



Électronique des Systèmes d'Acquisition

Traitement et Propagation des Signaux Physiques

Cours, exercices et travaux pratiques

Première Année— 2017-2018

Paul Chollet
Patricia Desgreys
Chadi Jabbour
Germain Pham
Christophe Roblin

Direction de la Formation
Département Communications et Électronique
Télécom Paristech



Table des matières

Avant propos	5
1 Introduction à l'électronique des systèmes d'acquisition	7
2 Outils de théorie du signal : transformée de Laplace, transformée en Z	19
3 Amplification	47
4 Travaux pratiques : Amplification	61
5 Electronique analogique à temps discret	65
6 Travaux pratiques : Circuits à capacités commutées	75
7 Filtrage analogique	81
8 Travaux pratiques : Filtrage analogique	97
9 Conversion analogique-numérique	103
10 Travaux pratiques : Conversion analogique-numérique	117
11 Travaux Dirigés : MoDem ADSL	123

Avant propos

Informations Pratiques

Les informations actualisées relatives au module ESA sont disponibles sur l'intranet de TELECOM ParisTech à l'adresse :

<http://perso.telecom-paristech.fr/jabbour/enseignement/elec101/>.

Les transparents de la plupart des cours sont disponibles et les fichiers et documentations nécessaires aux travaux pratiques sont disponibles à partir d'un lien sur cette même page.

Objectifs

Par le suivi de ce module, l'étudiant :

- est sensibilisé au rôle et à l'importance des interfaces électroniques d'acquisition analogique-numérique pour les applications en instrumentation ou en communications ;
- doit être capable d'identifier les composants électroniques essentiels d'un système d'acquisition de signal et en comprend la fonction ;
- doit connaître les principaux critères de performances de ces composants et leur impact sur les caractéristiques globales du système ;
- doit savoir utiliser les outils de théorie du signal (transformée de Laplace, transformée en Z) pour les signaux véhiculés par un système d'acquisition ;
- est sensibilisé à la réalisation microélectronique de tels systèmes et en particulier en exploitant le traitement du signal analogique en temps discret grâce à la technique des capacités commutées.

Thèmes abordés

Ce module offre une première approche de l'électronique des systèmes d'acquisition en suivant une méthode d'analyse - du système vers le composant - et propose plus particulièrement l'étude des fonctions de traitement du signal analogique et de sa conversion en un signal numérique. Les fonctions d'amplification, de filtrage et de conversion analogique-numérique sont présentées, leurs principales caractéristiques sont décrites, les composants les réalisant sont modélisés. La technique des capacités commutées, largement utilisée pour le traitement du signal analogique en temps discret, est présentée et systématiquement utilisée pour la mise en œuvre des fonctions notamment lors de travaux pratiques utilisant des composants reconfigurables.

Modalité de contrôle de connaissances

La note finale est constituée tout au long du module par un contrôle continu. Chacune des 4 séances de travaux pratiques donne lieu à une note comptant pour 10% de la note finale. La moyenne des notes de travaux pratiques compte donc pour 40% de la note finale. Deux exercices surveillés avec documents d'une durée de 45 minutes chacun sont donnés en milieu et fin de module (LG4 & TD3). Ils comptent chacun pour 30% de la note finale.

Chapitre 1

Introduction à l'électronique des systèmes d'acquisition

1.1 Avant-propos

L'électronique est habituellement divisée en de grands domaines partiellement recouvrants et aux limites floues : la fourniture de puissance, la transduction (acquisition ou restitution d'une information extérieure non " électronique ") et le traitement du signal qu'il soit numérique ou analogique. De plus en plus, ces divers aspects de l'électronique sont pris en compte conjointement au sein de systèmes toujours davantage intégrés.

Nous traitons dans ce cours de l'électronique des systèmes d'acquisition de signaux en nous intéressant particulièrement aux principales fonctions analogiques et mixtes nécessaires à cette acquisition, que le signal soit issu d'un capteur ou d'une antenne. Les fonctions étudiées sont l'amplification, le filtrage et la conversion analogique-numérique. L'étude de ces fonctions s'appuie sur l'emploi d'outils de théorie du signal (transformée de Laplace et transformée en Z) ainsi que sur une technique permettant la mise en œuvre du traitement analogique du signal en temps discret (technique à capacités commutées).

A l'issue de ce cours, l'étudiant doit connaître la composition fonctionnelle basique d'une chaîne d'acquisition électronique d'un signal analogique, doit pouvoir comprendre le sens des principales caractéristiques de chaque fonction et doit enfin pouvoir déduire de spécifications globales des contraintes ou des caractéristiques des éléments de la chaîne. L'étudiant doit également avoir pris conscience du rôle d'interfaces d'acquisition électronique de signaux dans le cadre de systèmes complexes et l'impact de leurs caractéristiques sur les performances globales.

Ce cours adopte une démarche de synthèse (encore dite « descendante », du système vers le composant), adaptée à des ingénieurs des télécommunications, c'est-à-dire amenés à conduire la conception, la gestion ou l'acquisition de systèmes complexes de communications.

La conception microélectronique de ces interfaces d'acquisition n'est pas abordée dans ce cours. Le lecteur curieux d'en connaître davantage peut se reporter aux articles ou ouvrages cités en référence.

1.2 Introduction

L'électronique des systèmes d'acquisition de signaux peut être définie comme comprenant :

- un ou des transducteurs (capteurs et actionneurs) ;
- l'interface électronique entre un transducteur et une unité de traitement et d'exploitation du signal ;
- diverses unités nécessaires à l'interface d'acquisition (génération des horloges, contrôle, gestion de la consommation).

Un transducteur est un dispositif convertissant une grandeur physique en une autre. Dans le cas de transducteurs pour systèmes électroniques d'acquisition de signaux, la transduction consiste en la conversion d'une grandeur physique quelconque en un signal électrique. Voici quelques exemples de transducteurs :

- Microphone : capteur d'un signal acoustique ;
- Thermocouple : capteur utilisé particulièrement pour la mesure de température ;
- Cristal piézoélectrique : capteur utilisé pour la mesure de pression ;
- Haut-parleur : transducteur de conversion d'un signal électrique en un signal acoustique ;
- Voyant lumineux : conversion d'un signal électrique en signal lumineux ;
- Antenne : transducteur permettant de capter ou de rayonner un signal électro-magnétique.

Les grandeurs physiques à l'échelle macroscopique sont de nature analogique, c'est-à-dire que leurs variations peuvent être décrites par un signal continu dans le temps et dans l'espace. Le signal analogique issu d'un capteur est donc de nature analogique. Cependant, fréquemment aujourd'hui l'interface d'acquisition est intégrée directement avec le capteur : dans ce cas, l'utilisateur récupère un signal numérisé, donc représenté par une séquence de mots binaires.

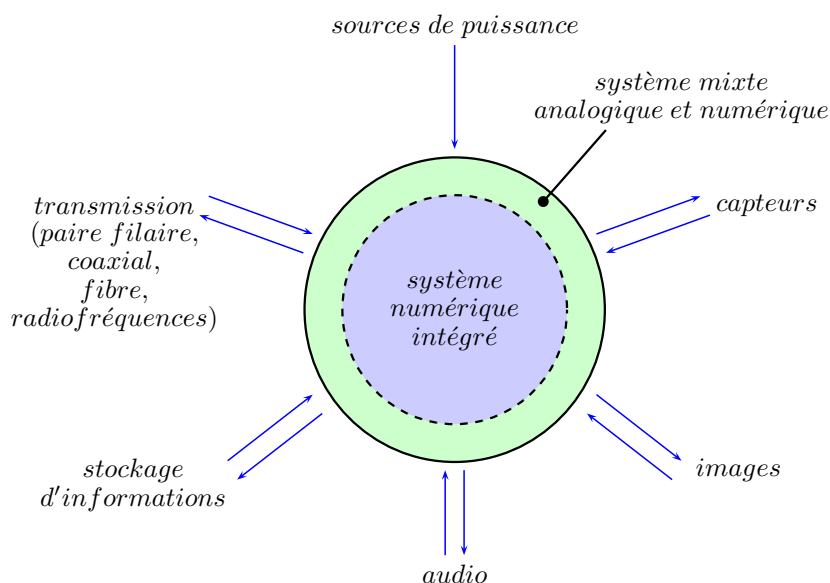


FIGURE 1.1 – Place de l'interface d'acquisition et exemples d'usages

L'unité de traitement et d'exploitation du signal réalise par exemple des opérations de codage, décodage, modulation, démodulation et assure l'exploitation de l'information véhiculée par le signal. Cette unité est normalement mise en œuvre en électronique numérique. Elle n'est pas traitée dans ce cours.

Ce cours d'*Electronique des Systèmes d'Acquisition* traite de l'interface électronique entre un transducteur et une unité de traitement et d'exploitation du signal. Nous nous intéressons donc à l'ensemble des traitements appliqués au signal électrique issu d'un capteur jusqu'à sa restitution numérisée. Les principales fonctions étudiées sont donc : l'amplification, le filtrage et la conversion analogique-numérique.

Dans ce chapitre, dans la section 1.3, nous introduisons quelques données économiques sur le marché des semiconducteurs. Dans la section 1.4, nous décrivons quelques systèmes d'acquisition de signaux. Dans la section 1.5, nous indiquons quelques défis techniques et technologiques liés à l'électronique des systèmes d'acquisition.

1.3 Contexte économique

Le marché mondial des semiconducteurs représente, en 2016, 339 milliards de US\$. Ce marché devrait dépasser 600 milliards de US\$ en 2025. La part des composants dits analogiques (la distinction est délicate du fait de l'intégration de systèmes complets sur puce) représente en 2016 un montant de 45 milliards de US\$.

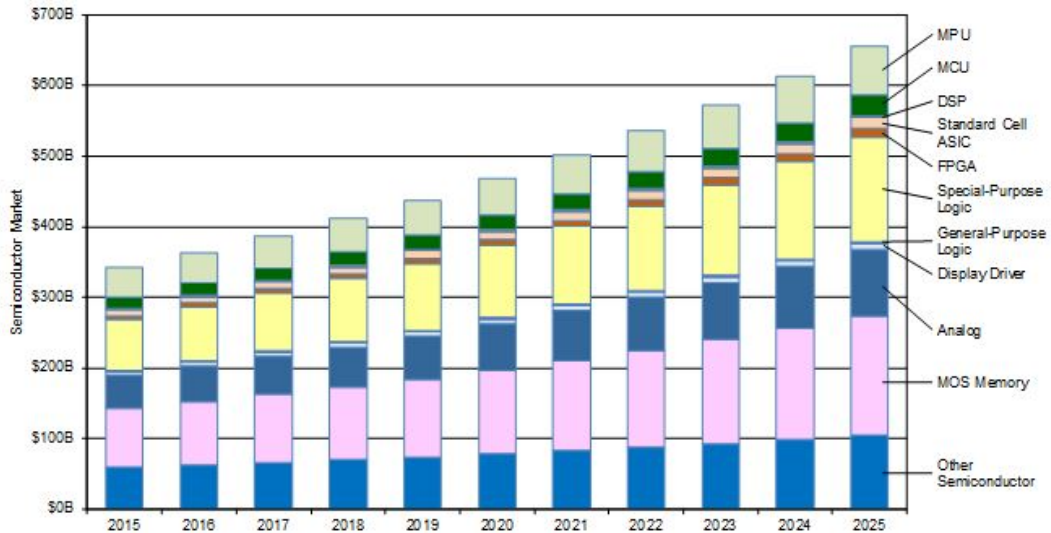


FIGURE 1.2 – Distribution sectorielle du marché des semiconducteurs [2]

Les marchés les plus importants actuellement sont les marchés des ordinateurs et des communications comme le montre la FIGURE 1.3. Dans les années à venir, le marché des communications va continuer à avoir un bon taux de croissance grâce notamment à la cinquième génération des communications mobiles 5G. Les autres marchés très prometteurs sont l'automobile et la biomédicale qui profitent merveilleusement de l'explosion du marché de l'internet des objets (IoT) (FIGURE 1.4).

