
Si $f \in \mathcal{S}$ alors $\hat{f} \in \mathcal{S}$.

Démonstration. f étant L^1, $\hat{f}$ a un sens. Le théorème 6.3 nous dit que $\hat{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$ car pour tout n entier $x^n.f(x) \in \mathcal{S} \subset L^1$.

De plus, on a (en appliquant les résultats du même théorème)
$$\xi^k.\left[\mathcal{F}(f)^{(n)}\right](\xi) = \frac{1}{(2i\pi)^k}.(2i\pi\xi)^k\left[\mathcal{F}(f)^{(n)}\right](\xi) = \frac{1}{(2i\pi)^k}.(2i\pi\xi)^k\left[\mathcal{F}\left(x \mapsto (-2i\pi x)^n f(x)\right)\right](\xi)$$
$$= \frac{1}{(2i\pi)^k}.\left[\mathcal{F}\left([x \mapsto (-2i\pi x)^n f(x)]^{(k)}\right)\right](\xi)$$

Mais la fonction $[x \mapsto (-2i\pi x)^n f(x)]^{(k)}$ est une fonction de $\mathcal{S}$ (multiplication par un polynôme puis dérivation répétée) donc aussi une fonction de L^1. Sa transformée de Fourier tend vers 0 à l'infini. Ce qui prouve que $\hat{f}$ satisfait bien aux conditions d'appartenance à $\mathcal{S}$. □

Théorème 6.7.
La transformée de Fourier est une bijection entre $\mathcal{S}$ et lui-même et son inverse est $\bar{\mathcal{F}}$.

Démonstration. Si $f \in \mathcal{S}$ alors $\hat{f} \in \mathcal{S} \subset L^1$. On peut donc appliquer le théorème d'inversion qui nous donne
$$f = \bar{\mathcal{F}}(\hat{f}).$$

Par ailleurs, $\bar{\mathcal{F}}(x \mapsto g(-x)) = \mathcal{F}(g)$ ce qui permet de conclure que $\mathcal{F}$ est surjective sur $\mathcal{S}$ (en effet, un antécédent de f est donné par $\xi \mapsto \hat{f}(-\xi)$). Elle est injective parce qu'injective sur L^1 qui contient $\mathcal{S}$ et son inverse est $\bar{\mathcal{F}}$ par ce qui précède. $\square$

Chapitre 7

Règles de calcul dans les espaces $L^p([0,1[)$ et l^p

Dans ce chapitre on définit les espaces fonctionnels sur les deux ensembles $\mathbb{Z}$ et $[0,1[$ puis on indiquera ce qu'ils ont de différent des espaces fonctionnels sur $\mathbb{R}$.

D'abord il faut prendre conscience que l'espace $[0,1[$ que l'on considère n'est pas tout-à-fait le simple intervalle de $\mathbb{R}$ noté $[0,1[$. Nous allons le munir d'une topologie légèrement différente qui correspond à l'idée de périodicité.

Définition 7.1. Continuité sur $[0,1[$ torique
Une fonction définie sur $[0,1[$ est dite continue si elle est continue au sens classique et qu'en plus elle admet une limite en 1 égale à sa valeur en 0.

Remarque 7.2. Avec une telle définition de la continuité sur $[0,1[$ si une fonction f sur $[0,1[$ est continue alors la fonction sur $\mathbb{R}$ périodique de période 1 égale à f sur $[0,1[$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Ce ne serait pas le cas si on n'avait pas imposé que la limite en 1 soit égale à la valeur en 0 (penser à la fonction $f(x) = x$ sur $[0,1[$).

Définition 7.3. Les espaces $L^p([0,1[)$ et l^p
Les espaces $L^p([0,1[)$ sont définis de la même manière que sur $\mathbb{R}$ ($|f|^p$ doit être sommable ou f est bornée pour $p = \infty$). Leur norme est donnée par (pour $p < \infty$) :

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

l^p pour p fini est l'espaces des suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui vérifient

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^p < +\infty.$$

La norme p d'une telle suite est définie par :

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

l^∞ est l'espace des suites bornées et la norme ∞ est définie comme la borne supérieure de l'ensemble des valeurs prises par les $|u_n|$.

Alors que sur $\mathbb{R}$ on n'avait pas d'inclusion entre les différents espaces L^p, la situation est différente sur $[0,1[$ et $\mathbb{Z}$. On a les propriétés suivantes

Proposition 7.4.

(i) *Si* $p < q$ *alors* $L^q([0,1[) \subset L^p([0,1[)$. *(*$L^\infty([0,1[) \subset L^2([0,1[) \subset L^1([0,1[)$*)*

(ii) *Si* $p < q$ *alors* $l^p \subset l^q$. *(*$l^1 \subset l^2 \subset l^\infty$*)*

(iii) *Les fonctions continues sont denses dans les espaces* $L^p([0,1[)$ *pour* p *fini.*

(iv) *Les suites à support fini (qui sont nulles sauf en un nombre fini d'entiers) sont denses dans les espaces* l^p *pour* p *fini.*

Démonstration.

(i) Soit f une fonction de $L^q([0,1[)$. On note E le sous ensemble de $[0,1[$ sur lequel $|f| \geqslant 1$. Sur E on a $|f|^p \leqslant |f|^q$. Sur le complémentaire E^c de E on a $|f|^p \leqslant 1$

$$\begin{aligned}&\int_0^1 |f(t)|^p dt = \int_E |f(t)|^p dt + \int_{E^c} |f(t)|^p dt \\ &\leqslant \int_E |f(t)|^q dt + \int_{E^c} 1 dt \\ &\leqslant \int_0^1 |f(t)|^q dt + \mu(E^c) \leqslant \|f\|_q^q + 1.\end{aligned}$$

Donc f est bien dans L^p.

(ii) Si $p < q$ alors $|x|^p \geqslant |x|^q$ pour $|x| \leqslant 1$. Ainsi, si u_n est dans l^p le nombre de fois où $|u_n| > 1$ est fini et aux autres point $|u_n|^p \geqslant |u_n|^q$. Elle est donc dans l^q.

(iii) Résulte de la construction de la mesure.

