A propos des automates à multiplicité, sur les langages rationnels de même fonction génératrice

Jacques Sakarovitch

LTCI – CNRS/ENST

Le résultat sur les langages rationnels de même fonction génératrice, de même que ceux sur lesquels il se fonde, sont tirés d'un travail en collaboration avec

Marie-Pierre Béal et Sylvain Lombardy,

IGM, Université Paris-Est, Marne-la-Vallée,

publié dans

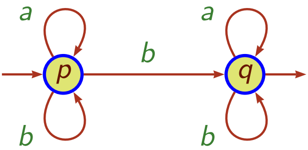
On the equivalence and conjugacy of weighted automata.

in *Proc. of CSR'06*, LNCS 3967.

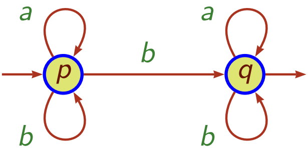
Part I

Automates finis et langages rationnels

Un premier exemple

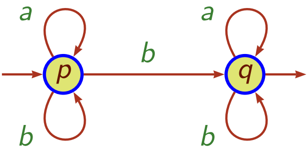


Un premier exemple



$b\,a\,b$

Un premier exemple

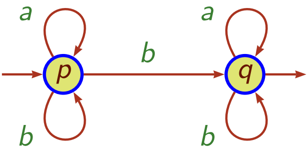


$b\,a\,b$

$$p \xrightarrow{b} p \xrightarrow{a} p \xrightarrow{b} q$$

$$p \xrightarrow{b} q \xrightarrow{a} q \xrightarrow{b} q$$

Un premier exemple



$b\,a\,b$

$$p \xrightarrow{b} p \xrightarrow{a} p \xrightarrow{b} q$$
$$p \xrightarrow{b} q \xrightarrow{a} q \xrightarrow{b} q$$

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in A^* \mid w \in A^* b\, A^*\} = \{w \in A^* \mid |w|_b \geqslant 1\}$$

Langages rationnels (ou réguliers)

Langages acceptés (ou reconnus) par automates finis

$$=$$

Langages décrits par expressions rationnelles (ou régulières)

$$=$$

Langages définis par formules logiques MSO

Points remarquables du modèle automates finis

Equivalence décidable (inclusion décidable)

Fermeture par complément

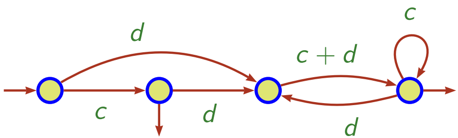
Automate canonique (automate déterministe minimal)

Autre exemple

$$K = (c + d\,c + d\,d)^* \setminus \{c\,c\,(c + d)^* \cup 1_{B^*}\}$$

Autre exemple

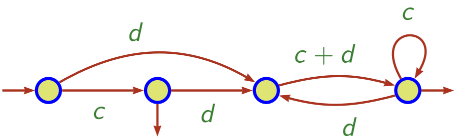
$$K = (c + d\,c + d\,d)^* \setminus \{c\,c\,(c + d)^* \cup 1_{B^*}\}$$



$\mathcal{B}$

Autre exemple

$$K = (c + d\,c + d\,d)^* \setminus \{c\,c\,(c+d)^* \cup 1_{B^*}\}$$

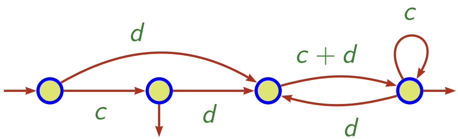


$\mathcal{B}$

c	cdc	$cdcc$	$dcdd$
	cdd	$cddc$	$ddcc$
dc	dcc	$dccc$	$dddc$
dd	ddc	$dcdc$	$dddd$

Autre exemple

$$K = (c + d\,c + d\,d)^* \setminus \{c\,c\,(c+d)^* \cup 1_{B^*}\}$$



$\mathcal{B}$

c	cdc	$cdcc$	$dcdd$
	cdd	$cddc$	$ddcc$
dc	dcc	$dccc$	$dddc$
dd	ddc	$dcdc$	$dddd$

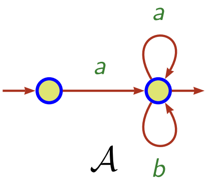
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{g}_K(n) \;=\; \mathrm{Card}\,(K \cap \{c, d\}^n) \;=\; 2^{n-1}$$

Encore un exemple

$$L = a(a+b)^*$$

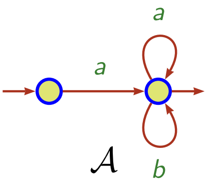
Encore un exemple

$$L = a(a+b)^*$$



Encore un exemple

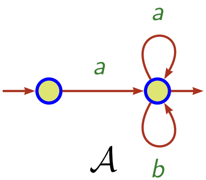
$$L = a(a+b)^*$$



a	aaa	$aaaa$	$abaa$
	aab	$aaab$	$abab$
aa	aba	$aaba$	$abba$
ab	abb	$aabb$	$abbb$

Encore un exemple

$$L = a\,(a+b)^*$$



a	aaa	$aaaa$	$abaa$
	aab	$aaab$	$abab$
aa	aba	$aaba$	$abba$
ab	abb	$aabb$	$abbb$

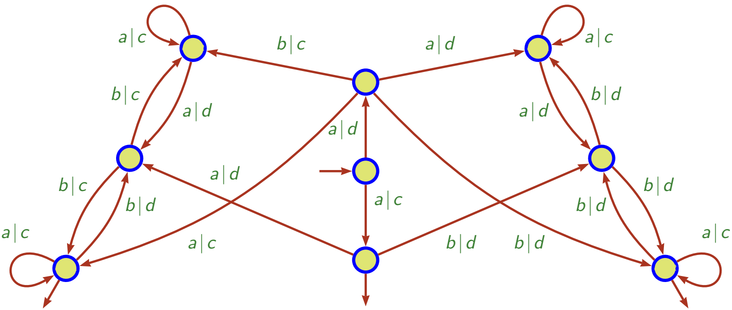
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{g}_L\,(n) \;=\; \mathrm{Card}\,(L \cap \{a,b\}^n) \;=\; 2^{n-1}$$

Un résultat

Proposition

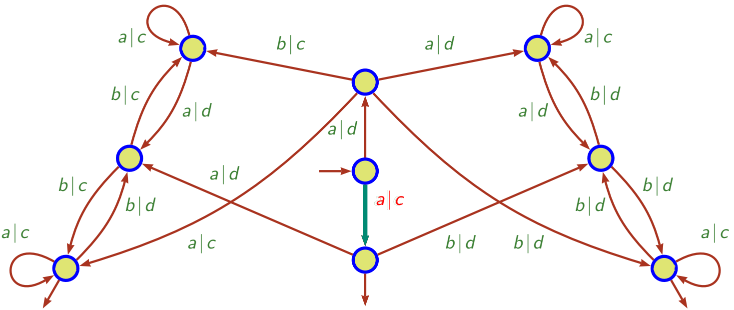
Si deux langages rationnels ont la même fonction de croissance,
alors il existe une bijection rationnelle lettre-à-lettre
qui envoie une langage sur l'autre.

$L = a\,(a+b)^*$ $\qquad$ $K = (c+d\,c+d\,d)^* \setminus \{c\,c\,(c+d)^* \cup 1_{B^*}\}$



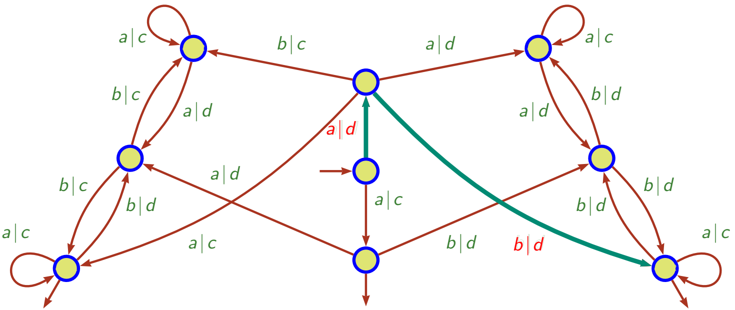
a	*aaa*	*aaaa*	*abaa*	*c*	*cdc*	*cdcc*	*dcdd*
	aab	*aaab*	*abab*		*cdd*	*cddc*	*ddcc*
aa	*aba*	*aaba*	*abba*	*dc*	*dcc*	*dccc*	*dddc*
ab	*abb*	*aabb*	*abbb*	*dd*	*ddc*	*dcdc*	*dddd*

$L = a(a+b)^*$ $\qquad\qquad$ $K = (c+d\,c+d\,d)^* \setminus \{c\,c\,(c+d)^* \cup 1_{B^*}\}$