Semiconductor Demand Drivers: 2016 Growth

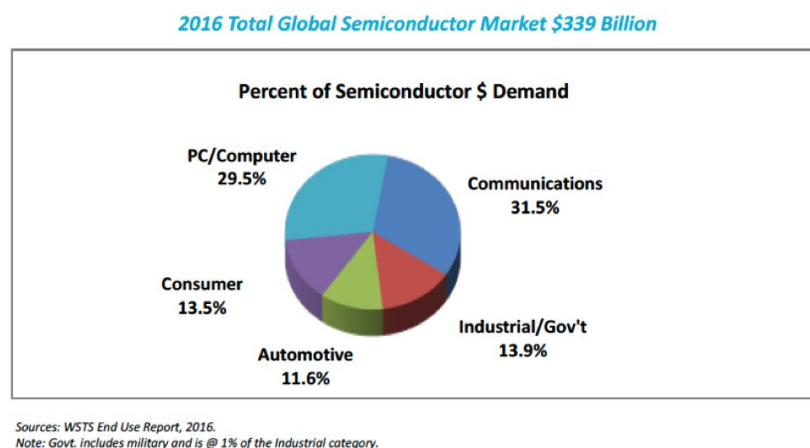


FIGURE 1.3 – Distribution sectorielle du marché des semiconducteurs

Une des raisons principales qui a permis ces bons taux de croissance dans le marché des semiconducteurs est la diminution du coût par transistor dans la technologie CMOS. Comme on peut le constater dans la FIGURE 1.5, un US\$, dans la fin des années 90 avec la tech-

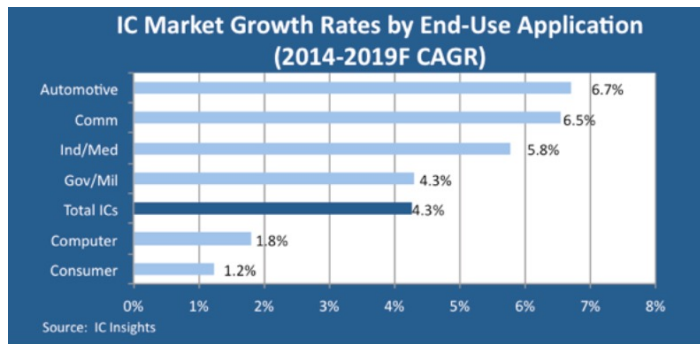


FIGURE 1.4 – Distribution sectorielle du marché des semiconducteurs

nologie CMOS 180 nm, permettait de fabriquer 2,6 Millions de transistors. Actuellement, avec les technologies 28 nm et 16 nm, un US\$ permet de fabriquer approximativement dix fois plus de transistors. Cependant, comme on peut le constater, le coût par transistor est en train de stagner voire d'augmenter. Ceci est dû au fait que les approches classiques de fabrication ne sont plus adaptées aux dimensions actuelles des transistors notamment aux épaisseurs de grilles qui avoisinent le nanomètre dans les technologies les plus récentes. Dans une telle épaisseur, on peut à peine placer 5 à 10 atomes/molécules d'isolants. Pour adresser ce problème, les fabricants de circuit dits également fondeurs ont dû introduire de nouvelles approches de fabrications telles que les technologies FinFet et FDSOI [7][4]. Ces technologies sont très intéressantes et très prometteuses mais malheureusement plus complexes et en conséquence plus coûteuses. Ceci demandera plus d'innovation et plus de créativité dans la phase de conception pour compenser le ralentissement au niveau technologique.

28nm: Optimal Balance of Cost and Power for 2015 Devices

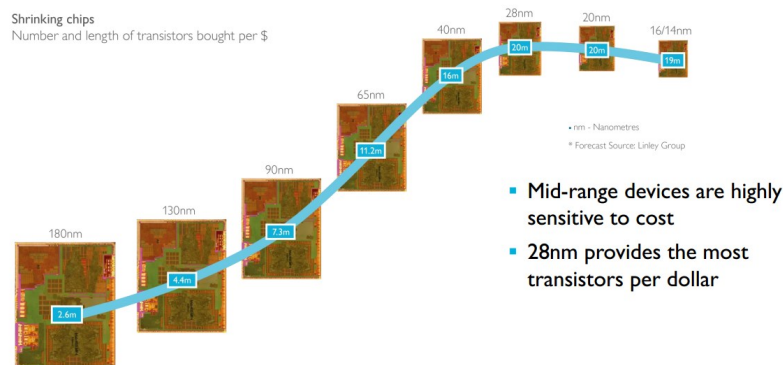


FIGURE 1.5 – Evolution du coût par transistor en fonction de la technologie CMOS - source : ARM

La table 1.6 présente l'importance relative des vingt plus importantes entreprises dans le domaine des semiconducteurs en 2016. Les profils de ces entreprises sont diverses, certaines comme TSMC et UMC ne font que la fonderie. D'autres dites fabless sont sans usine de fabrication tels que Broadcom, Qualcomm ou Mediatek, leur savoir faire est dans le domaine de la conception. Pour la fabrication, elles font appel à des fondeurs. Il existe également des entreprises qui font à la fois de la conception et de la fonderie. On peut notamment en citer Intel, Samsung et STMicroelectronics (le plus grand fondeur européen dont les usines se trouvent à Crolles en France).

1Q16 Top 20 Semiconductor Sales Leaders (\$M, Including Foundries)

1Q16 Rank	1Q15 Rank	Company	Headquarters	1Q15 Tot Semi	1Q16 Tot Semi	1Q16/1Q15 % Change
1	1	Intel*	U.S.	12,067	13,115	9%
2	2	Samsung	South Korea	9,336	9,340	0%
3	3	TSMC (1)	Taiwan	6,995	6,122	-12%
4	7	Broadcom Ltd. (2)*	Singapore	3,679	3,550	-4%
5	4	Qualcomm (2)	U.S.	4,434	3,337	-25%
6	5	SK Hynix	South Korea	4,380	3,063	-30%
7	6	Micron	U.S.	4,061	2,930	-28%
8	8	TI	U.S.	2,940	2,804	-5%
9	10	Toshiba	Japan	2,619	2,446	-7%
10	9	NXP*	Europe	2,636	2,224	-16%
11	12	Infineon	Europe	1,666	1,776	7%
12	13	MediaTek (2)	Taiwan	1,506	1,691	12%
13	11	ST	Europe	1,700	1,601	-6%
14	14	Renesas	Japan	1,470	1,415	-4%
15	17	Apple (2)**	U.S.	1,260	1,390	10%
16	15	GlobalFoundries (1)*	U.S.	1,436	1,360	-5%
17	20	Nvidia (2)	U.S.	1,118	1,285	15%
18	16	Sony	Japan	1,272	1,125	-12%
19	18	UMC (1)	Taiwan	1,140	1,034	-9%
20	21	AMD (2)	U.S.	1,030	832	-19%
—	—	Top 20 Total	—	66,745	62,440	-6%

(1) Pure-play foundry

(2) Fabless supplier

* Includes Intel/Altera, Avago/Broadcom, NXP/Freescale, and GlobalFoundries/IBM sales for 1Q15 and 1Q16.

** Custom processors for internal use made by TSMC and Samsung foundry services.

Source: Companies, IC Insights' Strategic Reviews Database

FIGURE 1.6 – Principales entreprises dans le domaine des semiconducteurs

1.4 Exemples de systèmes électroniques d'acquisition

Dans ce qui suit, nous traitons trois exemples de systèmes électroniques d'acquisition appliqués à des domaines distincts. Nous verrons que bien que très différents, ces systèmes ont de nombreux objectifs communs en terme de conception.

1.4.1 Prothèse auditive, implant cochléaire

Définition

Un implant cochléaire est un dispositif électronique conçu pour induire des sensations auditives utiles au patient malentendant par une stimulation électrique des nerfs à l'intérieur de l'oreille interne. Il est important de noter qu'un système d'implant cochléaire est très différent d'un dispositif d'aide auditive. Ce dernier capte, amplifie et restitue le son. L'implant cochléaire a pour objet de compenser des défaillances partielles ou complètes de parties de l'oreille interne. Lorsque l'oreille interne fonctionne normalement, elle convertit le son en stimuli électriques transmis au cerveau. L'implant cochléaire réalise la même fonction même s'il ne fournit pas à l'utilisateur exactement la même sensation. Ce système permet la communication sans toutefois assurer une restitution sonore fidèle.

Description du système

Il existe de nombreux types de prothèses auditives. Nous considérons ici un exemple particulier : nous allons analyser la composition de ce système puis relever les caractéristiques représentant des défis techniques.

La FIGURE 1.7 représente un système complet de prothèse auditive. Ce système comprend :

- un microphone pour capter le signal acoustique ;
- un module de traitement du signal analogique et numérique associé à une chaîne d'émission ;

- un module de réception et de stimulation ;
- un jeu d'électrodes implantées dans l'oreille interne, relié au module de stimulation par une liaison filaire.



FIGURE 1.7 – Système de prothèse auditive à implant cochléaire (source : NIDCD [6])

Particularités du système

Une partie du système est invasive, c'est à dire qu'elle est implantée à l'intérieur du corps humain. Cette partie (les électrodes et le module connecté) doit donc :

- ne pas entraîner de rejet ;
- ne pas provoquer de dommage lors de la mise en place ou lors du fonctionnement ;
- ne pas entraîner de nuisance pour l'utilisateur ;
- disposer d'une autonomie importante ;
- être adaptable aux spécificités de chaque patient ;
- nécessiter une intervention chirurgicale la plus légère possible.

Ces particularités requièrent donc :

- une très grande fiabilité ;
- une très faible consommation et éventuellement la mise en oeuvre de récupération d'énergie ;
- une miniaturisation poussée ;
- des possibilités de réglages et de contrôle.

La partie non implantée doit également :

- être peu encombrante et légère (tenir dans une poche) ;
- disposer d'une autonomie suffisante ;
- être fiable (en particulier, ne pas transmettre à l'implant des signaux perturbants).