(iv) Faisons-le pour l^1, les autres cas sont similaires. Si $\sum |u_n| < \infty$ et que $\epsilon > 0$ alors il existe N tel que

$$|\sum_{n=-N}^{N} |u_n| - \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|| < \epsilon.$$

Mais alors, la suite $v_n = u_n$ si $|n| \leqslant N$ et $v_n = 0$ sinon, est proche à ϵ-près de la suite u_n en norme 1. CQFD.

□

Définition 7.5. Convolution

Si u *et* v *sont deux suites, on appelle produit de convolution et on note* $u \star v$ *la suite définie (si la somme existe) par*

$$(u \star v)_n = \sum u_k v_{n-k}$$

Si f *et* g *sont des fonctions définies sur* $[0,1[$ *on définit leur produit de convolution (quand il existe) par*

$$(f \star g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt + \int_x^1 f(t)g(1+x-t)dt.$$

Si on note f_e *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *qui étend* f *par des zéros hors de* $[0,1[$ *et* $g_e(x) = g(x)$ *si* $x \in [0,1[$, $g_e(x) = g(x+1)$ *si* $x \in [-1,0[$ *et* $g_e(x) = 0$ *sinon. On constate que la convolution de* f *est* g *n'est rien d'autre que la convolution de* f_e *et* g_e *sur* $\mathbb{R}$ *que l'on restreint à* $[0,1[$. *Cette remarque nous permet de conclure que les règles de calcul des convolutions que nous avons démontrées sur* $\mathbb{R}$ *sont encore valables sur* $[0,1[$ *(*$f \in L^p([0,1[) \Leftrightarrow f_e \in L^p(\mathbb{R})$*).*

Les règles de calcul que nous avons démontrées s'appliquent encore aux suites et aux fonctions définies sur $[0,1[$.

Proposition 7.6. Règles de calcul
p et q sont des exposants conjugués ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

(i) Si $f \in L^p([0,1[)$ et $g \in L^q([0,1[)$ alors $f \star g$ est continue sur $[0,1[$ et est bornée (de ce fait elle est dans tous les espaces $L^r([0,1[)$ d'après la proposition 7.4).

(ii) Si $u \in l^p$ et $v \in l^q$ alors $u \star v$ est une suite bornée. Le concept de suite continue est un concept trivial : Toute suite est continue car c'est une fonction définie sur un espace discret $\mathbb{Z}$ dans lequel tout ensemble est un ouvert.

(iii) Si $f \in L^1([0,1[)$ et $g \in L^p([0,1[)$ alors $f \star g \in L^p([0,1[) \subset L^r([0,1[), r \leqslant p$.

(iv) Si $u \in l^1$ et $v \in l^p$ alors $u \star v \in l^p \subset l^r, r \geqslant p$

Démonstration. Toutes ces propriétés se démontrent de la même manière que sur $\mathbb{R}$ (les inégalités de Hölder et de Jensen étant encore vraies). □

7.1 Translation des fonctions définies sur $[0,1[$

Définition 7.7. Partie entière et fractionnaire *Pour un réel x on appelle partie entière, que l'on note $E(x)$, le seul entier relatif tel que*

$$E(x) \leqslant x < E(x) + 1$$

On appelle partie fractionnaire le réel $x - E(x)$. La partie fractionnaire appartient toujours à $[0,1[$

Définition 7.8. Translation d'une fonction définie sur $[0,1[$
Si f est une fonction définie sur $[0,1[$ et t un réel, on appelle t-translatée de f que l'on note f_t la fonction définie sur $[0,1[$

$$x \mapsto f\left((x-t) - E\left(x-t\right)\right).$$

Remarque 7.9. Cette définition correspond à l'idée que nous voulons manipuler les fonctions définies sur $[0,1[$ comme des fonctions périodiques de période 1. Dans la suite du polycopié, si nous écrivons $f(x)$ avec f définie sur $[0,1[$ et x n'étant pas dans $[0,1[$, cela désigne $f(x - E(x))$. Par exemple $f(-x)$ désigne $f(1-x)$ lorsque $x \in [0,1[$.

Théorème 7.10. *continuité de la translation Si $f \in L^p([0,1[)$ avec $p < \infty$ alors la fonction T de $\mathbb{R}$ dans $L^p([0,1[)$ qui est définie par*

$$T(x) = (y \mapsto f_x(y) = f(y-x))$$

est uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $L^p([0,1[)$.

Démonstration. Il s'agit de la même preuve que pour les espaces $L^p(\mathbb{R})$ avec une attention particulière pour ce qui se passe aux bords de l'intervalle $[0,1[$ (et moins d'attention à ce qui se passe en l'infini, puisqu'il n'y a plus d'infini dans $[0,1[$). Adaptez la preuve en exercice. □

Avertissement pour les deux prochains chapitres

Les deux chapitres qui suivent traitent de la transforme de Fourier des fonctions dfinies sur $[0,1[$ et sur $\mathbb{Z}$ respectivement. La premire est appele communment "sries de Fourier" et la seconde "transforme de Fourier temps discret" [1]. Chacun des deux chapitres est construit exactement de la mme manire que celui traitant de la transforme de Fourier sur $\mathbb{R}$. Cependant, les spcificits des espaces fonctionnels $L^p([0,1[)$ et l^p font que des dmonstrations deviennent triviales ou sans objet. Par exemple la transforme de Fourier d'une fonction de $[0,1[$ est une suite et dire qu'une suite est continue est trivial (elles le sont toutes compte tenu du fait que la topologie de $\mathbb{Z}$ est la topologie discrte). Autre exemple, on sait que $L^2([0,1[) \subset L^1([0,1[)$ si bien qu'une fois que la transforme de Fourier est dfinie pour $L^1([0,1[)$ il est trivial de l'tendre $L^2([0,1[)$ mais il faudra quand mme dmontrer que c'est bien une isomtrie entre $L^2([0,1[)$ et l^2.

Cela tant dit les dmonstrations seront souvent omises dans les chapitres qui suivent car elles se ramnent aux dmonstrations faites sur $\mathbb{R}$. Une seule partie de ce qui suit est "plus difficile" que ce qui a t fait sur $\mathbb{R}$, il s'agit de la dfinition et des proprits concernant le noyau de Fjer qui est l'quivalent des fonctions h_n du chapitre sur $\mathbb{R}$. Les proprits du noyau de Fjer sont rapportes en annexe afin de rendre la lecture des deux chapitres suivants aussi simple que possible.