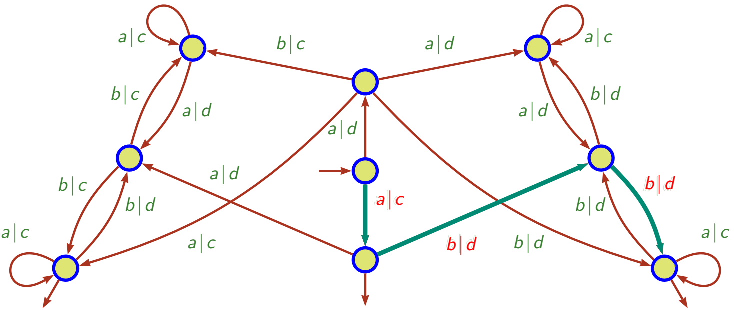
a	*aaa*	*aaaa*	*abaa*	*c*	*cdc*	*cdcc*	*dcdd*
	aab	*aaab*	*abab*		*cdd*	*cddc*	*ddcc*
aa	*aba*	*aaba*	*abba*	*dc*	*dcc*	*dccc*	*dddc*
ab	*abb*	*aabb*	*abbb*	*dd*	*ddc*	*dcdc*	*dddd*

$L = a(a+b)^*$ $K = (c+d\,c+d\,d)^*\setminus\{c\,c\,(c+d)^* \cup 1_{B^*}\}$



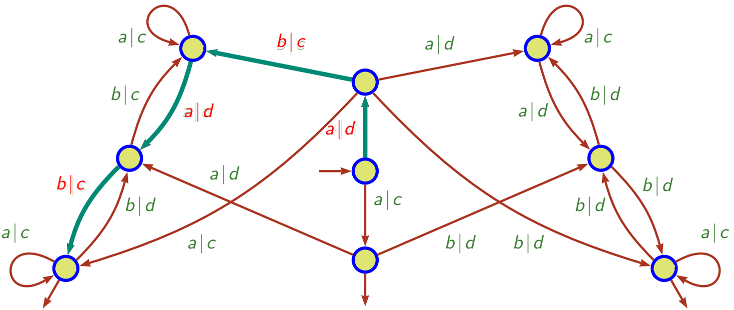
a	*aaa*	*aaaa*	*abaa*	*c*	*cdc*	*cdcc*	*dcdd*
	aab	*aaab*	*abab*		*cdd*	*cddc*	*ddcc*
aa	*aba*	*aaba*	*abba*	*dc*	*dcc*	*dccc*	*dddc*
ab	*abb*	*aabb*	*abbb*	*dd*	*ddc*	*dcdc*	*dddd*

$L = a\,(a+b)^*$ $\qquad$ $K = (c+d\,c+d\,d)^* \setminus \{c\,c\,(c+d)^* \cup 1_{B^*}\}$



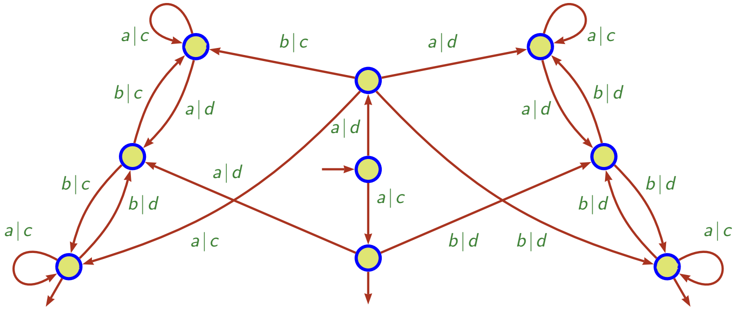
a	*aaa*	*aaaa*	*abaa*	*c*	*cdc*	*cdcc*	*dcdd*
	aab	*aaab*	*abab*		*cdd*	*cddc*	*ddcc*
aa	*aba*	*aaba*	*abba*	*dc*	*dcc*	*dccc*	*dddc*
ab	*abb*	*aabb*	*abbb*	*dd*	*ddc*	*dcdc*	*dddd*

$L = a(a+b)^*$ $\qquad$ $K = (c+d\,c+d\,d)^* \setminus \{c\,c\,(c+d)^* \cup 1_{B^*}\}$

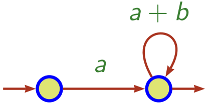


a	*aaa*	*aaaa*	*abaa*	*c*	*cdc*	*cdcc*	*dcdd*
	aab	*aaab*	*abab*		*cdd*	*cddc*	*ddcc*
aa	*aba*	*aaba*	*abba*	*dc*	*dcc*	*dccc*	*dddc*
ab	*abb*	*aabb*	*abbb*	*dd*	*ddc*	*dcdc*	*dddd*

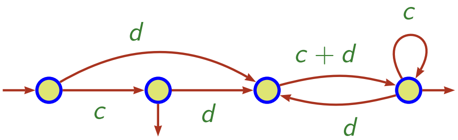
Comment construire le transducteur



à partir des automates



$\mathcal{A}$



$\mathcal{B}$

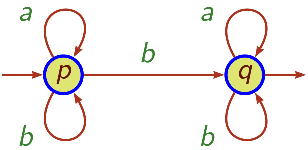
Première tâche

Faire le lien entre la fonction de croissance et les automates finis.

Part II

Automates avec multiplicité

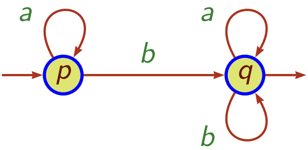
Retour au premier exemple



$$p \xrightarrow{b} p \xrightarrow{a} p \xrightarrow{b} q$$

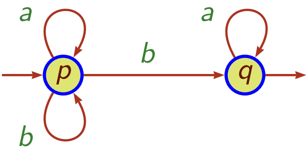
$$p \xrightarrow{b} q \xrightarrow{a} q \xrightarrow{b} q$$

Retour au premier exemple



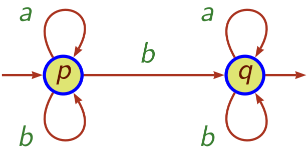
$$p \xrightarrow{b} q \xrightarrow{a} q \xrightarrow{b} q$$

Retour au premier exemple



$$p \xrightarrow{b} p \xrightarrow{a} p \xrightarrow{b} q$$

Retour au premier exemple

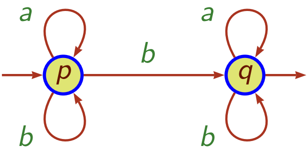


$$p \xrightarrow{b} p \xrightarrow{a} p \xrightarrow{b} q$$

$$p \xrightarrow{b} q \xrightarrow{a} q \xrightarrow{b} q$$

$$b\,a\,b \quad \longmapsto \quad 2$$

Retour au premier exemple

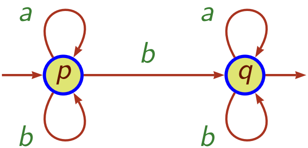


$$p \xrightarrow{b} p \xrightarrow{a} p \xrightarrow{b} q$$

$$p \xrightarrow{b} q \xrightarrow{a} q \xrightarrow{b} q$$

$$b\,a\,b \quad \longmapsto \quad 2 \qquad\qquad \forall w \in A^* \qquad w \quad \longmapsto \quad |w|_b$$

Retour au premier exemple



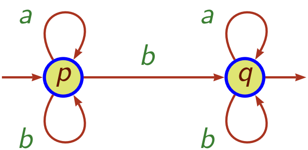
$$p \xrightarrow{b} p \xrightarrow{a} p \xrightarrow{b} q$$

$$p \xrightarrow{b} q \xrightarrow{a} q \xrightarrow{b} q$$

$$b\,a\,b \quad \longmapsto \quad 2 \qquad\qquad \forall w \in A^* \qquad w \quad \longmapsto \quad |w|_b$$

$$s\colon A^* \longrightarrow \mathbb{N} \qquad s\ :\ w \quad \longmapsto \quad \langle s, w \rangle \qquad\qquad s \in \mathbb{N}^{A^*}$$

Retour au premier exemple



$$p \xrightarrow{b} p \xrightarrow{a} p \xrightarrow{b} q$$

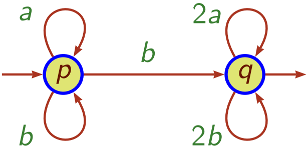
$$p \xrightarrow{b} q \xrightarrow{a} q \xrightarrow{b} q$$

$$b\,a\,b \quad \longmapsto \quad 2 \qquad\qquad \forall w \in A^* \qquad w \quad \longmapsto \quad |w|_b$$