1.4.2 Chaîne d'émission-réception radio

Définition

La chaîne d'émission-réception radio est étudiée en détail dans l'U.E. ELEC340-ISER du Cycle Master. Nous nous contentons ici d'une description très générale. La chaîne d'émission-

réception radio est utilisée pour de très nombreuses applications aux contraintes très différentes. Nous nous contentons ici d'évoquer son application en communications cellulaires et plus précisément pour un terminal mobile. La chaîne d'émission réception radio (encore appelé frontal radiofréquences) a pour objet la transmission de signaux radiofréquences entre une station de base et le terminal mobile qui la contient. Elle réalise notamment les fonctions d'amplification, filtrage, translation en fréquences et conversion analogique-numérique ou numérique-analogique. Le frontal RF est une sous-partie de l'ensemble complexe que constitue le terminal.

Description du système

Un schéma simplifié d'émetteur-récepteur est représenté sur la FIGURE 1.8.

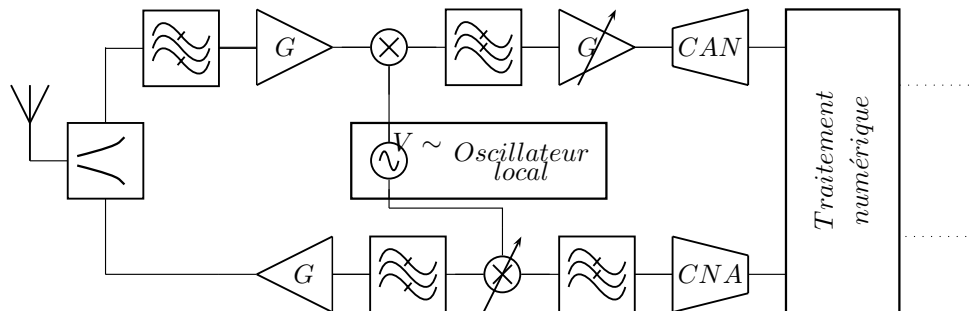


FIGURE 1.8 – Schéma simplifié d'un frontal radiofréquence

Le système contient une chaîne d'émission (partie inférieure du schéma) et une chaîne de réception (partie supérieure du schéma). Ces deux chaînes se rejoignent avant l'antenne via un composant radiofréquences, appelé duplexeur à pour objet la séparation des signaux émis, de forte puissance, et des signaux reçus, de très faible puissance.

La voie de réception contient des filtres, des amplificateurs dont certains à gain variable, des mélangeurs (translatant le signal à des fréquences plus basses et finalement au moins un convertisseur analogique-numérique. Le signal ainsi numérisé est ensuite démodulé, décodé puis exploité pour l'application voulue.

A partir du signal à transmettre encore représenté sous forme numérique, la voie d'émission contient au moins un convertisseur numérique-analogique, des filtres, des mélangeurs et finalement un amplificateur de puissance.

Des fréquences doivent être générées et contrôlées en interne pour le traitement correct des signaux. Des oscillateurs et des boucles à verrouillage de phase sont alors nécessaires.

Particularités du système

Dans le cas d'une chaîne d'émission-réception radio intégrée dans un terminal mobile, le système doit :

- ne pas entraîner de nuisance évidente pour l'utilisateur ou son entourage ;
- disposer d'une autonomie importante ;
- être adaptable aux spécificités de chaque utilisateur ;
- disposer d'une fiabilité élevée ;
- avoir une très faible consommation et éventuellement mettre en oeuvre la récupération d'énergie ;
- offrir une miniaturisation poussée et un faible poids ;
- proposer des possibilités de programmation (customisation).

Ces caractéristiques influent sur l'ensemble des domaines de définition du système et en particulier sur la conception matériel/logiciel d'un tel système.

1.4.3 Modem ADSL

Un modem (pour modulateur-démodulateur) est un système électronique d'interface entre une ligne téléphonique et un équipement informatique, un ordinateur en particulier. Il permet donc d'une part de transmettre via la ligne téléphonique des données vers d'autres systèmes informatiques et d'autre part de recevoir des données issues de systèmes informatiques distants. L'un des protocoles les plus couramment utilisé par les particuliers aujourd'hui est l'ADSL, introduit en France en 1999. ADSL signifie *Asymmetric Digital Subscriber Line* soit en français « Raccordement Numérique Asymétrique »(RNA).

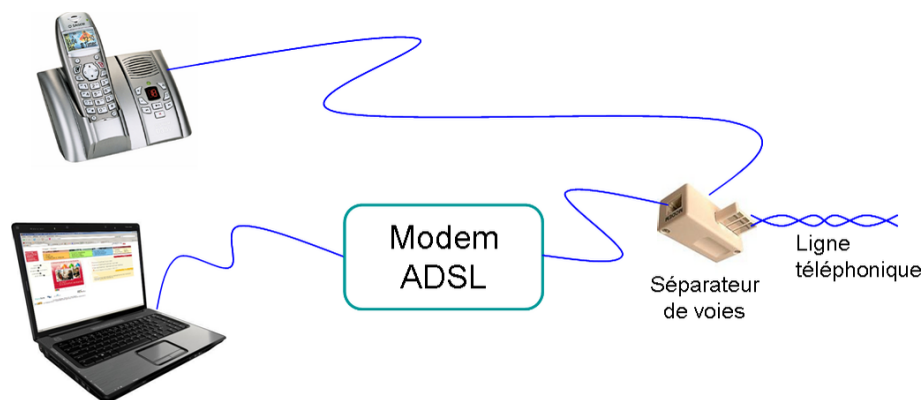


FIGURE 1.9 – Connexions à un modem ADSL

Les communications ADSL sont compatibles avec le signal téléphonique classique (POTS : *Plain Old Telephone Service*). Elles ne doivent donc pas perturber le signal téléphonique. A cette fin, les communications ADSL utilisent une bande fréquence distincte de celle du signal téléphonique. Les communications utilisent un spectre entre 0kHz et 1104kHz partagé en 256 canaux d'une largeur de $4,312\text{kHz}$. Le premier canal (canal 0 jusqu'à $\approx 4\text{kHz}$) sert au signal classique. Les premiers canaux voisins ne sont pas utilisés du fait d'une séparation assez simple et donc très imparfaite de ce canal téléphonique. Cette séparation est effectuée par un dispositif appelé séparateur de voies ADSL/POTS (en anglais *splitter*) qui est en fait un filtre fréquentiel (FIGURE 1.9). Les signaux ADSL sont placés au dessus de 25kHz car ils sont ainsi inaudibles. Les communications montantes, c'est-à-dire de l'abonné vers le central téléphonique, occupent les canaux de 25kHz à 128kHz . Les communications descendantes, c'est-à-dire du central vers l'abonné occupent les canaux de 141kHz jusqu'à $1,1\text{MHz}$ ou parfois de 25kHz à $1,1\text{MHz}$, sous certaines conditions (FIGURE 1.10). La portée des communications ADSL est au plus de quelques kilomètres. Le débit possible diminue rapidement avec la distance. Il existe aujourd'hui diverses évolutions ou variantes de communications DSL : notamment ReADSL, ADSL 2+, SDSL, VDSL2. Ces différentes techniques améliorent le débit à courte distance mais la différence avec l'ADSL devient négligeable au-delà de 2km pour une ligne en calibre 4/10.

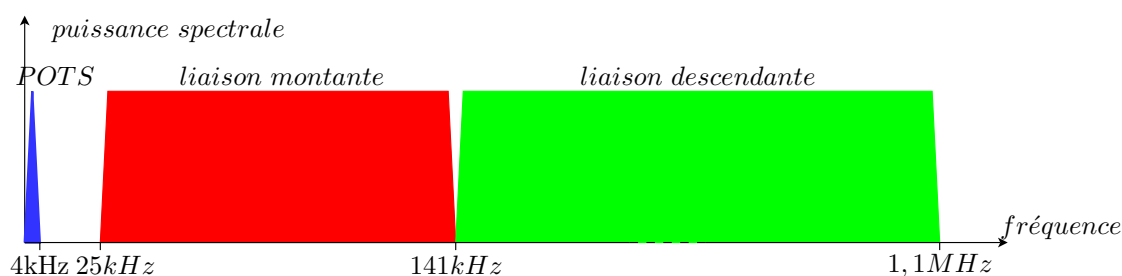


FIGURE 1.10 – Bandes de fréquences des communications ADSL

Description du système

La FIGURE 1.11 représente l'architecture simplifiée du frontal d'émission-réception d'un modem ADSL.

En *réception*, après une interface hybride dont la fonction est d'assurer une protection du modem vis-à-vis de perturbations importantes sur la ligne, le signal reçu est tout d'abord amplifié via un premier amplificateur de gain faible. Le signal est ensuite filtré via un filtre passe-bande dont la fonction consiste à éliminer tout signal ou bruit en dehors de la bande ADSL. Le signal est alors de nouveau amplifié grâce à un amplificateur à gain variable et contrôlé (AGC) permettant d'adapter le gain en fonction de la puissance du signal reçu. Le but est d'augmenter la puissance de ce signal afin d'exploiter au mieux la pleine dynamique des éléments en aval de la chaîne de traitement.

L'égaliseur analogique est un filtre adaptatif permettant en permanence de compenser des distorsions d'amplitude et de phase induites par la ligne téléphonique. Les caractéristiques de ce filtre sont ajustées continuellement via un contrôle opéré par le processeur de traitement numérique du signal (DSP).

Finalement, le signal analogique est transformé en un signal numérique via un convertisseur analogique-numérique (CAN ou ADC). A ce convertisseur est souvent associé un filtre numérique dont la fonction est en particulier de parfaire la sélection de la bande spectrale d'intérêt.

En *émission*, le signal est tout d'abord mis en forme par un filtre numérique. Ensuite, un convertisseur numérique-analogique (CNA ou DAC) restitue un signal analogique. Ce signal est alors filtré dans le domaine analogique afin de restreindre son spectre à la bande de fréquences voulue. Finalement, le signal est amplifié grâce à un amplificateur de puissance. Cette amplification est ici particulièrement importante car le signal parvient au central affaibli et dans un environnement riche en interférences du fait du voisinage dense de lignes.