1. Cette transforme est en annexe et n'est pas au programme de MDI103, mme si sa connaissance complte les sries de Fourier

Chapitre 8

Fourier sur $[0, 1[$ (ou sries de Fourier)

Dans ce chapitre nous définissons la transformée de Fourier des fonctions définies sur $[0, 1[$ et en démontrons les principales propriétés. On définit d'abord la transformée de Fourier des fonctions sommables puis on démontre le théorème d'inversion. Enfin, on étend la transformée de Fourier à $L^2([0, 1[)$ (trivial) et on démontre qu'elle établit une isométrie bijective entre $L^2([0, 1[)$ et l^2.

Tous les espaces L^p font référence, dans ce chapitre, aux fonctions de $L^p([0, 1[)$ (fonctions définies sur $[0, 1[$ à valeurs complexes). On rappelle que nous appelons fonction continue sur $[0, 1[$ les fonctions continues sur $[0, 1[$ (au sens classique) qui ont une limite en 1 égale à leur valeur en 0. Si nous utilisons le symbole d'intégration $\int$ sans en préciser les bornes, alors cela signife que nous intégrons sur $[0, 1[$ tout entier.

8.1 La transformée de Fourier sur L^1

Définition 8.1. La transformée de Fourier sur L^1
Soit $f \in L^1$, on appelle transformée de Fourier de f, que l'on note $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ la fonction définie sur $\mathbb{Z}$ par

$$\forall \xi \in \mathbb{Z}, \hat{f}(\xi) = \int f(x)e^{-2i\pi\xi.x}dx.$$

$\hat{f}$ est bien définie en tout point comme intégrale du produit d'une fonction bornée ($x \mapsto e^{-2i\pi\xi.x}$) par une fonction L^1 ($x \mapsto f(x)$).

Remarque 8.2. $\hat{f}$ est une fonction définie sur $\mathbb{Z}$. C'est donc une suite. Nous préférons garder la notation fonctionnelle plutôt que la notation sous forme de suite pour bien illustrer l'analogie entre toutes les transformées de Fourier. Le lecteur pourra remplacer $\xi \in \mathbb{Z}$ et $\hat{f}(\xi)$ par $n \in \mathbb{Z}$ et $\hat{f}_n$ s'il le souhaite.

Proposition 8.3. *Dans ce qui suit f et g sont deux fonctions de L^1, λ et α sont des réels.*

- *(i) $\hat{f}$ est bornée par $\|f\|_1$ et donc, la transformée de Fourier est continue de L^1 dans l^∞ (elle est clairement linéaire).*
- *(ii) $\hat{f}(\xi)$ tend vers 0 lorsque $|\xi|$ tend vers $+\infty$.*
- *(iii) $\mathcal{F}(f \star g) = \hat{f}.\hat{g}$ (noter que la convolution de f et g est bien une fonction L^1 d'après la proposition 7.6).*
- *(iv) Si $g(x) = f(x).e^{2i\pi\alpha.x}$ alors $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - \alpha)$ ($\alpha \in \mathbb{Z}$).*
- *(v) Si $g(x) = f(x - \alpha)$ alors $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-2i\pi\alpha.\xi}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).*
- *(vi) Si $g(x) = \overline{f(-x)}$ alors $\hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$.*

Remarque 8.4. Remarquez que l'on a omis la propriété qui stipule que $\hat{f}$ est continue. En effet, $\hat{f}$ est une suite et toutes les suites sont continues.

Démonstration.

(i) La fonction $x \mapsto e^{-2i\pi\xi.x}$ est dans L^∞ et bornée par 1. Son produit contre la fonction f est donc une fonction de L^1 dont l'intégrale est inférieure à $\|f\|_1$ (inégalité de Hölder).

(ii) On remarque que

$$2\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi) - \widehat{f_{\frac{1}{2\xi}}}(\xi)$$

où $f_{\frac{1}{2\xi}}$ est la $\frac{1}{2\xi}$-translatée de f. Or, pour toute suite h bornée on a

$$\forall n, |h(n)| \leqslant \|h\|_\infty.$$

Il vient

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\xi)| \leqslant \frac{1}{2}\|\hat{f} - \widehat{f_{\frac{1}{2\xi}}}\|_\infty &= \frac{1}{2}\|\widehat{f - f_{\frac{1}{2\xi}}}\|_\infty \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|f - f_{\frac{1}{2\xi}}\|_1.\end{aligned}$$

Mais quand $|\xi|$ tend vers $+\infty$, $f_{\frac{1}{2\xi}}$ tend vers f en norme L^1. On en déduit que $|\hat{f}(\xi)|$ tend bien vers 0.

(iii) Nous allons utiliser le théorème de Fubini. La vérification des conditions d'application du théorème de Fubini se fait de manière similaire à la vérification faite pour démontrer le théorème 3.50. Posons donc le calcul

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f \star g)(\xi) = \int\int f(y)g(x-y)e^{-2i\pi\xi.x}dxdy &= \int\int f(y)g(x-y)e^{-2i\pi\xi.(x-y)}e^{-2i\pi\xi.y}dxdy \\ &= \int\int \left(f(y)e^{-2i\pi\xi.y}\right)\left(g(x-y)e^{-2i\pi\xi.(x-y)}\right)dxdy\end{aligned}$$

Après changement de variable $t = x$ et $z = x - y$ l'intégrale devient

$$\begin{aligned}= \int\int \left(f(t)e^{-2i\pi\xi.t}\right)\left(g(z)e^{-2i\pi\xi.z}\right)dtdz &= \int_z \left(\int_t f(t)e^{-2i\pi\xi.t}dt\right)g(z)e^{-2i\pi\xi.z}dz \\ &= \int \hat{f}(\xi)g(z)e^{-2i\pi\xi.z}dz = \hat{f}(\xi)\int g(z)e^{-2i\pi\xi.z}dz = \hat{f}(\xi).\hat{g}(\xi)\end{aligned}$$

Les autres propriétés sont à faire en exercice. Montrons par exemple la numéro *(vi)*.

$$\hat{g}(\xi) = \int_0^1 \overline{f(-t)}e^{-2i\pi\xi.t}dt = \int_0^1 \overline{f(1-t)}e^{-2i\pi\xi.t}dt = \int_0^1 \overline{f(u)}e^{2i\pi\xi.u}du = \overline{\int_0^1 f(u)e^{-2i\pi\xi.u}du} = \overline{\hat{f}(\xi)}$$

□

8.2 Le noyau de Fejér et ses propriétés

Définition 8.5. Le noyau de Fejér
On appelle noyau de Fejér numéro $n \in \mathbb{N}^*$ et on note g_n, la fonction définie sur [0,1[par

$$g_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=-k}^{k} e^{2i\pi l.t} = \sum_{m=-n+1}^{m=n-1} \frac{n-|m|}{n} e^{2i\pi m.t}. \tag{8.1}$$

On note G_n la fonction définie sur $\mathbb{Z}$ par

$$G_n(m) = \begin{cases} 0 \text{ si } |m| \geqslant n. \\ \frac{n-|m|}{n} \text{ si } |m| \leqslant n-1 \end{cases}$$

Remarque 8.6. Le noyau de Fejér (g_n et G_n remplacent les fonctions h_n et H_n du chapitre sur la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$.