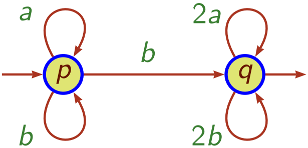
$$s\colon A^* \longrightarrow \mathbb{N} \qquad s \;:\; w \quad \longmapsto \quad \langle s, w \rangle \qquad\qquad s \in \mathbb{N}^{A^*}$$

$$s = b + a\,b + b\,a + 2\,b\,b + a\,a\,b$$
$$+\, a\,b\,a + 2\,a\,b\,b + b\,a\,a + 2\,b\,a\,b + \ldots$$

Variation



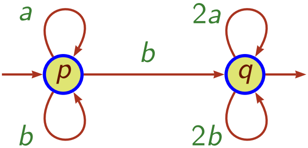
Variation



$$p \xrightarrow{b} p \xrightarrow{a} p \xrightarrow{b} q$$

$$p \xrightarrow{b} q \xrightarrow{2a} q \xrightarrow{2b} q$$

Variation

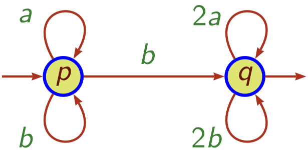


$$p \xrightarrow{b} p \xrightarrow{a} p \xrightarrow{b} q$$

$$p \xrightarrow{b} q \xrightarrow{2a} q \xrightarrow{2b} q$$

$$b\,a\,b \quad \longmapsto \quad 5$$

Variation

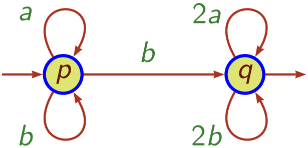


$$p \xrightarrow{b} p \xrightarrow{a} p \xrightarrow{b} q$$

$$p \xrightarrow{b} q \xrightarrow{2a} q \xrightarrow{2b} q$$

$$b\,a\,b \quad \longmapsto \quad 5 \qquad\qquad \forall w \in A^* \qquad w \quad \longmapsto \quad \langle w \rangle_2$$

Variation



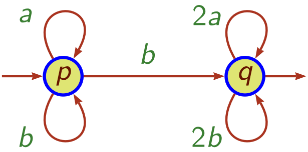
$$p \xrightarrow{b} p \xrightarrow{a} p \xrightarrow{b} q$$

$$p \xrightarrow{b} q \xrightarrow{2a} q \xrightarrow{2b} q$$

$$b\,a\,b \quad \longmapsto \quad 5 \qquad\qquad \forall w \in A^* \qquad w \quad \longmapsto \quad \langle w \rangle_2$$

$$s\colon A^* \longrightarrow \mathbb{N} \qquad s \;:\; w \quad \longmapsto \quad \langle s, w \rangle \qquad\qquad s \in \mathbb{N}^{A^*}$$

Variation



$$p \xrightarrow{b} p \xrightarrow{a} p \xrightarrow{b} q$$

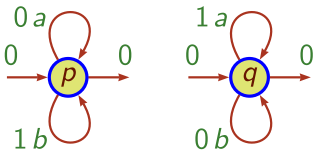
$$p \xrightarrow{b} q \xrightarrow{2a} q \xrightarrow{2b} q$$

$$b\,a\,b \quad \longmapsto \quad 5 \qquad\qquad \forall w \in A^* \qquad w \quad \longmapsto \quad \langle w \rangle_2$$

$$s\colon A^* \longrightarrow \mathbb{N} \qquad s \; : \; w \quad \longmapsto \quad <s, w> \qquad\qquad s \in \mathbb{N}^{A^*}$$

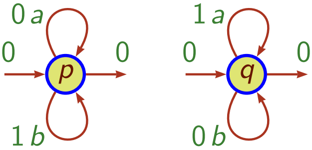
$$s = b + a\,b + 2\,b\,a + 3\,b\,b + a\,a\,b$$
$$+ 2\,a\,b\,a + 3\,a\,b\,b + 4\,b\,a\,a + 5\,b\,a\,b + \ldots$$

Autre exemple



Multiplicité dans $\mathbb{K} = \mathcal{M} = \langle\, \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \mathsf{min}, + \,\rangle$

Autre exemple

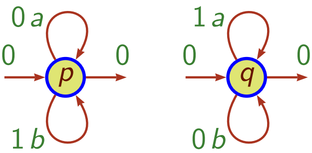


Multiplicité dans $\mathbb{K} = \mathcal{M} = \langle\, \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \min, + \,\rangle$

$$p \xrightarrow{1b} p \xrightarrow{0a} p \xrightarrow{1b} p$$

$$q \xrightarrow{0b} q \xrightarrow{1a} q \xrightarrow{0b} q$$

Autre exemple



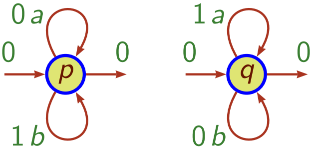
Multiplicité dans $\mathbb{K} = \mathcal{M} = \langle\, \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \min, + \,\rangle$

$$p \xrightarrow{1b} p \xrightarrow{0a} p \xrightarrow{1b} p$$

$$q \xrightarrow{0b} q \xrightarrow{1a} q \xrightarrow{0b} q$$

$b\,a\,b \quad \longmapsto \quad 1$

Autre exemple



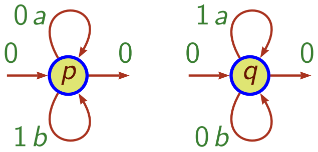
Multiplicité dans $\mathbb{K} = \mathcal{M} = \langle\, \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \min, +\,\rangle$

$$p \xrightarrow{1b} p \xrightarrow{0a} p \xrightarrow{1b} p$$

$$q \xrightarrow{0b} q \xrightarrow{1a} q \xrightarrow{0b} q$$

$b\,a\,b \quad \longmapsto \quad 1 \qquad\qquad \forall w \in A^* \qquad w \quad \longmapsto \quad \min\{|w|_a, |w|_b\}$

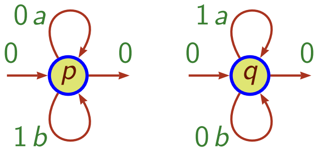
Autre exemple



Multiplicité dans $\mathbb{K} = \mathcal{M} = \langle\, \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \min, + \,\rangle$

$s \colon A^* \longrightarrow \mathcal{M} \qquad s \; : \; w \quad \longmapsto \quad \langle s, w \rangle \qquad\qquad s \in \mathcal{M}^{A^*}$

Autre exemple



Multiplicité dans $\mathbb{K} = \mathcal{M} = \langle\, \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \min, +\, \rangle$

$s\colon A^* \longrightarrow \mathcal{M} \qquad s\ :\ w \quad \longmapsto \quad \langle s, w\rangle \qquad\qquad s \in \mathcal{M}^{A^*}$

$$s = 0 1_{A^*} \oplus 0a \oplus 0b \oplus 0aa \oplus 1ab \oplus 1ba \oplus 0bb$$
$$\oplus\ 0aaa \oplus 1aab \oplus 1aba \oplus 1abb \oplus \ \ldots$$

Les séries jouent le rôle des langages

$\mathbb{K}\langle\langle A^* \rangle\rangle$ **joue le rôle de** $\mathfrak{P}(A^*)$

Richesse du modèle automates à multiplicité

- $\mathbb{B}$ automates “classiques”
- $\mathbb{N}$ comptage “classique”
- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ multiplicité numérique
- $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \min, + \rangle$ automates Min-plus
- $\mathfrak{P}(B^*) = \mathbb{B}\langle\langle B^* \rangle\rangle$ transducteurs
- $\mathbb{N}\langle\langle B^* \rangle\rangle$ transducteurs avec multiplicité
- $\mathfrak{P}(F(B))$ automates à pile

Equivalence des automates à multiplicité

L'équivalence des automates à multiplicité dans

Equivalence des automates à multiplicité

L'équivalence des automates à multiplicité dans

le semi-anneau de Boole $\mathbb{B}$ est décidable

Equivalence des automates à multiplicité

L'équivalence des automates à multiplicité dans

le semi-anneau de Boole $\mathbb{B}$		décidable
un corps	est	décidable

Equivalence des automates à multiplicité

L'équivalence des automates à multiplicité dans

le semi-anneau de Boole $\mathbb{B}$		décidable
un sous-semi-anneau d'un corps	est	décidable

Equivalence des automates à multiplicité

L'équivalence des automates à multiplicité dans

le semi-anneau de Boole $\mathbb{B}$		décidable
un sous-semi-anneau d'un corps		décidable
$(\mathbb{Z}, \min, +)$	est	indécidable

Equivalence des automates à multiplicité

L'équivalence des automates à multiplicité dans

le semi-anneau de Boole $\mathbb{B}$		décidable
un sous-semi-anneau d'un corps		décidable
$(\mathbb{Z}, \mathsf{min}, +)$		indécidable
$\mathrm{Rat}\, B^*$	est	indécidable

