Contrôle continu-ELEC101-CC $1^{\text{ère}}$ année 2014-2015

Contrôle N° 1
Durée 45 minutes - Documents et Calculatrice autorisés

Groupe :	
Nom :	Date : 05/05/2015
Prénom :	Heure : 8h30

N'oubliez pas de compléter le cadre ci-dessus et de joindre ce sujet à votre copie.

Exercice - Circuit à transfert de charge

On considère dans cet exercice le circuit échantillonné périodiquement (période T) de la figure 1.

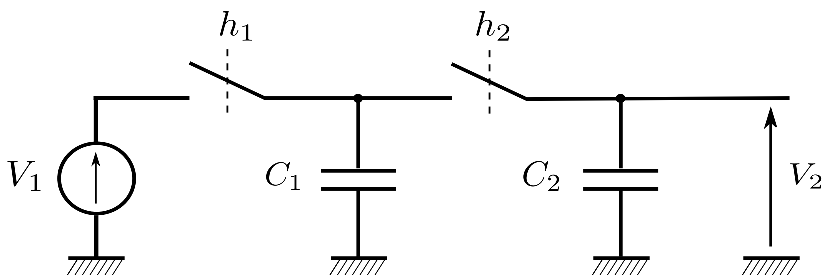

Figure 1 – Circuit échantillonné

L'échantillonnage utilise deux phases h_1 et h_2 comme indiqué à la figure 2.

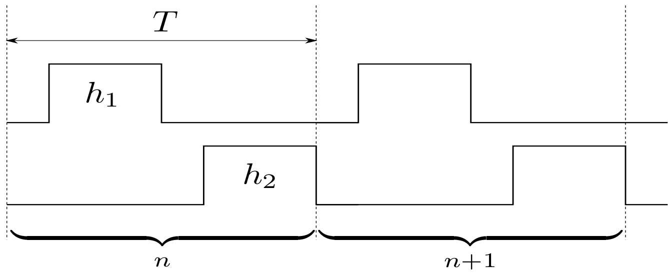

Figure 2 – Phases de l'horloge

Les interrupteurs sont fermés lorsque l'horloge de contrôle est à l'état haut et ouverts à l'état bas. Ils sont supposés idéaux (résistance nulle et infinie pour les états respectifs fermé et ouvert).

La source V_1 est échantillonnée au début de chaque période T. On note $V_1(n)$ sa valeur.

On définit l'échelon discret $u(n)$ par :

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

On note $V_2(n)$ la valeur de la tension V_2 échantillonnée à la fin du cycle n. On posera également :

$$k_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \qquad \text{et} \qquad k_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

On applique en entrée un échelon de tension d'amplitude E : $V_1(n) = E \cdot u(n)$

Question 1.1 Déterminer la tension $V_2(n)$ en fonction de $V_2(n-1)$, E, $k1$, $k2$ et $u(n)$

Réponse 1.1 La conservation de charge à la fermeture de h_2 donne

$$(C_1 + C_2)\, V_2(n) = C_1\, V_1(n) + C_2\, V_2(n-1)$$

$$(C_1 + C_2)\, V_2(n) = C_1\, E\, u(n) + C_2\, V_2(n-1)$$

$$V_2(n) = k_1\, E\, u(n) + k_2\, V_2(n-1)$$

Question 1.2 Calculer $\hat{V}_2(z)$, transformée en z de $V_2(n)$ à partir de l'équation précédente.

Réponse 1.2

$$\hat{V}_2(z) = k_1\, E\, \frac{1}{1 - z^{-1}} + k_2\, z^{-1}\, \hat{V}_2(z)$$

$$\hat{V}_2(z) = \frac{k_1\, E}{(1 - k_2\, z^{-1})\,(1 - z^{-1})} = \frac{k_1\, E\, z^2}{(z - k_2)\,(z - 1)}$$

Question 1.3 Déterminer, à partir de $\hat{V}_2(z)$, la suite $V_2(n)$. Quelle est la limite de cette suite quand n tend vers l'infini ?