Proposition 8.7. *Propriétés du noyau de Fejér*

(i) $\forall n \geqslant 1 \forall t \in]0,1[, g_n(t) = \frac{1}{n}.\left(\frac{\sin(n\pi t)}{\sin(\pi t)}\right)^2$ *(g_n est donc toujours positive).*

(ii) $\forall n \geqslant 1, \forall 1 \leqslant p \leqslant +\infty, g_n \in L^p$ *et* $G_n \in l^p$.

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^* \int_0^1 g_n(t)dt = 1$

(iv) $\forall \eta > 0 \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \int_\eta^{1-\eta} g_n(t)dt < \epsilon$

(v) *si* $f \in L^p, p < +\infty$ *alors*

$$g_n \star f \text{ tend vers } f \text{ dans } L^p$$

(vi) *Si* $f \in L^1$ *alors*

$$\forall x \in [0,1[, (f \star g_n)(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi) G_n(\xi) e^{2i\pi x.\xi} d\xi$$

(vii) *Si f est une fonction bornée et qu'elle est continue en un point x alors*

$$(f \star g_n)(x) \text{ tend vers } f(x) \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini.}$$

Remarque 8.8.
On pourrait facilement montrer que la transformée de Fourier de g_n est G_n (car g_n est une somme finie d'ondes pures). Ceci correspondrait à un théorème d'inversion de la transformée de Fourier sur $\mathbb{Z}$. Et d'ailleurs, comme nous le verrons au chapitre suivant, le théorème d'inversion des la TF sur $\mathbb{Z}$ est trivial. Par ailleurs, on remarque que l'équation 8.1 est correspond à la transformation de Fourier sur $\mathbb{Z}$ (g_n est la transformée de Fourier de la suite G_n, voir le chapitre suivant).

Démonstration. Afin de simplifier la lecture, nous reportons les démonstrations en annexe B. Les preuves sont un peu plus compliquées que pour le cas de h_n car les fonctions g_n ne sont pas des versions homothétiques les unes des autres. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème d'inversion. Nous commençons par définir la transfomée de Fourier inverse.

Définition 8.9. *Si $f \in l^1$ (une suite), on appelle transformée de Fourier inverse, que l'on note $\overline{\mathcal{F}}(f)$ la fonction continue définie par*

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) e^{2i\pi x.k}$$

($\overline{\mathcal{F}}(f)$ est une fonction définie sur $[0,1[$, le fait qu'elle soit continue sera démontré au chapitre suivant).

Théorème 8.10. Le théorème d'inversion
Si $f \in L^1$ et que $\hat{f} \in l^1$, alors

$$\text{pour presque tout } x \in [0,1[, \overline{\mathcal{F}}(\hat{f})(x) = f(x).$$

L'égalité ayant lieu presque partout on peut donc écrire

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = f$$

l'égalité étant prise dans L^1. En particulier, on déduit de ce qui précède que si $\hat{f} \in L^1$ alors f est égale presque partout à une fonction continue.

Corollaire 8.11.
Si $f \in L^1$ et $\hat{f} = 0$ alors $f = 0$. Autrement dit, la transformée de Fourier est injective.

Démonstration.
La preuve du corollaire à partir du théorème est immédiate car la fonction nulle est bien l^1 et que sa transformée de Fourier inverse est nulle.

Passons à la preuve du théorème. On sait que $f \star g_n$ tend vers f en norme L^1. On peut donc extraire une sous suite $f \star g_{n^k}$ et un ensemble $E \subset [0,1[$ de mesure nulle tels que

$$\forall x \notin E, \lim_{k \to \infty} (f \star g_{n^k})(x) = f(x). \tag{8.2}$$

Par ailleurs, on sait que (point (vi) de la proposition 8.7)

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f \star h_{n^k})(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi) G_{n^k}(\xi) e^{2i\pi x.\xi}$$

Mais la suite de fonctions (ou de suites si le lecteur préfère)

$$\xi \in \mathbb{Z} \mapsto \hat{f}(\xi) G_{n^k}(\xi) e^{2i\pi x.\xi}$$

tend ponctuellement vers $\hat{f}(\xi) e^{2i\pi x.\xi}$ et est dominée par $|\hat{f}|$ qui est l^1 par hypothèse. Le théorème de convergence dominée (qui est encore vrai pour les sommes sur $\mathbb{Z}$ au lieu des intégrales) permet donc de dire

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \lim_{k \to \infty} (f \star h_{n^k})(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi x.\xi} = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f})(x) \tag{8.3}$$

En combinant (8.3) et (8.2) on obtient

$$\forall x \notin E, f(x) = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f})(x).$$

□

8.3 Extension de la transformée de Fourier à L^2

Théorème 8.12. *On a les propriétés suivantes*

(i) Si $f \in L^2$ $(\subset L^1)$ alors $\mathcal{F}(f) \in l^2$ et $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$.

(ii) Im$(\mathcal{F})$ est dense dans l^2.

(iii) $\mathcal{F}$ est bijective de L^2 dans l^2.

Remarque 8.13. On n'a pas eu besoin ici de démontrer qu'il existe une extension de L^1 à L^2 de la transformée de Fourier, car L^2 est inclus dans L^1 et la définition de la TF pour L^1 s'applique directement à L^2.

Démonstration.