L'équivalence des

transducteurs	est	indécidable

Equivalence des automates à multiplicité

L'équivalence des automates à multiplicité dans

le semi-anneau de Boole $\mathbb{B}$		décidable
un sous-semi-anneau d'un corps		décidable
$(\mathbb{Z}, \min, +)$		indécidable
$\mathrm{Rat}\, B^*$		indécidable
$\mathbb{N}\mathrm{Rat}\, B^*$	est	décidable

L'équivalence des

transducteurs		indécidable
transducteurs à multiplicité dans $\mathbb{N}$	est	décidable

Equivalence des automates à multiplicité

L'équivalence des automates à multiplicité dans

le semi-anneau de Boole $\mathbb{B}$	décidable
un sous-semi-anneau d'un corps	décidable
$(\mathbb{Z}, \mathsf{min}, +)$	indécidable
$\mathrm{Rat}\, B^*$	indécidable
$\mathbb{N}\mathrm{Rat}\, B^*$	décidable

L'équivalence des

transducteurs		indécidable
transducteurs à multiplicité dans $\mathbb{N}$		décidable
transducteurs fonctionnels	est	décidable

Equivalence des automates à multiplicité

L'équivalence des automates à multiplicité dans

le semi-anneau de Boole $\mathbb{B}$	décidable
un sous-semi-anneau d'un corps	décidable
$(\mathbb{Z}, \mathsf{min}, +)$	indécidable
$\mathrm{Rat}\, B^*$	indécidable
$\mathbb{N}\mathrm{Rat}\, B^*$	décidable

L'équivalence des

transducteurs		indécidable
transducteurs à multiplicité dans $\mathbb{N}$		décidable
transducteurs fonctionnels		décidable
$(\mathbb{Z}, \mathsf{min}, +)$-automates non ambigus	est	décidable

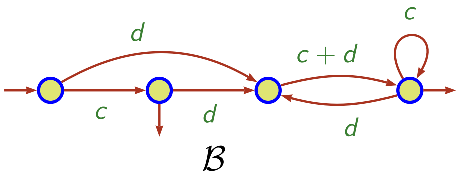
Retour sur la fonction de croissance

un langage $\qquad K = (c + d\,c + d\,d)^* \setminus \{c\,c\,(c + d)^* \cup 1_{B^*}\}$

Retour sur la fonction de croissance

un langage $K = (c + d\,c + d\,d)^* \setminus \{c\,c\,(c + d)^* \cup 1_{B^*}\}$

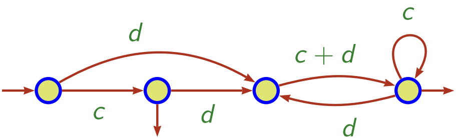
un automate (*non ambigu*)



Retour sur la fonction de croissance

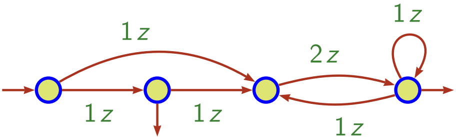
un langage $\qquad K = (c + d\,c + d\,d)^* \setminus \{c\,c\,(c+d)^* \cup 1_{B^*}\}$

un automate (*non ambigu*)



$\mathcal{B}$

se transforme en un automate sur $\{z\}^*$ à multiplicité dans $\mathbb{N}$

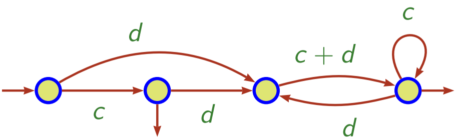


$\mathcal{B}'$

Retour sur la fonction de croissance

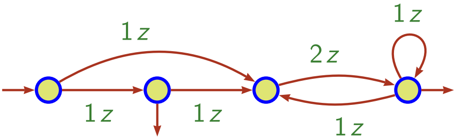
un langage $K = (c + d\,c + d\,d)^* \setminus \{c\,c\,(c+d)^* \cup 1_{B^*}\}$

un automate (*non ambigu*)



$\mathcal{B}$

se transforme en un automate sur $\{z\}^*$ à multiplicité dans $\mathbb{N}$



$\mathcal{B}'$

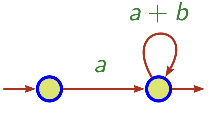
qui réalise la fonction de génératrice $\mathrm{G}_K(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{g}_K(n)\, z^n$

Part III

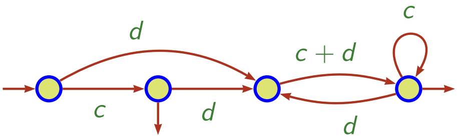
Le cheminement vers la preuve du résultat

Qu'est-ce qu'il y a derrière la phrase:

‘*Deux langages rationnels de même fonction génératrice*’ ?



$\mathcal{A}$

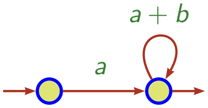


$\mathcal{B}$

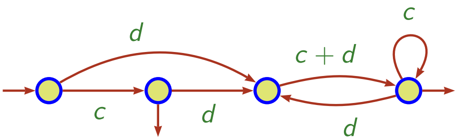
Qu'est-ce qu'il y a derrière la phrase:

'*Deux langages rationnels de même fonction génératrice*' ?

(i) Deux automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, de préférence non ambigus,



$\mathcal{A}$



$\mathcal{B}$

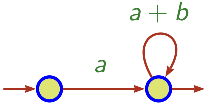
Qu'est-ce qu'il y a derrière la phrase:

'*Deux langages rationnels de même fonction génératrice*' ?

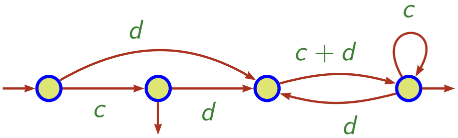
(i) Deux automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, de préférence non ambigus,

(ii) transformés en $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$, sur $\{z\}^*$ à multiplicité dans $\mathbb{N}$,
qui réalisent les *fonctions génératrices* $\mathsf{G}_L(z)$ et $\mathsf{G}_K(z)$:

$$\mathsf{G}_L(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{g}_L(n)\, z^n \qquad \text{et} \qquad \mathsf{G}_K(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{g}_K(n)\, z^n \; .$$



$\mathcal{A}$



$\mathcal{B}$

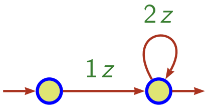
Qu'est-ce qu'il y a derrière la phrase:

'*Deux langages rationnels de même fonction génératrice*' ?

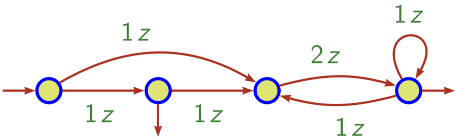
(i) Deux automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, de préférence non ambigus,

(ii) transformés en $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$, sur $\{z\}^*$ à multiplicité dans $\mathbb{N}$, qui réalisent les *fonctions génératrices* $\mathrm{G}_L(z)$ et $\mathrm{G}_K(z)$:

$$\mathrm{G}_L(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{g}_L(n)\, z^n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G}_K(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{g}_K(n)\, z^n \ .$$



$\mathcal{A}'$



$\mathcal{B}'$

Qu'est-ce qu'il y a derrière la phrase:

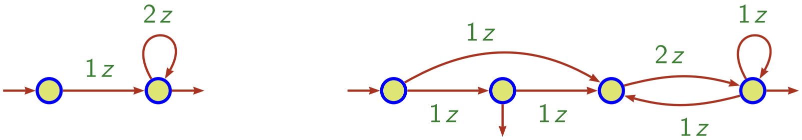
'*Deux langages rationnels de même fonction génératrice*' ?

(i) Deux automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, de préférence non ambigus,

(ii) transformés en $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$, sur $\{z\}^*$ à multiplicité dans $\mathbb{N}$,
qui réalisent les *fonctions génératrices* $\mathsf{G}_L(z)$ et $\mathsf{G}_K(z)$:

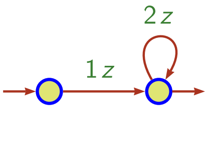
$$\mathsf{G}_L(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{g}_L(n)\, z^n \qquad \text{et} \qquad \mathsf{G}_K(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{g}_K(n)\, z^n \ .$$

(iii) et dont l'équivalence est décidable (Schützenberger 1961).

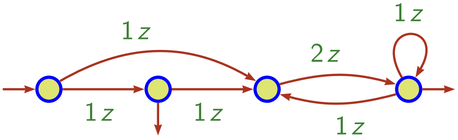


$\mathcal{A}'$ $\qquad$ $\mathcal{B}'$

Le théorème principal



$\mathcal{A}'$

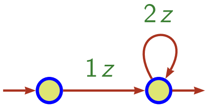


$\mathcal{B}'$

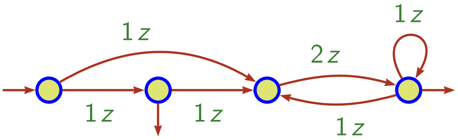
Le théorème principal

Theorem (BLS)

Deux $\mathbb{N}$-automates sont équivalents si, et seulement si ils sont conjugués à un même troisième $\mathbb{N}$-automate.