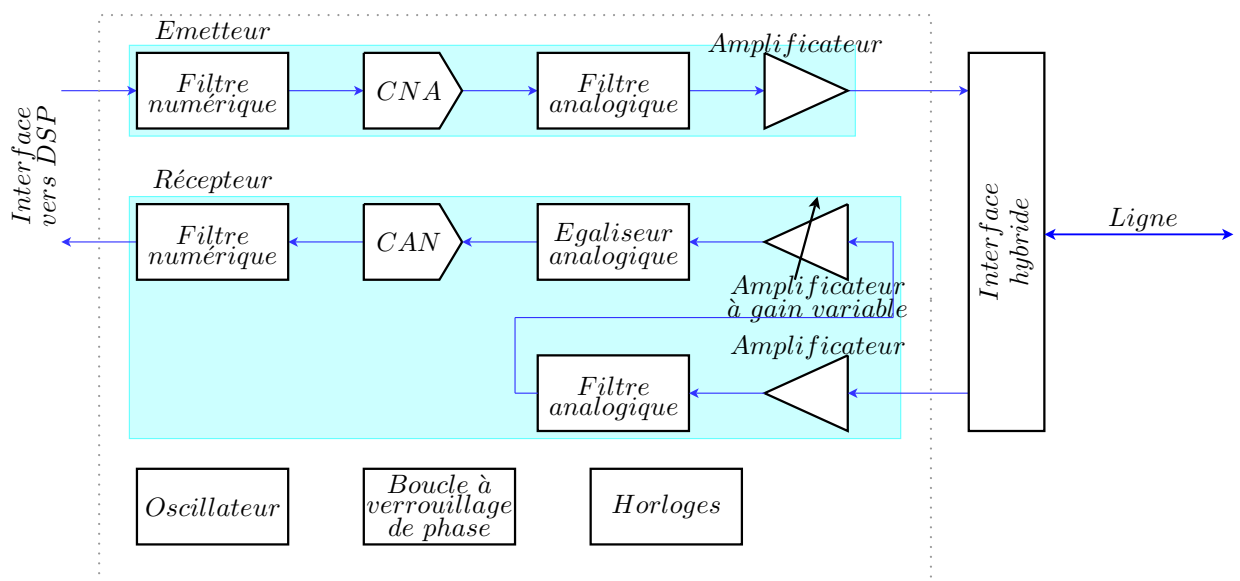


FIGURE 1.11 – Architecture d'un frontal d'émission-réception ADSL

Particularités du système

Un modem ADSL est aujourd'hui très souvent une sous-partie d'un système électronique plus complexe plutôt qu'un appareil indépendant. Il est notamment présent sur des cartes-mères d'ordinateurs personnels ou associé à des routeurs réseaux. Le modem ADSL suppose l'existence d'une liaison câblée. Dès lors, il n'y a normalement pas de nécessité d'autonomie énergétique et l'utilisation du réseau de distribution est possible. La consommation électrique

n'est donc pas un critère primordial dans la plupart des cas, sauf lorsque le modem est associé à un ordinateur portable et dépend de la batterie de celui-ci. D'autres caractéristiques sont également fortement dépendantes du contexte d'emploi. Par exemple, la miniaturisation est forte sur une carte-mère ou une carte PCMCIA et est non critique pour une utilisation domestique.

1.5 Défis techniques

Comme nous l'avons expliqué précédemment, l'intégration de fonctions de traitement du signal analogique est indispensable pour pouvoir mettre en oeuvre des systèmes interagissant avec l'environnement. Ceci concerne par exemple quasiment tous les systèmes de communications. Les attentes évoluent : des bandes passantes toujours plus larges sont nécessaires, les bandes de fréquences utilisées également du fait de l'encombrement croissant du spectre. Dans le même temps, les informations à émettre, à recevoir, à traiter sont plus hétérogènes et requièrent des puissances de calcul toujours accrues. Pour qu'existe un marché significatif, permettant entre autre à l'industrie électronique de poursuivre son développement, le coût final des produits doit rester abordable et en tout cas en rapport avec le service fourni et l'innovation introduite. Afin de répondre à ces exigences, de nouvelles technologies sont en permanence mises au point. Elles sont presque toujours optimisées en premier lieu pour l'intégration de l'électronique numérique. Cependant, l'intégration de systèmes monpuces confère aujourd'hui à l'intégration de fonctions analogiques ou radiofréquences une part croissante dans l'évolution technologique. Pour répondre aux attentes exprimées ci-dessus, les chercheurs et développeurs en électronique doivent relever de nombreux défis dont les principaux sont exposés dans ce qui suit.

1.5.1 Critères de performances

Les critères sont variés. Leur importance relative varie d'une application à une autre. Citons les plus courants : la largeur de bande de fréquences, la consommation d'énergie, la surface de circuit nécessaire à la mise en oeuvre, la linéarité, le rapport signal sur bruit, la dynamique, la fiabilité, les potentialités de programmation ou de reconfiguration. Il est important de noter que ces différents critères sont liés de façon complexe. Gagner sur un critère peut induire de plus grandes difficultés à satisfaire les exigences sur un autre.

1.5.2 Vitesse, bandes de fréquences

Les progrès réalisés en communications numériques ont permis en particulier d'augmenter le débit de transmission pour une même largeur de bande. Cette augmentation n'est pas suffisante pour couvrir avec des bandes de quelques centaines de kHz les besoins liés à de nouveaux usages tels que la visualisation de vidéo (en différentes qualités) sur des terminaux mobiles (réseaux cellulaires ou locaux). L'accroissement des largeurs de bande requiert des composants électroniques adaptés, amplificateurs, filtres, convertisseurs, etc. tout en maintenant les exigences en rapport signal sur bruit, en consommation, en linéarité... Pour y parvenir, la seule innovation technologique n'est pas suffisante. L'innovation en techniques de traitement du signal, en circuiterie et en architecture est indispensable.

1.5.3 Consommation d'énergie

Une fois les spécifications d'un système établies à partir des données de l'application, de l'usage particulier, et des normes considérées, des performances minimales et nominales pour chaque sous-partie du système peuvent être déterminées après choix d'un partitionnement matériel-logiciel puis d'un partitionnement analogique-numérique. Le respect de ces performances par le système construit est indispensable pour garantir la fonctionnalité au

regard de l'application envisagée. D'autres caractéristiques telles que la consommation n'interviennent pas directement dans la fonctionnalité mais ont un impact direct sur le coût du produit et donc sur sa compétitivité. La consommation peut aussi avoir un impact sur l'encombrement ou l'autonomie du produit et donc sur son ergonomie et sa praticité. Moins consommer d'énergie signifie soit une meilleure autonomie avec un même type de batterie, soit des batteries moins encombrantes ou moins onéreuses pour une même autonomie. Moins consommer d'énergie répond aussi à une préoccupation croissante de nature environnementale et écologique. Là encore, l'innovation technologique contribue à cet objectif à condition d'y associer l'innovation en circuit, en architecture et en gestion de la consommation. Ce dernier point (*power management, power-aware system*) est devenu une préoccupation systématique au sein de systèmes complexes. L'écart entre les prévisions technologiques et les prévisions de performances de systèmes futurs montrent que l'innovation technologique ne pourra suffire à elle seule à répondre aux attentes.

1.5.4 Surface d'un circuit, volume d'un système

Le couple (technologie, surface de puce) joue un rôle très important dans le coût final d'un produit. La réduction de la surface de circuit pour la mise en oeuvre d'une fonction peut cependant engendrer d'autres difficultés comme une énergie dissipée par unité de surface accrue. Des moyens d'évacuation de la chaleur doivent alors être mis en oeuvre. Le choix d'une filière technologique (CMOS, BiCMOS, SiGe, SOI, AsGa, etc.) puis d'une génération technologique influe sur la faisabilité du système, sur la surface de puce nécessaire et donc sur le coût final. Au sein d'une même filière, le CMOS par exemple, il faut encore déterminer si des « options » technologiques sont souhaitables : transistors à faible tension de seuil, matériau fortement résistif, oxyde mince entre couches métalliques pour implantation de capacités, etc. Pour chaque projet, ce choix doit être établi en fonction de la prévision de surface, du coût surfacique de la technologie, du surcoût des options, etc. mais aussi du savoir-faire des concepteurs dans la technologie considérée, de la disponibilité de plusieurs sources de fonderie, de la possibilité de réutiliser pour d'autres projet le travail effectué... Pour une filière donnée, la technologie la plus avancée ne constitue pas toujours le meilleur choix : là encore, une estimation de surface pour le système complet est nécessaire. Les fonctions numériques bénéficient pleinement de l'avancée technologique en terme de densité et de vitesse. Il n'en va pas de même pour les blocs analogiques dont la surface ne diminue que très lentement en fonction de l'évolution technologique. En revanche, le coût du mm^2 de circuit croît très fortement d'une génération technologique à une autre.

1.5.5 Intégration de systèmes monopuces

L'intégration de systèmes monopuces induit divers défis techniques dont certains déjà cités précédemment. Nous pouvons ajouter à ceux déjà cités précédemment, la nécessaire maîtrise des couplages et interférences sur la puce. Certains composants sont sources de bruit, d'autres composants ou matériaux le transportent et d'autres enfin sont particulièrement sensibles. En particulier, les circuits analogiques sensibles doivent être isolés le plus possibles des circuits numériques, sources de bruit dû aux commutations.

1.5.6 Outils d'aide à la conception

La maîtrise des coûts impose l'emploi d'outils d'aide à la conception afin d'améliorer et de fiabiliser la production. Il s'agit :

- d'outils de synthèse pour affiner une représentation de tout ou partie d'un système jusqu'à la création des masques (représentation bidimensionnelle des différentes couches conductrices et semi-conductrices constituant la structure physique d'un circuit) ;

- d'outils d'analyse et de vérification pour s'assurer que les performances atteintes sont conformes aux spécifications.

Il est important de noter que la conception de circuits analogiques ou mixtes est encore en grande partie non automatisée requérant ainsi le savoir-faire de concepteurs spécialisés.

1.6 Bibliographie

- [1] International Technology Roadmap for Semiconductors. <http://www.itrs2.net/>.
- [2] Semiconductor Industry from 2015 to 2025. <http://www.ibs-inc.net/#!white-paper>.
- [3] IC Insights. <http://www.icinsights.com/>.
- [4] An introduction to FD-SOI. <https://www.youtube.com/watch?v=uvV7jcpQ7UY>.
- [5] F. Maloberti and A. Davies. *A short history of circuits and systems*. River, 2016.
- [6] National Institute on Deafness and National Institutes of Health Other Communication Disorders. www.nidcd.nih.gov/health/.
- [7] Understanding The FinFet Semiconductor Process. <https://www.youtube.com/watch?v=Jctk0DI7YP8>.
- [8] G. Scalise. S.I.A. World Semiconductor Forecast 2007, June 2007. www.sia-online.org/.

Chapitre 2

Outils de théorie du signal : transformée de Laplace, transformée en Z

Les transformées de Laplace et en Z sont (avec la transformée de Fourier) les outils mathématiques pour le traitement des signaux et des systèmes analogiques en temps continu ou en temps discret.

Les objectifs de ce cours sont de donner les définitions et les principales propriétés des transformées de Laplace et en Z et de montrer quelques exemples d'utilisation.

2.1 Introduction : présentation des signaux et des systèmes analogiques

Un signal est une fluctuation d'une grandeur physique en fonction du temps et un système est un ensemble organisé de composants qui réalisent une opération.

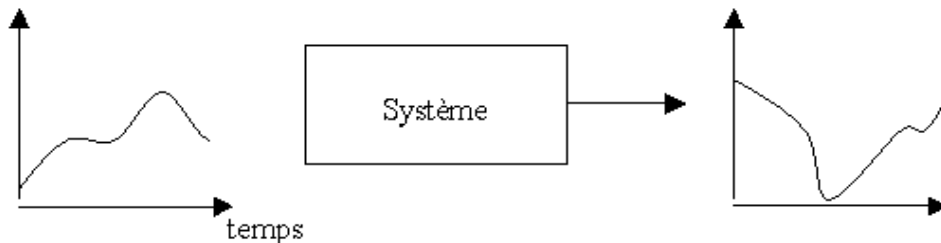


FIGURE 2.1 – Un système

Le phénomène observable est traduit par un modèle mathématique. La représentation classique, intuitive est une fonction du temps, mais la représentation spectrale est également un moyen de caractériser parfaitement les signaux (dualité temps-fréquence) et de faciliter l'étude des systèmes.