(i) Soit $f \in L^2(\subset L^1)$. On note $\tilde{f}$ la fonction définie par $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$. On note $r = f \star \tilde{f}$. r est à la fois L^1 comme convolution de deux fonctions L^1 et continue comme convolution de deux fonction L^2 (elle est donc dans tous les espace L^p) et vérifie $r(0) = \|f\|_2^2$. $(r \star g_n)(0)$ tend donc vers $r(0)$ (par continuité de r en 0) et est égal à (par le fait que $r \in L^1$)

$$(r \star g_n)(0) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} G_n(\xi)\hat{r}(\xi).$$

De plus

$$\hat{r} = \hat{f}.\overline{\hat{f}} = |\hat{f}|^2 (\text{ produit de convolution de deux fonctions } L^1).$$

La suite de fonctions (ou suites...)

$$\xi \in \mathbb{Z} \mapsto G_n(\xi)\hat{r}(\xi)$$

tend de manière croissante (à ξ fixé) vers la fonction

$$\xi \mapsto \hat{r}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2.$$

Le théorème de convergence monotone permet de conclure que la fonction $|\hat{f}|^2$ est intégrable et que son intégrale est égale à la limite des intégrales des fonctions
$\xi \mapsto G_n(\xi)\hat{g}(\xi)$ et on sait que

$$\sum G_n(\xi)\hat{r}(\xi) = (r \star g_n)(0)$$

D'où

$$\hat{f} \in l^2 \text{ et } \|\hat{f}\|_2^2 = g(0) = \|f\|_2^2.$$

(ii) Soit u une suite à support fini (i.e. l'ensemble $\{n \in \mathbb{Z}, u_n \neq 0\}$ est fini). On considère la fonction (bien définie car u est à support fini)

$$\forall x \in [0,1[, f(x) = \sum_n u_n e^{2i\pi x.n}.$$

Un calcul simple montre que la transformée de Fourier de f est bien la suite u. De plus $f \in L^2$ car f est bornée (par $\sum |u_n|$) sur $[0,1[$. Enfin, les suites à support fini sont denses dans l^2. De tout cela on déduit que l'image de L^2 par la transformée de Fourier est dense dans l^2.

(iii) L'opérateur $\mathcal{F}$ est une isométrie et son image est dense dans l^2. Il est injectif (comme toute isométrie...) et il nous reste à montrer qu'il est surjectif.

Soit $u \in l^2$. Soit $u^n = \mathcal{F}(f_n)$ une suite de suites qui approche u et qui se trouve dans l'image de $\mathcal{F}$. On a

$$\forall m, n, \|u^n - u^m\|_2 = \|\mathcal{F}(f_n - f_m)\|_2 = \|f_n - f_m\|_2.$$

La suite f_n est donc de Cauchy et admet donc une limite f dans L^2. La continuité de la transformée de Fourier nous permet de conculre que

$$\mathcal{F}(f) = u \text{ et } u \in \mathrm{Im}(\mathcal{F}).$$

□

Corollaire 8.14. densité des polynômes trigonométriques dans L^2 *On appelle polynôme trigonométrique toute fonction sur* $[0, 1[$ *de la forme*

$$f(x) = \sum_{k \in K} \lambda_k e^{2i\pi x.k}$$

où K *est un sous ensemble* **fini** *de* $\mathbb{Z}$*. Ces fonctions sont denses dans* L^2*. Il est clair que les polynômes trigonométriques sont bornés et dans tous les espaces* $L^p([0, 1[)$*.*

Démonstration. Soit une fonction g de L^2. $g \star g_n$ tend vers g en norme L^2. Mais $g \star g_n$ est une fonction de L^1 et sa transformée de Fourier est le produit des deux transformées de Fourier. Mais la transformée de Fourier de g_n est G_n. G_n est à support fini. Donc, la transformée de Fourier de $g \star g_n$ est à support fini, donc l^1. Le théorème d'inversion s'applique et montre que $g \star g_n$ est un polynôme trigonométrique.

On a donc exhibé une suite de polynômes trigonométriques (les $g \star g_n$) qui tend vers g en norme L^2. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Notez que la même démonstration s'applique pour démontrer la densité des polynômes trigonométriques dans tous les espaces L^p pour p fini.

□

Remarque 8.15. On trouvera à la fin du prochain chapitre les règles concernant la (possibilité) de prendre la transformée de Fourier de la convolée de deux fonctions de L^2. Ces propriétés seront plus claires une fois que nous auront bien défini la transformée de Fourier pour les suites (les fonctions sur $\mathbb{Z}$, que l'on appelle aussi "transformée de Fourier à temps discret").

Annexe A

Fourier sur $\mathbb{Z}$ (ou transforme de Fourier temps discret)

Ici encore on notera de manière fonctionnelle les suites définies sur $\mathbb{Z}$. Les transformées de Fourier des suites sont des fonctions définies sur $[0, 1[$ et, dans ce chapitre, L^p fait référence à $L^p([0, 1[)$

A.1 La transformée de Fourier sur l^1

Définition A.1. La transformée de Fourier sur l^1
Soit $f \in l^1$, on appelle transformée de Fourier de f, que l'on note $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ la fonction définie par

$$\forall \xi \in [0, 1[, \hat{f}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) e^{-2i\pi\xi.n}$$

$\hat{f}$ est bien définie en tout point comme intégrale du produit d'une fonction (ou suite) bornée ($n \mapsto e^{-2i\pi\xi.n}$) par une fonction (ou suite...) l^1 ($x \mapsto f(x)$).

Proposition A.2. *Dans ce qui suit f et g sont deux fonctions de l^1, $\alpha \in [0, 1[$.*

(i) $\hat{f}$ est bornée par $\|f\|_1$ et donc, la transformée de Fourier est continue de l^1 dans L^∞ (elle est clairement linéaire).

(ii) $\hat{f}$ est continue sur $[0, 1[$ (limite en 1 égale à la valeur en 0...).

(iii) $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}.\hat{g}$ (noter que la convolution de f et g est bien une fonction l^1 d'après le théorème 7.6).

(iv) Si $g(n) = f(n).e^{2i\pi\alpha.n}$ alors $\forall \xi \in [0, 1[\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - \alpha)$.

(v) Si $g(n) = f(n - m)$ alors $\forall \xi \in [0, 1[\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-2i\pi m.\xi}$.

(vi) Si $g(n) = \overline{f(-n)}$ alors $\forall \xi \in [0, 1[\hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$.