Réponse 1.3

$$\frac{\hat{V}_2(z)}{z} = k_1\, E\, \frac{z}{(z - k_2)\,(z - 1)}$$

$$\frac{z}{(z - k_2)\,(z - 1)} = \frac{1}{k_2 - 1}\left(\frac{k_2}{z - k_2} - \frac{1}{z - 1}\right) = \frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{z - 1} - \frac{k_2}{z - k_2}\right)$$

$$\hat{V}_2(z) = E\left(\frac{z}{z - 1} - \frac{k_2\, z}{z - k_2}\right)$$

$$V_2(n) = E\left(1 - k_2^{(n+1)}\right)\, u(n)$$

$$\lim_{n \to \infty} V_2(n) = E \quad \text{car} \quad k_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} < 1$$

Question 1.4 Montrer, directement à partir de $\hat{V}_2(z)$, que $\lim\limits_{n \to \infty} V_2(n) = E$

Réponse 1.4

$$\lim_{n \to \infty} V_2(n) = \lim_{z \to 1} (z - 1)\, \hat{V}_2(z) = \left.\frac{k_1\, E\, z^2}{z - k_2}\right|_{z=1} = \frac{k_1\, E}{1 - k_2} = E$$

Exercice - Amplificateur suiveur

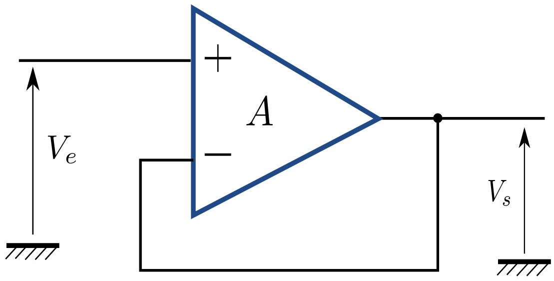

FIGURE 3 – Amplificateur suiveur

On considère l'amplificateur suiveur de la figure 3.

L'amplificateur est parfait pour toutes ses caractéristiques sauf pour son gain linéaire fini qui est donné par :

$$A(p) = \frac{\omega_t}{p\,(1 + \frac{p}{\omega_2})}$$

On posera $\omega_t = 2\,\pi\,f_t$ et $\omega_2 = 2\,\pi\,f_2$

Question 2.1 Déterminer la fonction de transfert $T(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)}$. Quelle est la condition pour que les pôles de $T(p)$ soient réels ?

Réponse 2.1

$$T(p) = \frac{A}{1+A} = \frac{\omega_t\,\omega_2}{p^2 + \omega_2\,p + \omega_t\,\omega_2}$$

La condition pour que les pôles soient réels est que le déterminant du dénominateur soit positif :

$$\Delta = \omega_2\,(\omega_2 - 4\,\omega_t) > 0 \quad \Rightarrow \quad f_2 > 4\,f_t$$

La contrainte précédente étant difficile à réaliser, on se contente de faire en sorte que $f_2 = f_t$.

Question 2.2 Tracer, dans ce cas particulier, le diagramme asymptotique du module et de la phase de A ($20\,\log_{10}(|A|)$ et $\arg(A)$ en fonction de f en échelle logarithmique). On indiquera en particulier les pentes asymptotiques pour le module en dB/décade.

Réponse 2.2

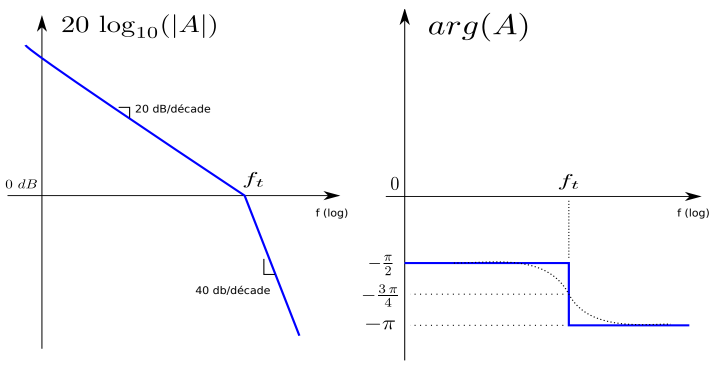

FIGURE 4 – Diagramme de Bode

Question 2.3 Quelle est, pour $f_2 = f_t$, la marge de phase PM de l'amplificateur ?

Réponse 2.3 De façon approximative, en considérant que le gain unité est obtenu en f_t, on a :

$$PM = \pi + \arg(A) = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan(1) = 45°$$

Plus précisément, il faut chercher pour quelle fréquence f_u le module du gain vaut 1 :

$$\left(\frac{f_u}{f_t}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{f_u}{f_t}\right)^2\right] = 1$$

soit en posant $X = \left(\frac{f_u}{f_t}\right)^2$:

$$X^2 + X - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,618 \quad \Rightarrow \quad \frac{f_u}{f_t} = 0,786$$

Pour cette fréquence, on a :

$$\phi_u = \arg(A) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{f_u}{f_t}\right) \approx -128,2°$$

d'où $PM = \pi + \phi_u = 51,8°$