$\mathcal{A}'$

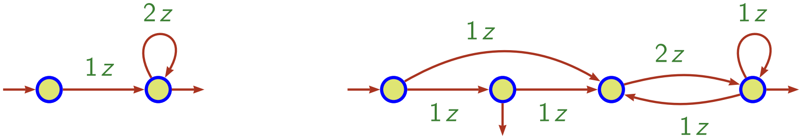


$\mathcal{B}'$

Le théorème principal

Un aveu

Les automates sont des matrices



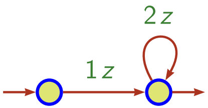
$\mathcal{A}'$ $\mathcal{B}'$

Le théorème principal

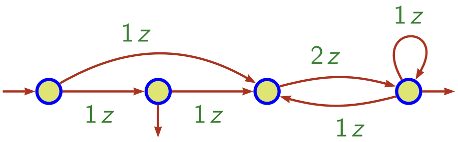
Un aveu

Les automates sont des matrices

$$\mathcal{A}' = \langle\, I, E, T \,\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & 2\,z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$



$\mathcal{A}'$



$\mathcal{B}'$

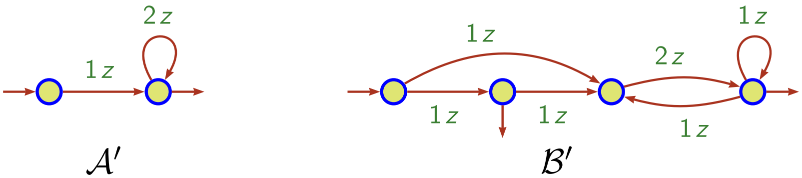
Le théorème principal

Un aveu

Les automates sont des matrices

$$\mathcal{A}' = \langle\, I, E, T \,\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & 2z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

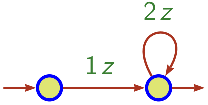
$$|\mathcal{A}'| = I\, E^*\, T$$



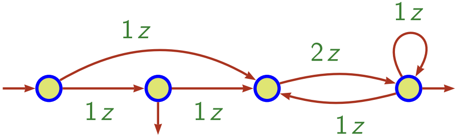
Le théorème principal

Theorem (BLS)

Deux $\mathbb{N}$-automates sont équivalents si, et seulement si ils sont conjugués à un même troisième $\mathbb{N}$-automate.



$\mathcal{A}'$



$\mathcal{B}'$

Le théorème principal

Theorem (BLS)
Deux $\mathbb{N}$-automates sont équivalents si, et seulement si ils sont conjugués à un même troisième $\mathbb{N}$-automate.

Definition
Soient $\mathcal{A} = \langle\, I, E, T \,\rangle$ et $\mathcal{B} = \langle\, J, F, U \,\rangle$ deux $\mathbb{K}$-automates.

$\mathcal{A}$ est conjugué à $\mathcal{B}$

s'il existe une $\mathbb{K}$-matrice X telle que:

$$I\,X = J, \qquad E\,X = X\,F, \quad \text{et} \quad T = X\,U \ .$$

Ceci est noté $\mathcal{A} \overset{X}{\Longrightarrow} \mathcal{B}$.

Le théorème principal

Theorem (BLS)

Deux $\mathbb{N}$-automates sont équivalents si, et seulement si ils sont conjugués à un même troisième $\mathbb{N}$-automate.

Definition

Soient $\mathcal{A} = \langle\, I, E, T \,\rangle$ et $\mathcal{B} = \langle\, J, F, U \,\rangle$ deux $\mathbb{K}$-automates.

$\mathcal{A}$ est conjugué à $\mathcal{B}$

s'il existe une $\mathbb{K}$-matrice X telle que:

$$I\,X = J, \qquad E\,X = X\,F, \quad \text{et} \quad T = X\,U \ .$$

Ceci est noté $\mathcal{A} \stackrel{X}{\Longrightarrow} \mathcal{B}$.

La conjugaison est un *préordre*

(transitif et réflexif, mais pas symétrique).

Le théorème principal

Theorem (BLS)

Deux $\mathbb{N}$-automates sont équivalents si, et seulement si ils sont conjugués à un même troisième $\mathbb{N}$-automate.

Definition

Soient $\mathcal{A} = \langle\, I, E, T \,\rangle$ et $\mathcal{B} = \langle\, J, F, U \,\rangle$ deux $\mathbb{K}$-automates.

$\mathcal{A}$ est conjugué à $\mathcal{B}$

s'il existe une $\mathbb{K}$-matrice X telle que:

$$I\,X = J, \qquad E\,X = X\,F, \quad \text{et} \quad T = X\,U \ .$$

Ceci est noté $\mathcal{A} \overset{X}{\Longrightarrow} \mathcal{B}$.

$\mathcal{A} \overset{X}{\Longrightarrow} \mathcal{B}$ implique que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont *équivalents*.

$$I\,E\,E\,T = I\,E\,E\,X\,U = I\,E\,X\,F\,U = I\,X\,F\,F\,U = J\,F\,F\,U$$

$$\text{et donc} \qquad I\,E^*\,T = J\,F^*\,U$$

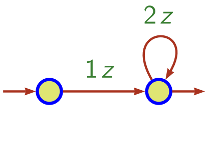
Le théorème principal

Theorem (BLS)

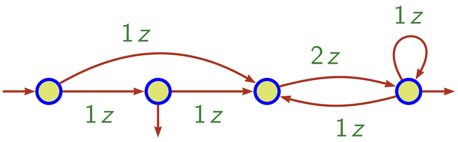
Deux $\mathbb{N}$-automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalents ssi il existe un $\mathbb{N}$-automate $\mathcal{C}$ et deux $\mathbb{N}$-matrices X et Y tels que

$$\mathcal{A} \overset{X}{\Longleftarrow} \mathcal{C} \overset{Y}{\Longrightarrow} \mathcal{B}$$

De plus, $\mathcal{C}$ est effectivement calculable à partir de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.



$\mathcal{A}'$



$\mathcal{B}'$

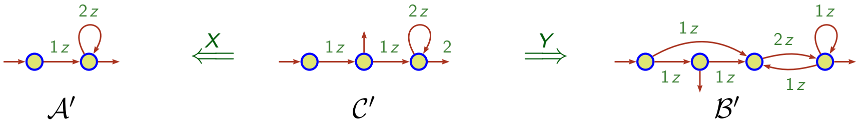
Le théorème principal

Theorem (BLS)

Deux $\mathbb{N}$-automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalents ssi il existe un $\mathbb{N}$-automate $\mathcal{C}$ et deux $\mathbb{N}$-matrices X et Y tels que

$$\mathcal{A} \overset{X}{\Longleftarrow} \mathcal{C} \overset{Y}{\Longrightarrow} \mathcal{B}$$

De plus, $\mathcal{C}$ est effectivement calculable à partir de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.



Le théorème principal

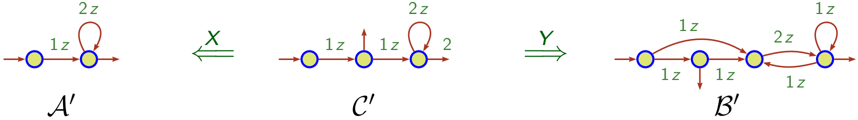
Theorem (BLS)

Deux $\mathbb{N}$-automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalents ssi il existe un $\mathbb{N}$-automate $\mathcal{C}$ et deux $\mathbb{N}$-matrices X et Y tels que

$$\mathcal{A} \xLeftarrow{X} \mathcal{C} \xRightarrow{Y} \mathcal{B}$$

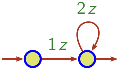
De plus, $\mathcal{C}$ est effectivement calculable à partir de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

avec $\quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$



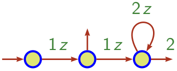
Le théorème principal

$$\mathcal{C}' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \mathcal{A}' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & 2z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$



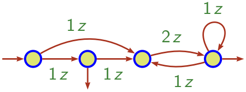
$\mathcal{A}'$

$$\overset{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{\Longleftarrow}$$



$\mathcal{C}'$

$$\overset{Y}{\Longrightarrow}$$



$\mathcal{B}'$

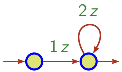
Le théorème principal

$$\mathcal{C}' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \mathcal{A}' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & 2z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

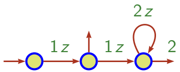
$$\begin{pmatrix} 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & 2z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