Remarque A.3. On a omis ici la propriété qui stipule que la transformée de Fourier d'une fonction l^1 tend vers 0 à l'infini. En effet, il n'y pas d'infini dans $[0, 1[$ (et donc, toute fonction de $[0, 1[$ tend bien vers 0 à l'infini autant que "tous les éléphants roses sont verts").

Démonstration.

(i) La fonction $n \mapsto e^{-2i\pi\xi.n}$ est dans l^∞ et bornée par 1. Son produit contre la fonction f est donc une fonction de l^1 dont l'intégrale est inférieure à $\|f\|_1$ (inégalité de Hölder).

(ii) La continuité se démontre plus simplement que dans le cas de $\mathbb{R}$. En effet, la somme de fonctions sur $[0,1[$

$$\xi \mapsto \sum f(n)e^{-2i\pi n.\xi}$$

est sommable dans L^∞ (car chaque terme a pour norme L^∞ $|f(n)|$). Il y a donc convergence uniforme vers $\mathcal{F}(f)$. Mais les fonctions $\xi \mapsto e^{-2i\pi n.\xi}$ sont continues. La limite (pour la norme de L^∞) de fonctions continues est continue (convergence uniforme de fonctions continues).

(iii) Nous allons utiliser le théorème de Fubini, qui s'applique aussi pour les sommes doubles sur $\mathbb{Z}$. La vérification des conditions d'application du théorème de Fubini se fait de manière similaire à la vérification faite pour démontrer le théorème 7.6. Posons donc le calcul

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f*g)(\xi) &= \sum_x\sum_y f(y)g(x-y)e^{-2i\pi\xi.x} = \sum_x\sum_y f(y)g(x-y)e^{-2i\pi\xi.(x-y)}e^{-2i\pi\xi.y}\\ &= \sum_x\sum_y \left(f(y)e^{-2i\pi\xi.y}\right)\left(g(x-y)e^{-2i\pi\xi.(x-y)}\right)\end{aligned}$$

Après changement de variable $t = x$ et $z = x - y$ l'intégrale devient

$$\begin{aligned}&= \sum_z\sum_t \left(f(t)e^{-2i\pi\xi.t}\right)\left(g(z)e^{-2i\pi\xi.z}\right) = \sum_z\left(\sum_t f(t)e^{-2i\pi\xi.t}\right)g(z)e^{-2i\pi\xi.z}\\ &= \sum_z \hat{f}(\xi)g(z)e^{-2i\pi\xi.z} = \hat{f}(\xi)\sum_z g(z)e^{-2i\pi\xi.z} = \hat{f}(\xi).\hat{g}(\xi)\end{aligned}$$

Les autres propriétés sont à faire en exercice. □

Remarque A.4. **Il est inutile de définir un noyau** qu'il s'agisse de la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$ ou sur $[0,1[$ nous avons eu besoin de définir un noyau (fonctions h_n pour $\mathbb{R}$ ou le(s) noyau(x) de Fejér pour $[0,1[$). L'utilité de ces noyaux était de nous fournir une "suite de Dirac". Un Dirac étant un objet (non encore bien identifié, voir le cours sur les distributions) qui vérifie $d * f = f$ pour toute fonction f. Un tel objet ne peut être une fonction dans les cas de $[0,1[$ et $\mathbb{R}$. Ne possédant pas un tel objet nous sommes passés par une suite de fonctions (les noyaux) qui en a (asymptotiquement) les propriétés. Par contre, dans le cas de $\mathbb{Z}$, nous avons déjà une fonction qui vérifie cela, il s'agit simplement de la fonction (ou suite) nulle partout sauf en 0 où elle vaut 1.

La remarque précédente va prendre tout son sens quand en verra à quel point la démonstration du théorème d'inversion de la transformée de Fourier sur $\mathbb{Z}$ est simple (notez de plus que ce théorème d'inversion n'a pas besoin de faire l'hypothèse $\hat{f} \in L^1$).

Définition A.5. *Si $f \in L^1$, on appelle transformée de Fourier inverse, que l'on note $\overline{\mathcal{F}}(f)$ la fonction (ou suite) définie sur $\mathbb{Z}$ par*

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(n) = \int_0^1 f(t)e^{2i\pi n.t}dt.$$

Théorème A.6. Le théorème d'inversion
Si $f \in l^1$, alors

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \overline{\mathcal{F}}(\hat{f})(n) = f(n).$$

Corollaire A.7.
Si $f \in l^1$ et $\hat{f} = 0$ alors $f = 0$. Autrement dit, la transformée de Fourier est injective.

Démonstration.
La preuve du corollaire à partir du théorème est immédiate car la transformée de Fourier inverse de la fonction nulle est nulle.

On sait que $\hat{f}$ est une fonction continue sur $[0, 1[$, donc bornée (la limite en 1 étant égale à la valeur en 0, il ne peut y avoir de divergence en 1^-). Elle est donc dans L^1 car bornée et définie sur un compact. Et voilà pourquoi on n'avait pas besoin de l'hypothèse $\hat{f} \in L^1$, elle est toujours vraie dans le cadre de la transformée de Fourier sur $\mathbb{Z}$.

On veut montrer que

$$\forall m \in \mathbb{Z} f(m) = \int_x \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) e^{-2i\pi x.n} \right) e^{2i\pi x.m}.$$

Fixons m dans la suite de la preuve. la suite de fonctions (définies sur $[0, 1[$)

$$S_N(x) = x \mapsto \sum_{n=-N}^{n=N} f(n) e^{-2i\pi x.n} e^{2i\pi x.m}$$

converge en tout point vers $x \mapsto \hat{f}(x) e^{2i\pi x.m}$ (car f est l^1). Elle est dominée par la fonction constante

$$x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|$$

Le théorème de convergence dominée permet d'affirmer que

$$\lim_{N \to \infty} \int_x S_N(x) = \int_x \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) e^{-2i\pi x.n} e^{2i\pi x.m} \right)$$

mais une interversion d'intégrale et de somme **finie** permet de voir facilement que

$$\int_x S_N(x) = \sum_{n=-N}^{n=N} f(n) \delta_m^n$$

($\delta_m^n = 1$ si $m = n$ et 0 sinon. Autrement dit, la fonction Dirac.) Donc

$$\lim_{N \to \infty} S_N(x) = f(m)$$

(suite stationnaire égale à $f(m)$ dès que $N \geqslant m$).