2.1.1 Les signaux analogiques

Les représentations temporelles $x(t)$ ou spectrales $X(f)$ n'existent que pour les signaux certains. Un signal certain est un signal utile, qui résulte d'une observation, d'une expérience (conditions identiques \rightarrow résultat identique). Par opposition, le bruit est un signal aléatoire qui perturbe le signal utile.

La nature des signaux et leur type de traitement sont classés en quatre grandes familles :
Deux grandes classes de signaux analogiques sont distinguées :

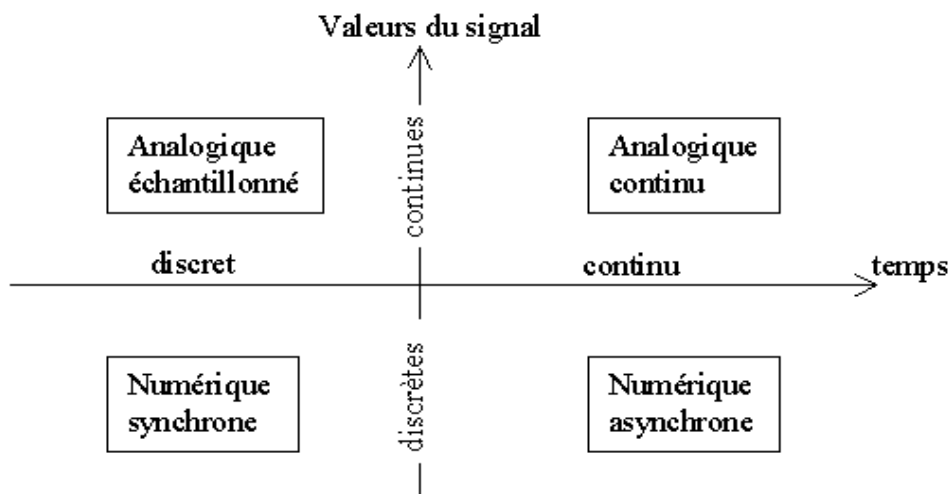


FIGURE 2.2 – Nature des signaux et traitement

- Signaux à temps continu, noté t , fonction $x(t)$;
- Signaux à temps discret, noté k , séquence $x[k]$.

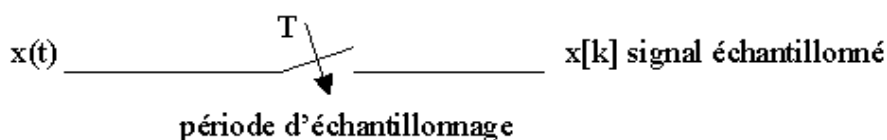


FIGURE 2.3 – Temps continu et temps discret

Exemples usuels

- Echelon unité (Heaviside)

$$\begin{array}{ll} u(t)=0 \text{ pour } t < 0 & u[k]=0 \text{ pour } k < 0 \\ u(t)=1 \text{ pour } t \geq 0 & u[k]=1 \text{ pour } k \geq 0 \end{array}$$

- Impulsions

$$\begin{array}{ll} \text{Impulsion de Dirac} & \text{Impulsion discrète} \\ \delta(t)=0 \text{ pour } t \neq 0 & \delta[k]=0 \text{ pour } k \neq 0 \\ \delta(0)=+\infty & \delta[k]=1 \text{ pour } k=0 \end{array}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0)$$

L'impulsion de Dirac en continu est une distribution qui associe à toute fonction continue sa valeur à l'origine ; elle modélise la dérivée d'un échelon unité.

- Signal sinusoïdal

$$\begin{array}{ll} x(t)=A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) & x[k]=A \cos(2\pi \nu_0 k + \varphi) \\ \text{fréquence } 0 \leq f_0 < +\infty & \text{fréquence réduite } 0 \leq \nu_0 \leq 1/2 \\ \text{amplitude } A \geq 0 & \text{amplitude } A \geq 0 \\ \text{phase } -\pi \leq \varphi < +\pi & \text{phase } -\pi \leq \varphi < +\pi \end{array}$$

Contrairement au cas continu, un signal sinusoïdal à temps discret n'est pas systématiquement périodique et de période égale à l'inverse de la fréquence. Ce cas ne se produit que pour $\nu_0 = 1/N$ où N est entier.

Principales caractéristiques

- Les signaux sont de durée finie lorsque le phénomène ne se manifeste que sur un intervalle de temps fini. Si leur durée est faible, on parle de signaux transitoires ou impulsionnels.
- Les signaux de durée infinie sont stationnaires si leurs fluctuations observent une certaine régularité quelque soit t ; c'est le cas des signaux périodiques ou quasi périodiques (superposition de plusieurs composantes harmoniques quelconques).
- Les signaux sont causaux si leurs valeurs sont nulles pour $t, k < 0$ ou anticausaux si leurs valeurs sont nulles pour $t, k > 0$.

2.1.2 Les systèmes analogiques

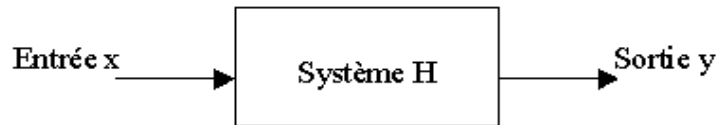


FIGURE 2.4 –

Un système met en relation une ou plusieurs sorties avec une ou plusieurs entrées. Dans le cas d'un système à une entrée et une sortie, on note H la relation fonctionnelle entre x et y :

$$y = H(x)$$

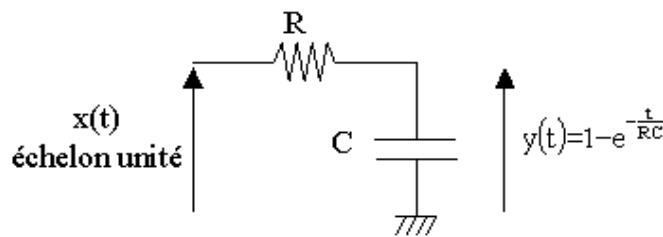
Les systèmes considérés sont des systèmes linéaires invariants (SLI).

- Un système est dit linéaire si $H(\sum a_i x_i) = \sum a_i H(x_i)$ où les a_i sont des coefficients constants. Ceci est équivalent au principe de superposition.
- Un système est dit invariant s'il ne dépend pas du temps.

Selon la nature des signaux x et y , le système peut être homogène (x et y de même nature) ou mixte (continu/échantillonné, analogique/numérique).

Pour les systèmes analogiques, voici les quatre possibilités assorties d'un exemple usuel :

- x et y continus



$$RCy^{(1)}(t) + y(t) = x(t)$$

FIGURE 2.5 – Filtre RC

Le comportement de ce type de système peut être modélisé par une équation différentielle d'ordre n à coefficients réels et constants.

$$b_0 y(t) + b_1 y^{(1)}(t) + \dots + b_n y^{(n)}(t) = a_0 x(t) + \dots + a_m x^{(m)}(t) \text{ avec } m \leq n$$

- x et y échantillonnés

Ce filtre réalise la différence entre 2 points consécutifs d'où son nom de dérivateur.

Le comportement de ce type de système peut être modélisé par une 'équation aux différences finies' d'ordre n à coefficient α_i et β_i réels et constants.

$$y[k] = - \sum_{i=1}^n \beta_i y[k-i] + \sum_{j=0}^m \alpha_j x[k-j] \text{ m et n sont finis.}$$

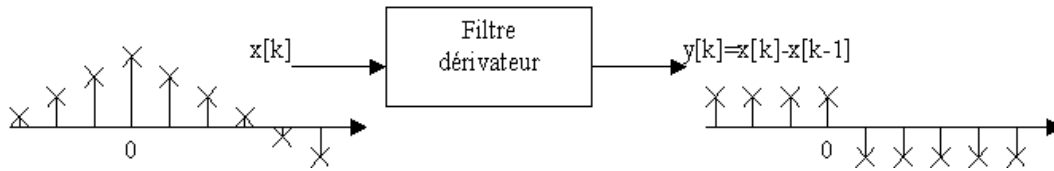


FIGURE 2.6 –

— x continu et y échantillonné : échantillonneur réel à pas constant T_e et durée de fermeture τ ($\tau \ll T_e$)

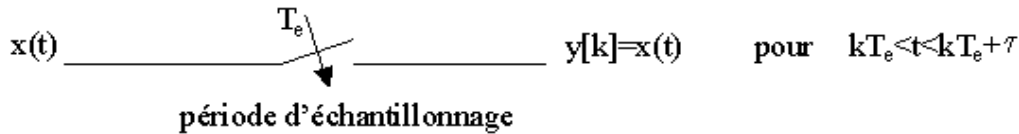


FIGURE 2.7 –

— x échantillonné et y continu : interpolation d'ordre 0 ou blocage

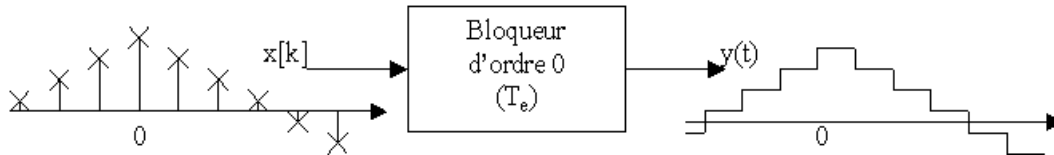


FIGURE 2.8 –

Pour le traitement mathématique, les systèmes inhomogènes sont décomposés en sous systèmes homogènes reliés par des échantillonneurs et/ou des interpolateurs.

Les outils mathématiques et leurs propriétés sont définis pour les systèmes homogènes continus ou échantillonnés.

2.1.3 Un SLI est un système de convolution

La réponse impulsionnelle est la sortie correspondante à une entrée impulsionnelle ($x(t) = \delta(t)$ ou $x[k] = \delta[k]$).

Puis une entrée quelconque $x[k]$ peut être décomposée en une somme d'impulsions discrètes :

$$x[k] = \sum_n x[n] \delta[k - n]$$

Le système H est linéaire et invariant, donc : $y[k] = \sum_n x[n] H \{ \delta[k - n] \} = \sum_n x[n] h[k - n]$

Ceci est un produit de convolution discret noté $*$: $y[k] = x * h[k]$

De même dans le cas continu, une entrée quelconque peut être décomposée en une somme d'impulsions réelles de largeur τ :

Ceci est un produit de convolution continu noté également $*$: $y(t) = x * h(t)$

Quelques caractéristiques :

— Le produit de convolution est commutatif.