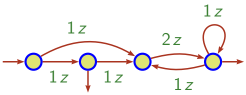
$\mathcal{A}'$

$$\xLeftarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$



$\mathcal{C}'$

$$\xRightarrow{Y}$$



$\mathcal{B}'$

$$\mathcal{A}' \xLeftarrow{X} \mathcal{C}' \xRightarrow{Y} \mathcal{B}'$$

Le deuxième théorème

$$\mathcal{A}' \qquad \overset{X}{\Longleftarrow} \qquad \mathcal{C}' \qquad \overset{Y}{\Longrightarrow} \qquad \mathcal{B}'$$

Le deuxième théorème

Une interprétation structurelle de la conjugaison

Theorem (BLS)

Soient $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *deux* $\mathbb{N}$*-automates conjugués.*
Alors, il existe un $\mathbb{N}$*-automate* $\mathcal{D}$
tel que $\mathcal{A}$ *est un co-quotient de* $\mathcal{D}$
et $\mathcal{B}$ *est un quotient de* $\mathcal{D}$ *.*
De plus, $\mathcal{D}$ *est effectivement calculable à partir de* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *.*

$$\mathcal{A}' \quad \stackrel{X}{\Longleftarrow} \quad \mathcal{C}' \quad \stackrel{Y}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{B}'$$

Le deuxième théorème

Une interprétation structurelle de la conjugaison

Theorem (BLS)

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathbb{N}$-automates conjugués.
Alors, il existe un $\mathbb{N}$-automate $\mathcal{D}$
tel que $\mathcal{A}$ est un co-quotient de $\mathcal{D}$
et $\mathcal{B}$ est un quotient de $\mathcal{D}$.
De plus, $\mathcal{D}$ est effectivement calculable à partir de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

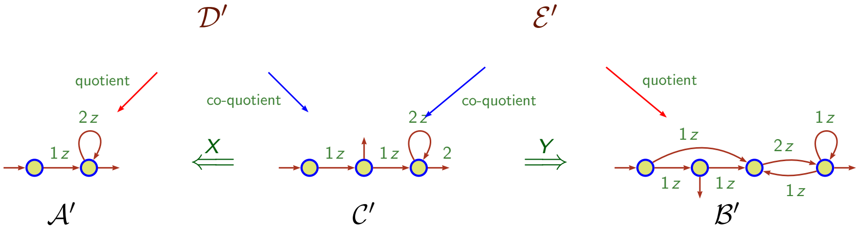
$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{D}' \arrow[dl, "\text{quotient}"'] \arrow[dr, "\text{co-quotient}"] & & \mathcal{E}' \arrow[dl, "\text{co-quotient}"'] \arrow[dr, "\text{quotient}"] & \\
\mathcal{A}' & \overset{X}{\Longleftarrow} & \mathcal{C}' & \overset{Y}{\Longrightarrow} & \mathcal{B}'
\end{tikzcd}$$

Le deuxième théorème

Une interprétation structurelle de la conjugaison

Theorem (BLS)

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathbb{N}$-automates conjugués.
Alors, il existe un $\mathbb{N}$-automate $\mathcal{D}$
tel que $\mathcal{A}$ est un co-quotient de $\mathcal{D}$
et $\mathcal{B}$ est un quotient de $\mathcal{D}$.
De plus, $\mathcal{D}$ est effectivement calculable à partir de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

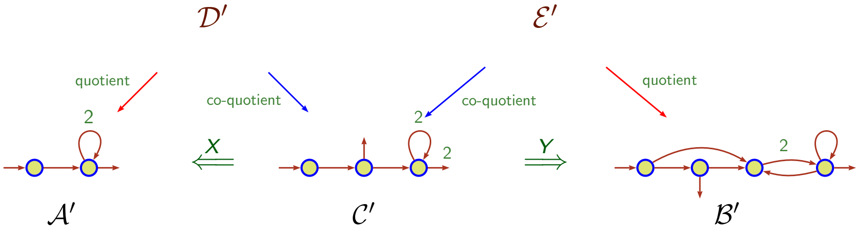


Le deuxième théorème

Une interprétation structurelle de la conjugaison

Theorem (BLS)

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathbb{N}$-automates conjugués.
Alors, il existe un $\mathbb{N}$-automate $\mathcal{D}$
tel que $\mathcal{A}$ est un co-quotient de $\mathcal{D}$
et $\mathcal{B}$ est un quotient de $\mathcal{D}$.
De plus, $\mathcal{D}$ est effectivement calculable à partir de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

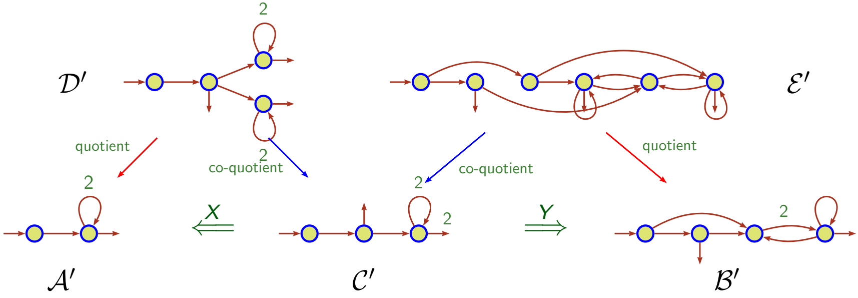


Le deuxième théorème

Une interprétation structurelle de la conjugaison

Theorem (BLS)

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathbb{N}$-automates conjugués.
Alors, il existe un $\mathbb{N}$-automate $\mathcal{D}$
tel que $\mathcal{A}$ est un co-quotient de $\mathcal{D}$
et $\mathcal{B}$ est un quotient de $\mathcal{D}$.
De plus, $\mathcal{D}$ est effectivement calculable à partir de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

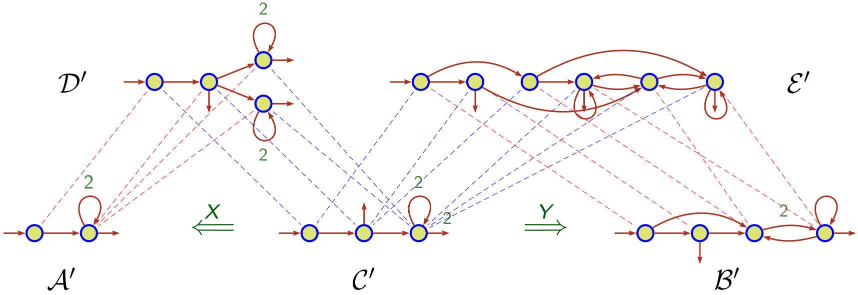


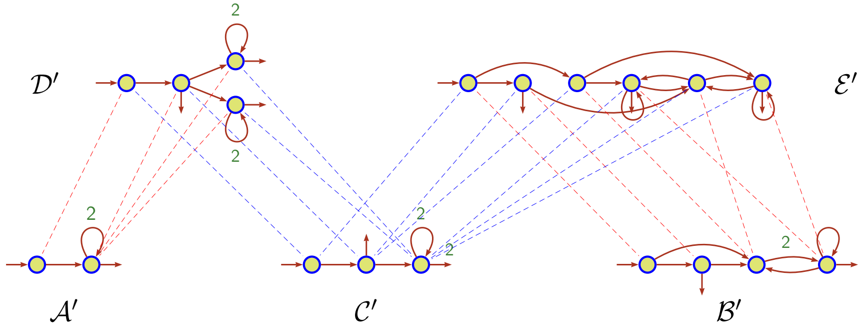
Le deuxième théorème

Une interprétation structurelle de la conjugaison

Theorem (BLS)

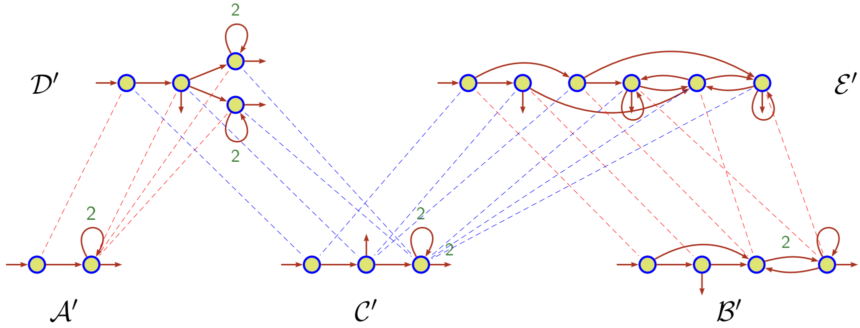
Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathbb{N}$-automates conjugués.
Alors, il existe un $\mathbb{N}$-automate $\mathcal{D}$
tel que $\mathcal{A}$ est un co-quotient de $\mathcal{D}$
et $\mathcal{B}$ est un quotient de $\mathcal{D}$.
De plus, $\mathcal{D}$ est effectivement calculable à partir de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.