Et on déduit de tout cela que

$$f(m) = \int_x \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) e^{-2i\pi x.n} \right) e^{2i\pi x.m}.$$

□

A.2 Extension de la transformée de Fourier à l^2

Théorème A.8. *On a les propriétés suivantes*

(i) *Si* $f \in l^1 \cap l^2$ $(= l^1$ *car* $l^1 \subset l^2)$ *alors* $\mathcal{F}(f) \in L^2$ *et* $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$.

(ii) *Il existe une unique application linéaire de* l^2 *dans* L^2 *qui est une isométrie et qui est égale à* $\mathcal{F}$ *sur* $L^1 \cap L^2$. *On la notera encore* $\mathcal{F}$.

(iii) *Im*$(\mathcal{F})$ *est dense dans* L^2.

(iv) $\mathcal{F}$ *est bijective de* l^2 *vers* L^2.

Démonstration.

(i) f est dans l^1, sa transformée de Fourier est donc une fonction continue définie sur $[0,1[$. Elle est donc bornée. Elle est donc L^2 (comme toute fonction bornée sur un ensemble de mesure finie).
Soit $\tilde{f}$ la fonction définie par
$$\tilde{f}(n) = \overline{f(-n)}.$$
$f * \tilde{f}$ est une fonction de l^1 dont la transformée de Fourier est $\xi \mapsto |\hat{f}|^2(\xi)$ et le théorème d'inversion nous dit que
$$(f * \tilde{f})(0) = \int |\hat{f}|^2 = \|\mathcal{F}(f)\|_2^2$$
Mais
$$(f * \tilde{f})(0) = \|f\|_2^2.$$

(ii) l^1 étant dense dans l^2, on fait le même raisonnement que dans le cas de $L^2(\mathbb{R})$

(iii) On a vu au chapitre précédent que les polynômes trigonométriques sont denses [1] dans L^2. Or ces polynômes sont (clairement) les transformées de Fourier des suites à support fini. Les suites à support fini sont dans l^2. Donc Im$(\mathcal{F})$ est dense dans L^2 (car il contient les polynômes trigonométriques).

(iv) Preuve formellement identique à celle faite pour $L^2(\mathbb{R})$.

□

A.3 Quelques propriétés de convolution des fonctions L^2 et l^2 en rapport avec la transformation de Fourier

Proposition A.9. *On a les propriétés suivantes. (Vous êtes invités à vous demander, avant de regarder les démonstrations, lesquelles sont des applications triviales de ce qui précède)*

(i) $\forall f \in L^2, \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = f$.

(ii) $\forall f \in l^2, \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = f$.

(iii) $\forall f, g \in L^2, \mathcal{F}(f * g) = \hat{f}.\hat{g}$.

(iv) $\forall f, g \in L^2, f * g = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f}.\hat{g})$.

(v) $\forall f, g \in l^2, f * g = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f}.\hat{g})$.

1. Ici, on voit que nous aurions quand même eu besoin d'utiliser les noyaux de Fejér, puisque ce résultat se démontre en les utilisant

Démonstration. Dans cette proposition, suivant si une fonction est définie sur $[0,1[$ ou sur $\mathbb{Z}$, on sait toujours à quelle définition de la transformée de Fourier les formules font références. Par exemple le symbole $\overline{\mathcal{F}}$ dans la première propriété fait référence à la transformée de Fourier inverse de la TF définie sur $[0,1[$. Cette fonction prend donc en entrée une suite et la transforme en une fonction définie sur $[0,1[$.

(i) Cette propriété est vraie pour les polynômes trigonométriques qui sont denses dans L^2. $\overline{\mathcal{F}}$ est très similaire à la fonction $\mathcal{F}$ et on aurait pu démontrer dans ce chapitre qu'elle est une isométrie (aussi bien que la transformée de Fourier définie sur $\mathbb{Z}$ qui nous a intéressé dans ce chapitre). Elle est donc continue. Or l'égalité à démontrer est vraie pour les polynômes trigonométriques qui sont denses dans L^2. Par continuité elle est vraie sur tout L^2.

(ii) Même démonstration que ci-dessus en remplçant "polynômes trigonométriques" par "suites à support fini".

(iii) Comme $L^2([0,1[) \subset L^1([0,1[)$, cette formule est déjà démontrée.

(iv) $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont des suites de l^2. Leur produit est donc dans l^1. Ceci combiné avec la formule précédente et le théorème d'inversion du chapitre précédent permet de conclure.

(v) Démonstration identique au cas de la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$ (avec moins de problèmes dus à la valeur ponctuelle des fonctions car $\mathbb{Z}$ n'a pas de sous ensemble non vide de mesure nulle. Ou encre, deux suites égales presque partout sont deux suites égales partout.)

□

Annexe B

Annexe : Etude du noyau de Fejer

Nous démontrons ici les propriétés du noyau de Fejér que nous avons admises au chapitre 8. On rappelle les définitions suivantes :

Définition B.1. Le noyau de Fejér
On appelle noyau de Fejér numéro $n \in \mathbb{N}^*$ et on note g_n, la fonction définie sur [0,1[par

$$g_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=-k}^{k} e^{2i\pi l.t} = \sum_{m=-n+1}^{m=n-1} \frac{n-|m|}{n} e^{2i\pi m.t}. \tag{B.1}$$

On note G_n la fonction définie sur $\mathbb{Z}$ par

$$G_n(m) = \begin{cases} 0 \ si \ |m| \geqslant n. \\ \frac{n-|m|}{n} \ si \ |m| \leqslant n-1 \end{cases}$$

Proposition B.2 (Propriétés du noyau de Fejér)**.** *(i)*

$$\forall n \geq 1, \forall t \in]0,1[, g_n(t) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(n\pi t)}{\sin(\pi t)}\right)^2 \quad (g_n \text{ est donc toujours positive })$$

(ii)

$$\forall n \geq 1, \forall 1 \leq p \leq +\infty, g_n \in L^p \text{ et } G_n \in l^p$$

(iii)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 g_n(t)dt = 1$$

(iv)

$$\forall \eta > 0, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \int_\eta^{1-\eta} g_n(t)dt < \epsilon$$