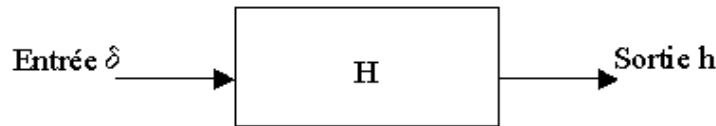


FIGURE 2.9 –

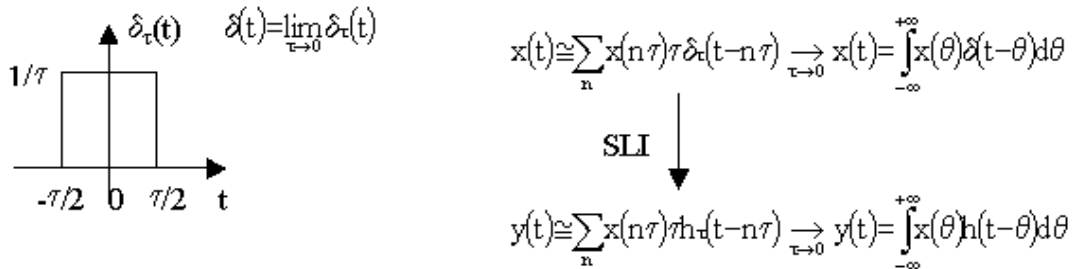


FIGURE 2.10 –

$$y(t) = x * h(t) = h * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) x(t - \theta) d\theta$$

$$y[k] = x * h[k] = h * x[k] = \sum_n h[n] x[k - n]$$

- Dans le cas d'un système causal, la réponse à un instant donné ne dépend que des valeurs précédentes de l'entrée, $h(t)=0$ pour $t < 0$ ou $h[n]=0$ pour $n < 0$:

$$y(t) = \int_0^{+\infty} h(\theta) x(t - \theta) d\theta$$

$$y[k] = \sum_{n=0}^{+\infty} h[n] x[k - n]$$

- Certains systèmes discrets ont une réponse impulsionnelle de durée finie (système RIF) tandis que d'autres ont une réponse impulsionnelle de durée infinie (systèmes RII).
- Tous les systèmes continus réels ont une réponse impulsionnelle de durée infinie.

2.2 Définition et propriétés de la transformée de Laplace pour l'étude des signaux et des systèmes continus

L'outil mathématique qui lie les domaines temporel et fréquentiel est la transformée de Fourier :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$X(\omega)$ peut s'interpréter comme la projection de $x(t)$ sur le signal harmonique $e^{j\omega t}$: on cherche dans toute l'histoire (passé et future) de $x(t)$ ce qui correspond à la pulsation ω .

2.2.1 Définition, condition d'existence et analyticité

La transformée de Laplace constitue une extension de la définition de la transformée de Fourier à tout le plan complexe de la variable fréquentielle.

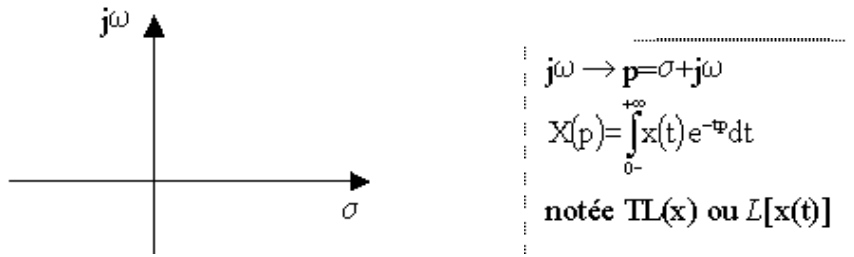


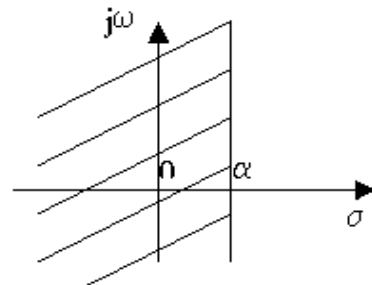
FIGURE 2.11 –

La définition retenue est celle de la TL unilatérale car en pratique les signaux et leurs systèmes de traitement sont causaux. La borne inférieure est fixée à 0^- pour englober une éventuelle discontinuité ou impulsion qui se produirait en $t=0$.

$$X(p) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

Le facteur $e^{-\sigma t}$ est un facteur de convergence que la transformée de Fourier ne possède pas. Il en résulte que la transformée de Laplace est définie (convergente) pour un plus grand nombre de signaux, en particulier les signaux dont la croissance est exponentielle.

Exemple : la fonction $f(t)=\exp(\alpha t)$ où α est une constante réelle positive ne possède pas de transformée de Fourier. En revanche, pour $\sigma > \alpha$, la transformée de Laplace est définie et vaut $F(p)=1/(p-\alpha)$.



$$F(p) = \int_{0^-}^{+\infty} \exp[(\alpha - p)t] dt$$

$$F(p) = \frac{1}{(\alpha - p)} [\exp[(\alpha - \sigma)t] \exp(-j\omega t)]_0^\infty$$

FIGURE 2.12 –

La transformée de Laplace d'une fonction $x(t)$ est donnée par l'ensemble de la fonction $X(p)$ et de la bande de convergence.

Une condition suffisante pour l'existence de la TL est qu'il existe un réel positif σ_0 tel que l'intégrale suivante converge :

$$\int_{0^-}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt$$

Puis pour tout $\sigma > \sigma_0$, l'intégrale a fortiori converge et donc la TL est définie.

Tous les signaux causaux qui ont une transformée de Laplace sont tels que cette transformée existe dans un demi plan droit (contenant $\text{Re}(p)=+\infty$).

Pour satisfaire à cette condition, $x(t)$ doit être localement sommable et la croissance de $x(t)$ avec t ne doit pas être trop rapide : $x(t)$ doit être d'ordre exponentiel, i.e. il existe deux

réels positifs M et α tels que pour $t \rightarrow \infty$:

$$|x(t)| < Me^{\alpha t}$$

Exemples :

- $f(t)=K$, une constante, il existe M tel que $|K| < Me^{\alpha t}$ avec $\alpha \geq 0$ quand $t \rightarrow \infty$, K est d'ordre exponentiel.
- $f(t)=t^n$, $n > 0$, comme $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^n}{\exp(\alpha t)} \right) = 0$ avec $\alpha > 0$, il existe M tel que $|t^n| < Me^{\alpha t}$ quand $t \rightarrow \infty$, t^n est d'ordre exponentiel.
- En revanche, $f(t)=\exp(t^3)$ n'est pas d'ordre exponentiel.

Dans ce cas, la transformée de Laplace de $x(t)$, $X(p)$ est définie et analytique (dérivable) dans la bande de convergence telle que $\text{Re}(p) = \sigma > \alpha$.

Et $L[x(t)] < \frac{M}{p-\alpha}$ pour $\text{Re}(p) = \sigma > \alpha$

Ce qui donne $L[x(t)] \rightarrow 0$ pour $p \rightarrow \infty$

2.2.2 La transformée de Laplace de quelques signaux

- Echelon unité (Heaviside) $TL(u) = \int_{0^-}^{\infty} u(t) e^{-tp} dt$
 $= \int_{0^-}^{\infty} e^{-tp} dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-tp} \right]_{0^-}^{\infty}$
 $TL(u) = \frac{1}{p}$ pour $\text{Re}(p) > 0$

- Impulsion de Dirac $TL(\delta) = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-tp} dt$

Toute l'énergie de l'impulsion de Dirac est concentrée en 0 (de 0^- à 0^+) donc elle est bien englobée dans l'intégrale grâce au choix de la borne 0^- pour la définition de la TL unilatérale. Donc,

$$TL(\delta) = 1$$

- Signal sinusoïdal complexe : $f(t)=\exp(\pm j\omega_0 t)$ où ω_0 est une constante réelle positive (pulsation)

$$TL(f) = \int_{0^-}^{\infty} \exp(\pm j\omega_0 t) e^{-tp} dt$$

$$= \frac{1}{-p \pm j\omega_0} [\exp[(-p \pm j\omega_0) t]]_{0^-}^{\infty}$$

$$TL(f) = \frac{1}{p \mp j\omega_0} \text{ pour } \text{Re}(p) > 0$$

2.2.3 Propriétés de la TL

- Linéarité : $L \left[\sum_{i=1}^n a_i x_i(t) \right] = \sum_{i=1}^n a_i L[x_i(t)]$ où a_i sont des constantes.

Application : détermination des TL des fonctions $\cos \omega_0 t$ et $\sin \omega_0 t$

$$L[\cos \omega_0 t] = L \left[\frac{\exp(j\omega_0 t) + \exp(-j\omega_0 t)}{2} \right] = \frac{1}{2(p - j\omega_0)} + \frac{1}{2(p + j\omega_0)} = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$L[\sin \omega_0 t] = L \left[\frac{\exp(j\omega_0 t) - \exp(-j\omega_0 t)}{2j} \right] = \frac{1}{2j(p - j\omega_0)} - \frac{1}{2j(p + j\omega_0)} = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

- Multiplication de la variable t par une constante positive α : $L[x(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} X(p/\alpha)$

- Différentiation dans le domaine temporel : $L \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] = pX(p) - x(0^-)$

Cette propriété est très importante : la dérivée dans le domaine temporel correspond à une multiplication par la variable complexe p dans le domaine fréquentiel (avec l'addition de termes correspondant aux conditions initiales). Donc l'opération transcendante de dérivation est convertie en une opération algébrique de multiplication. Ceci est le vrai pouvoir de la TL qui la rend si utile pour résoudre les équations différentielles.

— Intégration dans le domaine temporel : $L \left[\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \right] = \frac{X(p)}{p}$

Cette relation montre que l'intégration dans le domaine temporel correspond à une division dans le domaine fréquentiel.

En combinant les deux dernières propriétés, nous pouvons conclure que grâce à la TL, les équations intégro-différentielles sont remplacées par des équations algébriques.

Application : détermination de la TL de la fonction $f_n(t) = t^n$ où n est un entier.

Sachant que la TL de l'échelon unité $u(t)$ vaut $1/p$:

$$L \left[\int_{0^-}^t u(\tau) d\tau = t \right] = \frac{1}{p^2} \quad TL(f_1) = \frac{1}{p^2}$$

$$L \left[\int_{0^-}^t \tau d\tau = \frac{t^2}{2} \right] = \frac{1}{p^3} \quad TL(f_2) = \frac{2}{p^3}$$

$$L \left[\int_{0^-}^t \tau^{n-1} d\tau = \frac{t^n}{n} \right] = \frac{TL(f_{n-1})}{p} \quad TL(f_n) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

— Différentiation dans le domaine fréquentiel : $L[-tx(t)] = \frac{dX(p)}{dp}$

— Intégration dans le domaine fréquentiel : $L \left[\frac{x(t)}{t} \right] = \int_p^\infty X(p) dp$

— Translation en temps : $L[x(t - \alpha)u(t - \alpha)] = e^{-\alpha p} X(p)$

— Translation en fréquence : $L[e^{\alpha t}x(t)] = X(p - \alpha)$

— Convolution : $L[x_1 * x_2(t)] = X_1(p) X_2(p)$

— Signaux périodiques : $x(t)$ périodique de période T : $L[x(t)] = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \int_0^T x(t)e^{-tp} dt$

2.2.4 Théorèmes de la valeur initiale, de la valeur finale

Soit $x(t)$ un signal causal de transformée $X(p)$, à condition que les limites existent, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pX(p)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{p \rightarrow +0} pX(p)$$

Le théorème de la valeur initiale permet de connaître la valeur de départ de $x(t)$ à partir de sa transformée de Laplace.

Le théorème de la valeur finale permet de déterminer la valeur de $x(t)$ à l'état stable à partir de sa transformée de Laplace.