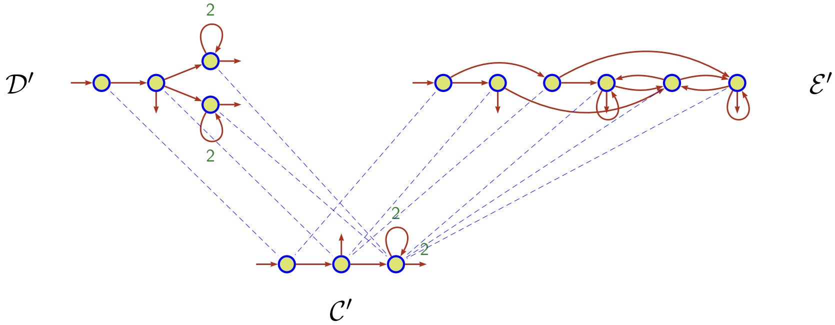


$\mathcal{D}'$
$\mathcal{E}'$
$\mathcal{A}'$
$\mathcal{C}'$
$\mathcal{B}'$
2
2
2
2
2
2

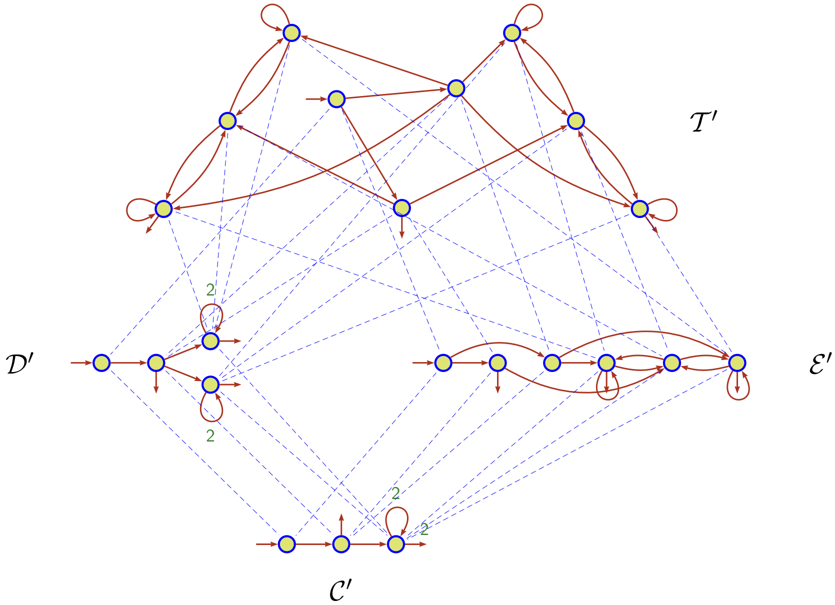
Une proposition technique



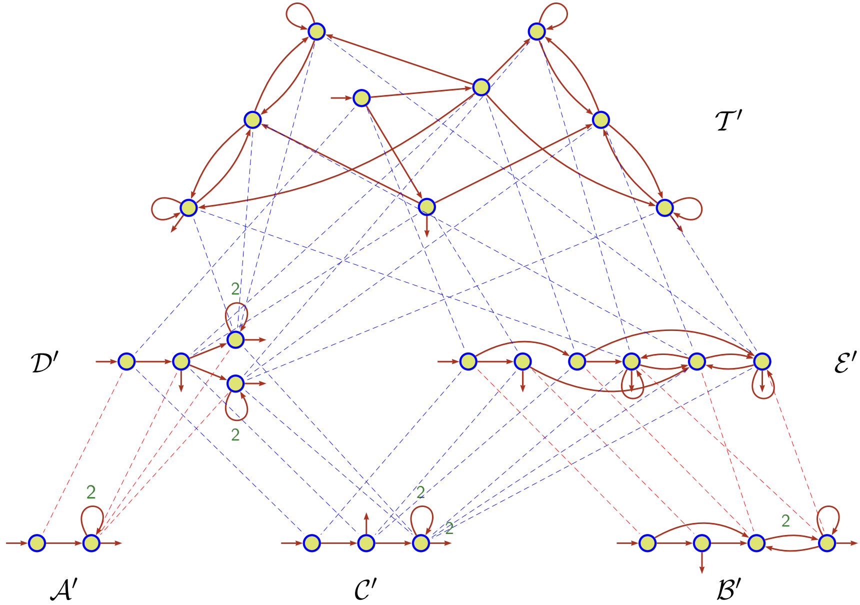
Une proposition technique



Une proposition technique

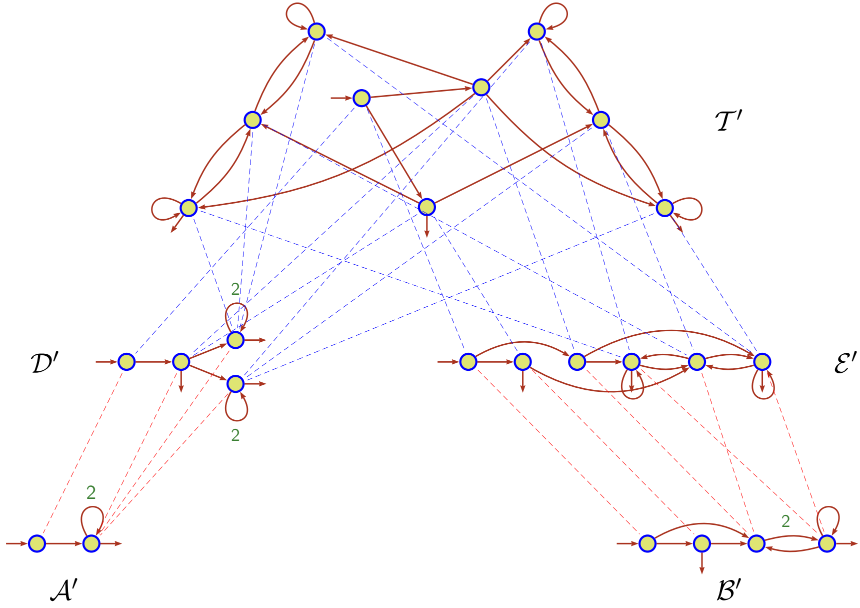


La moisson

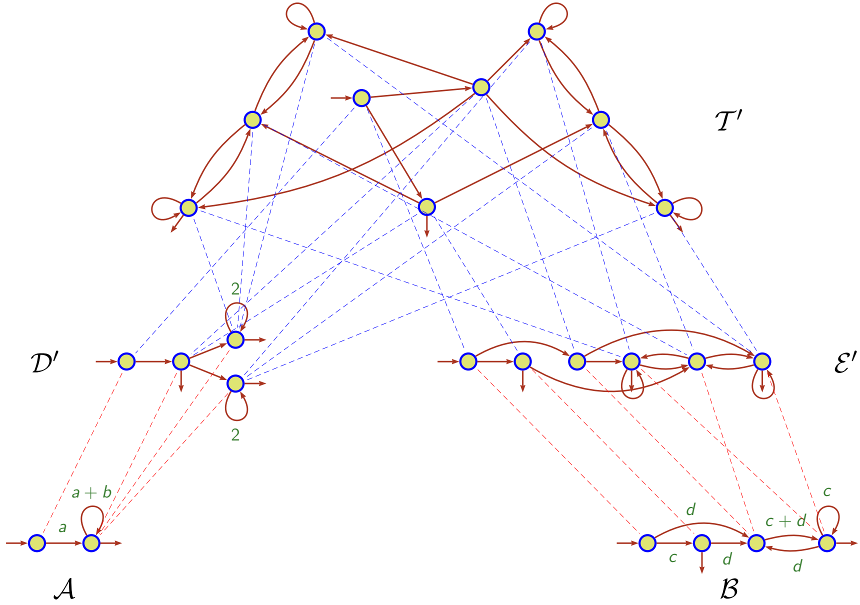


$\mathcal{T}'$
$\mathcal{D}'$
$\mathcal{E}'$
$\mathcal{A}'$
$\mathcal{C}'$
$\mathcal{B}'$
2
2
2
2
2
2