(v) Si $f \in L^p, p < +\infty$, alors :

$$g_n \star f \text{ tend vers } f \text{ dans } L^p$$

(vi) Si $f \in L^1$ alors :

$$\forall x \in]0,1[, (f \star g_n)(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi) G_n(\xi) e^{2i\pi x.\xi}$$

(vii) Si f est une fonction bornée et qu'elle est continue en un point x alors :

$$(f \star g_n)(x) \text{ tend vers } f(x) \text{ quand } n \text{ tenird vers l'infini.}$$

Démonstration. (i) Remarquons d'abord que [1]

$$g_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) \text{ où } D_k(t) = \sum_{l=-k}^{k} e^{2i\pi l.t} = \frac{\sin((2k+1)\pi u)}{\sin(\pi u)}.$$

En effet, en faisant apparaître des sommes télescopiques :

$$\begin{aligned}
\sin(\pi u)D_k(u) &= \frac{1}{2i}(e^{i\pi u} - e^{-i\pi u})\sum_{l=-k}^{k} e^{2i\pi l.u} \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{l=-k}^{k}\left(e^{2i\pi(l+\frac{1}{2})u} - e^{2i\pi(l-\frac{1}{2})u}\right) \\
&= \frac{1}{2i}(e^{2i\pi(k+\frac{1}{2})u} - e^{-2i\pi(k+\frac{1}{2})u})
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\sin^2(\pi u)g_n(u) &= \frac{1}{2in}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{2i\pi(k+\frac{1}{2})u} - e^{-2i\pi(k+\frac{1}{2})u}\right)(e^{i\pi u} - e^{-i\pi u}) \\
&= \frac{1}{2in}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{2i\pi(k+1)u} - e^{2i\pi ku}\right) + \frac{1}{2in}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{-2i\pi(k+1)u} - e^{-2i\pi ku}\right) \\
&= \frac{1}{2in}\left[(e^{2i\pi nu} - 1) + (e^{-2i\pi nu} - 1)\right] \qquad \text{(sommes télescopiques)} \\
&= \frac{1}{(2i)^2}\frac{1}{n}[e^{i\pi nu} - e^{-i\pi nu}]\sin(n\pi u) \\
&= \frac{1}{n}\sin^2(n\pi u)
\end{aligned}$$

(ii) Il suffit de remarquer que $g_n \in L^\infty(0,1)$ (car g_n est continue sur $[0,\pi]$ avec $g(0) = g(1) = 1$), et que G_n est une suite presque nulle.

(iii) Par linéarité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 g_n(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=-k}^{k}\underbrace{\int_0^1 e^{2i\pi l.t}dt}_{=\delta[l]} = 1$$

(iv) Soit $\eta > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\int_\eta^{1-\eta}\left(\frac{\sin(n\pi t)}{\sin(\pi t)}\right)^2 dt &= \frac{2}{n}\int_\eta^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sin(n\pi t)}{\sin(\pi t)}\right)^2 dt \\
&\leq \frac{2}{n}\int_\eta^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sin(n\pi t)}{\sin(\pi\eta)}\right)^2 dt \quad \text{par croissance du sinus sur } [0,\frac{\pi}{2}] \\
&\leq \frac{1}{n}\frac{1}{\sin(\pi\eta)} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \to +\infty
\end{aligned}$$

1. La fonction D_k est appelée noyau de Dirichlet. Son étude est utile pour examiner les propriétés de convergence ponctuelle des séries de Fourier.

(vii) Puisque $\int g_n = 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
|g_n \star f(x) - f(x)| &= \left| \int_0^1 g_n(t)\,(f(x-t) - f(t))\,dt \right| \\
&\leq \int_0^1 g_n(t)|f(x-t) - f(t)|dt \quad \text{car } g_n \geq 0
\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Si f est continue en x, alors il existe $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$, tel que $|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.

$$\begin{aligned}
|g_n \star f(x) - f(x)| &\leq \int_\eta^{1-\eta} g_n(t)|f(x-t) - f(t)|dt + \int_{[0,\eta]\cup[1-\eta,1]} g_n(t) \underbrace{|f(x-t) - f(t)|}_{\leq \epsilon} dt \\
&\leq 2\|f\|_\infty \int_\eta^{1-\eta} g_n(t)dt + \epsilon \underbrace{\int_{[0,\eta]\cup[1-\eta,1]} g_n(t)dt}_{\leq \int_0^1 g_n = 1}
\end{aligned}$$

Pour η fixé, on peut donc choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$:

$$|g_n \star fx) - f(x)| \leq (2\|f\|_\infty + 1)\epsilon$$

Ceci démontre le point (vii).

(v) Remarquons qu'à la démonstration du point (vii), si l'on suppose de plus f continue sur $[0,1]$, alors la convergence de $f \star g_n$ vers f est uniforme sur $[0,1]$ (car, par continuité uniforme, on peut choisir η indépendamment de x).
Pour $f \in L^p$ et $\epsilon > 0$, on choisit $h \in C([0,1])$ telle que $\|f - h\|_p \leq \epsilon$ (par densité de $C([0,1])$ dans L^p). Alors :

$$\begin{aligned}
\|f \star g_n - f\|_p &\leq \|(f-h) \star g_n\|_p + \|h \star g_n - h\|_p + \|h - f\|_p \\
&\leq \|f-h\|_p \|g_n\|_1 + \|h \star g_n - h\|_p + \|h - f\|_p \\
&\leq 2\epsilon + \underbrace{\|h \star g_n - h\|_p}_{\leq \|h \star g_n - h\|_\infty}
\end{aligned}$$

Fixons n assez grand pour que $\|h \star g_n - h\|_\infty \leq \epsilon$. Alors, par convergence uniforme pour les fonctions continues, on obtient :

$$\|f \star g_n - f\|_p \leq 3\epsilon$$

(vi) Par bilinéarité du produit de convolution :

$$\begin{aligned}
(f \star g_n)(x) &= \sum_{m=-n+1}^{n-1} \underbrace{\frac{n - |m|}{n}}_{=G_n(m)} \int_0^1 f(t) e^{2i\pi m(x-t)} dt \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\int_0^1 f(t) e^{-2i\pi mt} dt \right) G_n(m) e^{2i\pi mx} = \sum_m \hat{f}(m) G_n(m) e^{2i\pi xm}
\end{aligned}$$

$\square$