Exemple : $X(p) = \frac{5p+3}{p(p+1)}$ $pX(p) = \frac{5p+3}{(p+1)}$

$$x(0^+) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pX(p) = 5$$

$$x(\infty) = \lim_{p \rightarrow +0} pX(p) = 3$$

Pour connaître complètement $x(t)$ à partir de sa transformée de Laplace, il faut inverser la transformée de Laplace. Nous présentons donc les méthodes d'inversion pour les seules fonctions de Laplace rencontrées en pratique : les fonctions rationnelles.

2.2.5 La transformée inverse d'une fonction rationnelle

Nous considérons la fonction de la variable complexe p suivante :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \text{ où } N(p) \text{ et } D(p) \text{ sont des polynômes à coefficients réels et } \deg N < \deg D$$

Une méthode efficace pour obtenir la transformée de Laplace inverse (TL^{-1}) de $F(p)$ repose sur la décomposition en éléments simples. Les TL^{-1} des éléments simples sont connues et répertoriées (voir tableau en annexe). L'avantage de cette décomposition réside dans l'interprétation physique associée à chaque terme qui nous éclaire sur le comportement temporel du signal ou du système.

Les zéros de $F(p)$ sont les zéros de $N(p)$ et les pôles de $F(p)$ sont les zéros de $D(p)$; Les pôles de $F(p)$ sont notés p_k , ils peuvent être réels ou complexes, simples ou multiples (d'ordre m_k).

$$F(p) = \frac{N(p)}{\prod_{k=1}^n (p - p_k)^{m_k}}$$

Comme $D(p)$ est à coefficients réels, chaque pôle complexe de $F(p)$ est accompagné de son conjugué. Le tableau ci dessous présente les différents types de pôles et l'expression de leurs éléments simples associés.

Type de pôle	expression	Eléments simples associés
Pôle réel simple	$p - a$	$\frac{A}{p-a}$
Pôle réel d'ordre r	$(p - b)^r$	$\frac{B_1}{p-b} + \frac{B_2}{(p-b)^2} + \dots + \frac{B_r}{(p-b)^r}$
2 pôles simples complexes conjugués	$p^2 + cp + d$	$\frac{Cp+D}{p^2+cp+d}$
2 pôles d'ordre m complexes conjugués	$(p^2 + ep + f)^m$	$\frac{E_1p+F_1}{p^2+ep+f} + \frac{E_2p+F_2}{(p^2+ep+f)^2} + \dots + \frac{E_m p+F_m}{(p^2+ep+f)^m}$

TABLE 2.1 –

Pour déterminer les coefficients au numérateur de chaque terme, les méthodes sont les suivantes :

par identification :

- multiplier chaque membre de l'égalité par $D(p)$
- prendre les valeurs particulières $p=p_k$
- évaluer les coefficients de même puissance jusqu'à obtenir le bon nombre d'équations (autant que d'inconnues)

Exemple :

$$F(p) = \frac{5p^3 - 6p - 3}{p^3(p+1)^2} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p^2} + \frac{A_3}{p^3} + \frac{B_1}{p+1} + \frac{B_2}{(p+1)^2}$$

$$\text{— } A_1 p^2 (p+1)^2 + A_2 p (p+1)^2 + A_3 (p+1)^2 + B_1 p^3 (p+1) + B_2 p^3 = 5p^3 - 6p - 3$$

$$\text{— } p=0 \quad A_3 = -3$$

$$\text{— } p=-1 \quad B_2 = 2$$

$$\text{— coefficient en } p^4 \quad A_1 + B_1 = 0$$

$$\text{— coefficient en } p^3 \quad 2A_1 + A_2 + B_1 + B_2 = 5$$

$$\text{— coefficient en } p^2 \quad A_1 + 2A_2 + A_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 3 \\ A_2 = 0 \\ B_1 = -3 \end{cases}$$

$$\text{donc } F(p) = \frac{3}{p} - \frac{3}{p^3} - \frac{3}{p+1} + \frac{2}{(p+1)^2}$$

et d'après les propriétés et la table des TL⁻¹ : $f(t) = u(t) \left[3 - 3\frac{t^2}{2} - 3e^{-t} + 2te^{-t} \right]$

généralisation :

Chaque terme de la décomposition correspond à un pôle spécifique (ou à une paire de pôles) de F(p) et pour les pôles réels, la transformée de Laplace inverse peut s'écrire directement.

— Pour un pôle réel simple : $\frac{A}{p-a}$

F(p) s'écrit comme une somme d'éléments simples : $F(p) = \frac{A}{p-a} + G(p)$

Donc $A = [(p-a)F(p)]_{p \rightarrow a}$ et $L^{-1}[F(p)] = Ae^{at} + L^{-1}[G(p)]$

— Pour un pôle réel multiple d'ordre r : $\frac{B_1}{p-b} + \frac{B_2}{(p-b)^2} + \dots + \frac{B_r}{(p-b)^r}$

F(p) s'écrit comme une somme d'éléments simples : $F(p) = \frac{B_1}{p-b} + \frac{B_2}{(p-b)^2} + \dots + \frac{B_r}{(p-b)^r} +$

...

Soit $\Phi(p) = (p-b)^r F(p)$, $\Phi(p)$ admet au point b un développement en série de Taylor :

$$\Phi(p) = \Phi(b) + (p-b)\Phi'(b) + \frac{(p-b)^2}{2!}\Phi''(b) + \dots + \frac{(p-b)^{r-1}}{(r-1)!}\Phi^{(r-1)}(b) + (p-b)^r G(p)$$

$$F(p) = \frac{\Phi(b)}{(p-b)^r} + \frac{\Phi'(b)}{(p-b)^{r-1}} + \frac{1}{2!} \frac{\Phi''(b)}{(p-b)^{r-2}} + \dots + \frac{1}{(r-1)!} \frac{\Phi^{(r-1)}(b)}{(p-b)} + G(p)$$

par identification $B_i = \frac{1}{(r-i)!} \left[\frac{d^{r-i}}{dp^{r-i}} ((p-b)^r F(p)) \right]_{p \rightarrow b}$ $i=1, 2, \dots, r$

$$L^{-1}[F(p)] = e^{bt} \left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \Phi(b) + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} \Phi'(b) + \frac{t^{r-3}}{(r-3)!} \frac{\Phi''(b)}{2!} + \dots + \frac{\Phi^{(r-1)}(b)}{(r-1)!} \right) + L^{-1}[G(p)]$$

Exemple :

$$F(p) = \frac{p-2}{p(p+1)^3}$$

— Un pôle réel simple en 0 : $A = [pF(p)]_{p \rightarrow 0} = -2$

— Un pôle triple en -1 : $\Phi(p) = (p+1)^3 F(p) = 1 - \frac{2}{p}$ $\Phi(-1) = 3$

$\Phi'(p) = \frac{2}{p^2}$ $\Phi'(-1) = 2$

$\Phi''(p) = \frac{-4}{p^3}$ $\Phi''(-1) = 4$

En appliquant les résultats ci dessus, nous pouvons écrire directement :

$$f(t) = u(t) \left[-2 + e^{-t} \left(\frac{3t^2}{2} + 2t + 2 \right) \right]$$

Pour les pôles complexes, la détermination de la TL⁻¹ peut être traitée de la même façon que pour les pôles réels en substituant $(\alpha+j\beta)$ et $(\alpha-j\beta)$ pour a ou pour b.

Exemple :

$$F(p) = \frac{2p+3}{p^2+4p+8} = \frac{2p+3}{(p-(-2+2j))(p-(-2-2j))}$$

F(p) possède deux pôles complexes conjugués d'ordre 1 : -2+2j et -2-2j

$$(p-(-2+2j))F(p) = \frac{2p+3}{p-(-2-2j)} \quad A_1 = [(p-(-2+2j))F(p)]_{p \rightarrow -2+2j} = \frac{-1+4j}{4j} = 1 + \frac{j}{4}$$

de même $A_2 = 1 - \frac{j}{4}$ et $f(t) = \left(1 + \frac{j}{4}\right) e^{(-2+2j)t} + \left(1 - \frac{j}{4}\right) e^{(-2-2j)t}$

$$f(t) = e^{-2t} \left[e^{2j} + e^{-2j} + \frac{j}{4} (e^{2j} - e^{-2j}) \right]$$

$$f(t) = e^{-2t} \left[2 \cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]$$

Cependant, connaissant les TL des fonctions sinus et cosinus, la détermination par la décomposition en éléments simples regroupant deux pôles complexes conjugués est souvent plus rapide :

$$F(p) = \frac{2p+3}{p^2+4p+8} = \frac{2(p+2)-1}{(p+2)^2+4} = 2 \frac{p+2}{(p+2)^2+4} - \frac{1}{2} \frac{2}{(p+2)^2+4}$$

inversion par calcul de l'intégrale complexe - formule des résidus :

En principe, la transformée de Laplace inverse $x(t)$ peut être obtenue grâce à l'intégrale d'inversion complexe suivante :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(p) e^{tp} dp = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} X(p) e^{tp} dp$$

où σ appartient au domaine de convergence de $X(p)$. Si $x(t)$ présente une discontinuité en t_0 , la limite de l'intégrale fournit :

$$x(t_0) = \frac{x(t_0^+) + x(t_0^-)}{2}$$

Théorème des résidus :

Si $F(p)$ est analytique à l'intérieur et sur un contour fermé C , excepté éventuellement en un nombre fini de singularités situées à l'intérieur de C , alors

$$\oint_C F(p) dp = 2\pi j \sum_r k_r$$

où les k_r sont les résidus de $F(p)$ aux singularités.

En appliquant ce théorème avec $F(p) = X(p)e^{tp}$, nous obtenons :

$$x(t) = \sum \text{Résidus de } X(p) e^{tp} \text{ aux pôles de } X(p)$$

Pour le pôle p_r d'ordre n , $k_r = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} [(p-p_r)^n X(p) e^{tp}]_{p=p_r}$

Les expressions des dérivées successives pour la détermination de k_r deviennent rapidement volumineuses et leur maniement ne peut être raisonnablement envisagé qu'avec des logiciels de calcul (type MAPLE).

2.3 Principales utilisations de la transformée de Laplace

Le point clé des méthodes d'inversion que nous venons de détailler est la détermination des pôles de la fonction transformée $X(p)$. En effet, les pôles de $X(p)$ contiennent toute l'information nécessaire à la connaissance du comportement temporel de la fonction d'origine $x(t)$.

2.3.1 Pôles de $X(p)$ et comportement qualitatif de $x(t)$

Soit la fonction rationnelle factorisée : $X(p) = \frac{N(p)}{\prod_{k=1}^n (p-p_k)^{m_k}}$

Chaque pôle est symbolisé par une croix dans le plan p complexe.