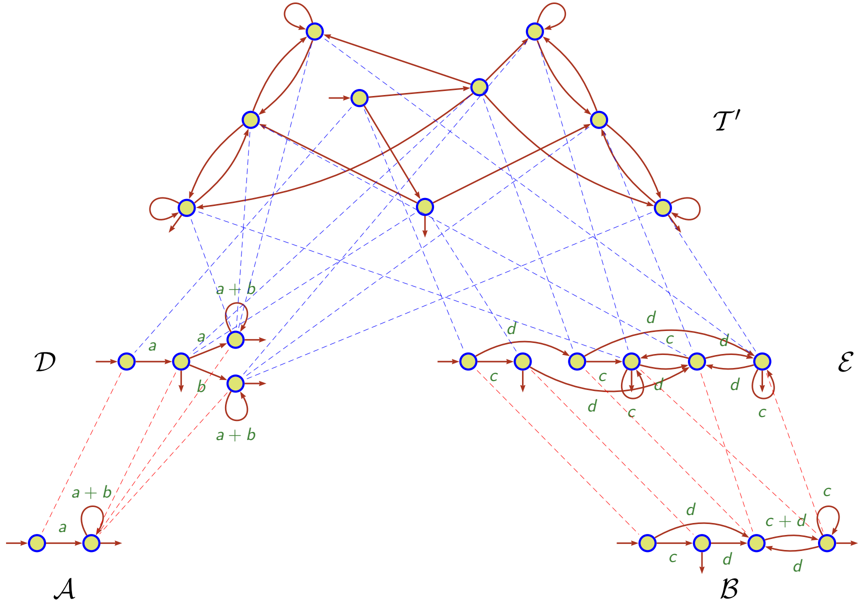
La moisson



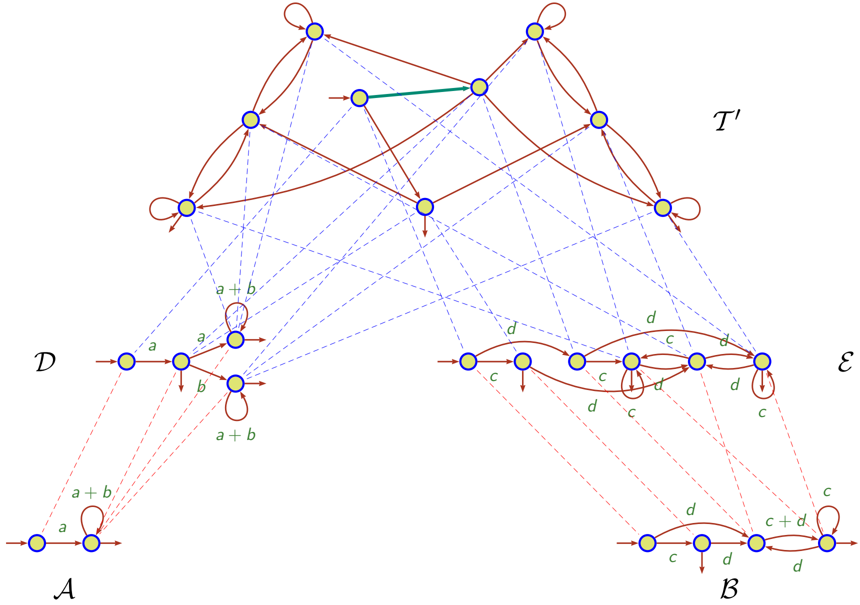
La moisson


$\mathcal{T}'$
$\mathcal{D}'$
$\mathcal{E}'$
2
2
$a+b$
a
$\mathcal{A}$
d
c
$c+d$
c
d
d
$\mathcal{B}$

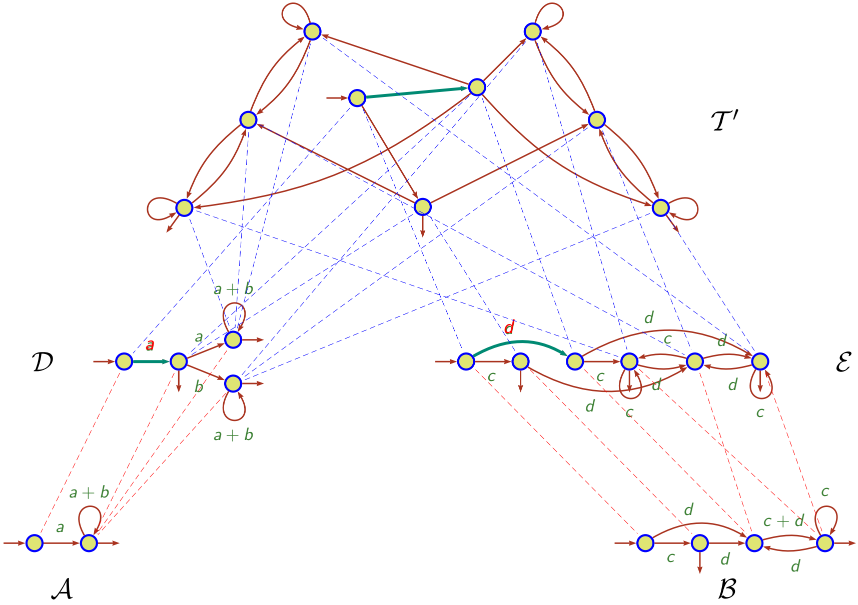
La moisson



La moisson

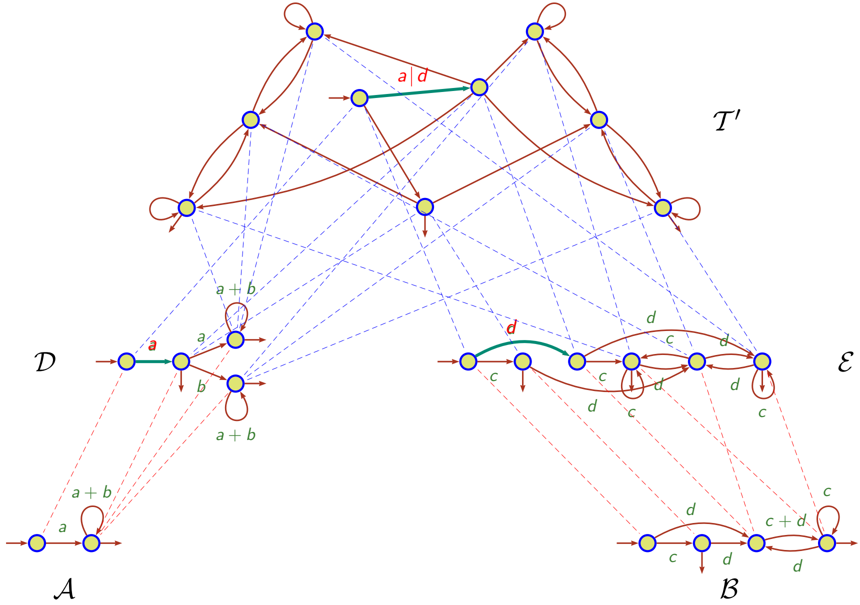


La moisson



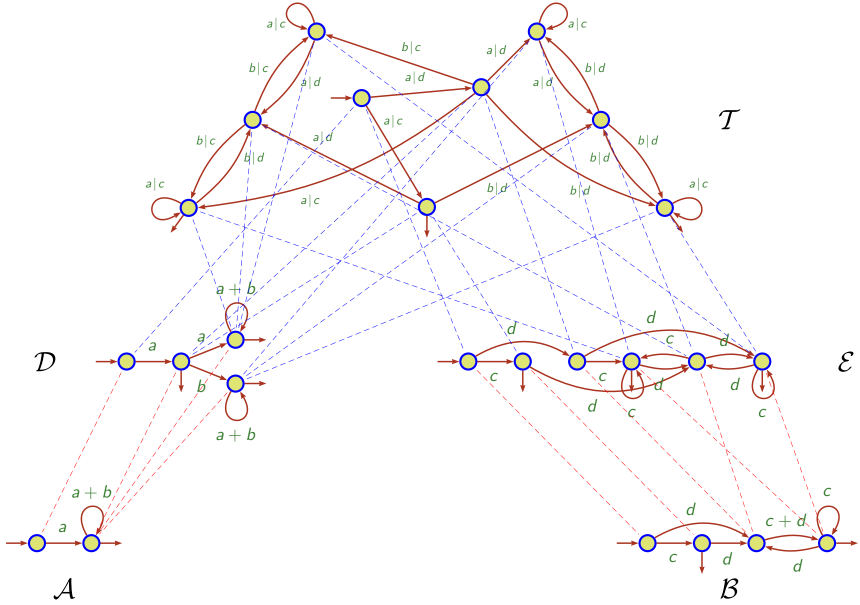
$\mathcal{T}'$
$\mathcal{D}$
$\mathcal{E}$
$\mathcal{A}$
$\mathcal{B}$
a
a
b
$a+b$
$a+b$
$a+b$
a
d
c
c
d
c
d
d
c
d
d
c
c
d
$c+d$
c
c
d
d

La moisson



a|d
$\mathcal{T}'$
$\mathcal{D}$
$\mathcal{E}$
$\mathcal{A}$
$\mathcal{B}$
a + b
a
b
d
c
c + d

La moisson


$\mathcal{T}$
$\mathcal{D}$
$\mathcal{E}$
$\mathcal{A}$
$\mathcal{B}$
a|c
b|c
a|d
b|d
a + b
a
b
c
d
c + d