La fonction $x(t)$ est la somme des transformées inverses de chaque terme correspondant à un pôle ou une paire de pôles. Le comportement qualitatif d'un terme en fonction de la localisation de son pôle dans le plan p est le suivant :

Pôle réel simple :

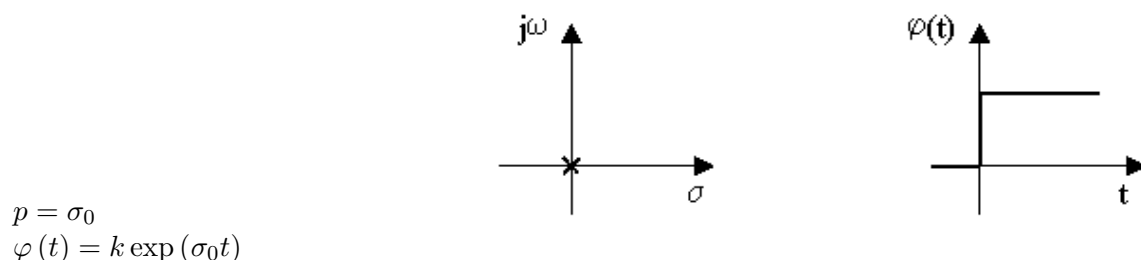


FIGURE 2.13 –

Si le pôle réel est égal à 0, la fonction d'origine est une fonction échelon (2.13).

Si le pôle réel est négatif, la fonction d'origine décroît exponentiellement et plus le pôle est loin de l'axe $j\omega$, plus la décroissance est rapide (2.14).

En revanche, si le pôle est positif, la fonction croît indéfiniment (2.15).

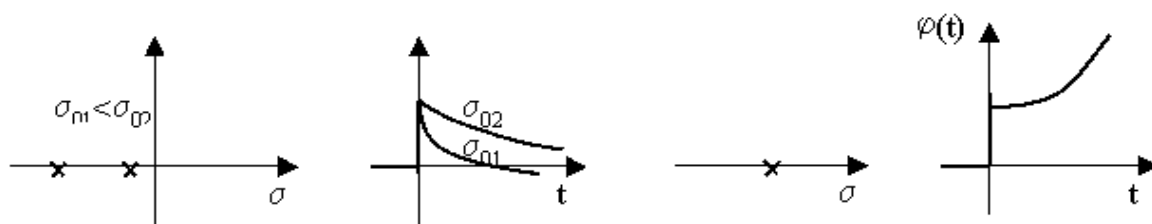


FIGURE 2.14 –

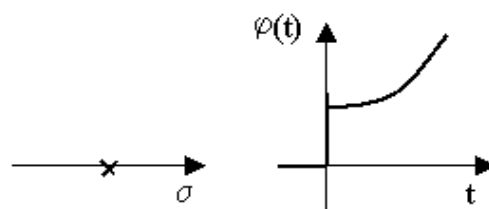


FIGURE 2.15 –

Pôles complexes conjugués : Si le pôle est imaginaire pur, la fonction d'origine est sinusoïdale. Plus le pôle est loin de l'axe des réels, plus la fréquence des oscillations est rapide (2.16).

Si la partie réelle du pôle est négative, l'amplitude des oscillations décroît exponentiellement (2.17). En revanche, si la partie réelle du pôle est positive, l'amplitude des oscillations croît indéfiniment (2.18).

Ces considérations montrent que selon le signe de la partie réelle des pôles de $X(p)$, le signal $x(t)$ converge ou diverge ou encore reste borné ; ce qui se traduit pour un système par la notion de stabilité.

2.3.2 Critères de stabilité

La stabilité est une notion importante dans l'étude des systèmes.

Intuitivement, un système est stable si lorsqu'on supprime l'excitation x , la sortie y tend vers une limite bornée.

$$p = \sigma_0 \pm j\omega_0$$

$$\varphi(t) = k \exp(\sigma_0 t) \cos \omega_0 t$$

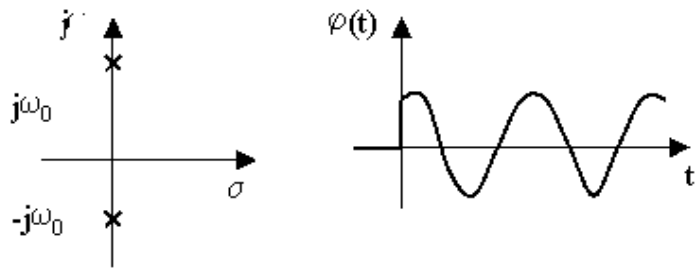


FIGURE 2.16 –

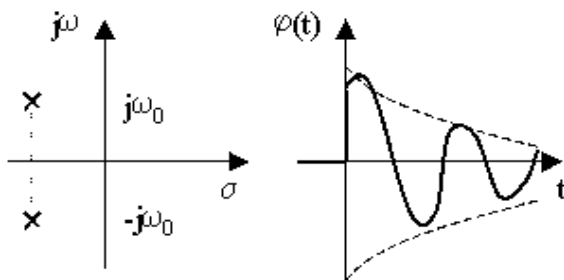


FIGURE 2.17 –

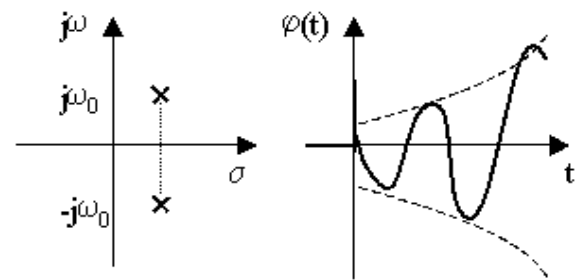


FIGURE 2.18 –

Stabilité Entrée Bornée – Sortie Bornée (EBSB) :

A toute entrée x , bornée en amplitude, correspond une sortie y également bornée en amplitude.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système soit stable EBSB est que :

- sa réponse impulsionnelle soit absolument sommable ($\int_0^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$) ;
- sa fonction de transfert $H(p)$ n'ait que des pôles à partie réelle **négative** et que le degré du numérateur soit inférieur ou égal à celui du dénominateur (ce qui est toujours le cas en pratique).

Exemples :

Un retard pur est stable EBSB.

Un intégrateur (K/p) n'est pas stable EBSB.

Stabilité au sens large :

Un système est stable au sens large si sa réponse impulsionnelle est bornée pour tout $t > 0$. Pour cette stabilité, $H(p)$ peut aussi avoir des pôles à partie réelle nulle d'ordre 1.

Exemples :

$H(p) = \frac{5p^3 - 6p - 3}{p^3(p+1)^2}$ est la fonction de transfert d'un système instable.

$H(p) = \frac{p-2}{p(p+1)^3}$ est la fonction de transfert d'un système stable au sens large, mais pas EBSB.

$H(p) = \frac{2p+3}{p^2+4p+8}$ est la fonction de transfert d'un système stable dans les deux sens du termes.

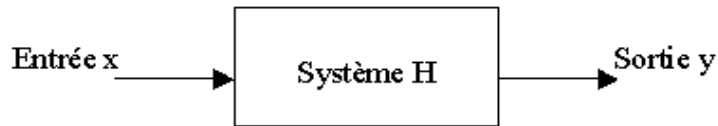


FIGURE 2.19 –

2.3.3 Résolution d'équations différentielles linéaires

La principale force de la représentation symbolique de Laplace est de convertir les équations intégral-différentielles qui caractérisent les systèmes linéaires invariants en temps continu en équation algébriques.

domaine temporel
dérivation de $x(t)$

domaine fréquentiel
multiplication par p de $X(p)$, avec l'addition d'un terme de condition initiale

intégration de $x(t)$

division par p de $X(p)$

De l'équation algébrique en $X(p)$, il est facile d'extraire l'inconnue $X(p)$. Puis les méthodes d'inversion de la transformée de Laplace sont mises en œuvre pour obtenir $x(t)$.

Les mêmes considérations peuvent s'appliquer à un système d'équations différentielles avec plusieurs variables.

2.3.4 Etude d'un circuit électrique

La transformée de Laplace est un outil puissant pour l'analyse et la conception de circuits et systèmes électriques. Et au delà, l'étude de tout système (mécanique, biologique) pour lequel il existe une équivalence (un modèle) électrique peut se servir de l'outil de Laplace.

Les éléments de base :

Considérons les principaux éléments d'un circuit électrique et leur expression dans le domaine fréquentiel :

Tension	$u(t)$	$U(p)$
Courant	$i(t)$	$I(p)$
Résistance	$R = \frac{u(t)}{i(t)}$	$Z_R = \frac{U(p)}{I(p)} = R$
Inductance	$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$U(p) = LpI(p) - Li(0^-) = Z_L I(p) - Li(0^-)$
Capacité	$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$	$I(p) = CpU(p) - Cu(0^-) = \frac{1}{Z_C} U(p) - Cu(0^-)$

Les termes correspondants aux conditions initiales sont très importants ; ils peuvent être modélisés par une source de tension continue ou de courant continu.

Méthode d'étude générale :

Nous allons présenter la technique générale pour déterminer l'expression d'un signal dans un circuit en l'appliquant simultanément à un exemple. Les données sont la topologie du circuit, les expressions temporelles des excitations et les conditions initiales (valeurs des tensions et des courants à $t=0$).

Soit le circuit intégrateur et l'excitation représentés ci-dessous, déterminer l'expression temporelle de la sortie $v_s(t)$ en fonction de sa valeur initiale.

— Calculer les transformées de Laplace des entrées.

$$v_e(t) = t[u(t) - u(t-1)] + u(t-1) = tu(t) - (t-1)u(t-1)$$

$$V_e(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}e^{-p} = \frac{1}{p^2}(1 - e^{-p})$$

— Représenter le circuit avec les éléments transformés et des générateurs pour les conditions initiales.

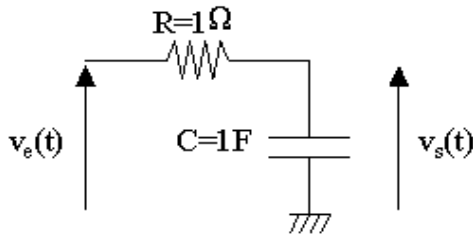


FIGURE 2.20 –

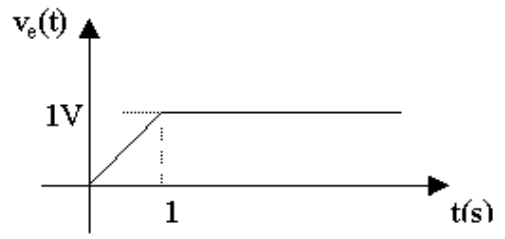


FIGURE 2.21 –

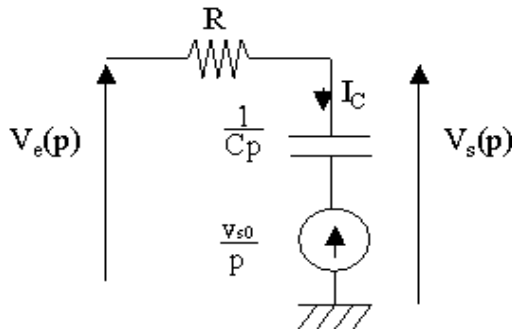


FIGURE 2.22 –

$$I_C(p) = CpV_s(p) - Cv_{s0}$$

$$V_s(p) = Z_C I_C(p) + \frac{v_{s0}}{p}$$

$$v_{s0} = v_s(0^-)$$

— Ecrire autant d'équations que d'inconnues dans le système grâce aux lois des nœuds et des mailles.

$$V_s(p) = \frac{1}{Cp} I_C(p) + \frac{v_{s0}}{p}$$

$$V_s(p) + R I_C(p) = V_e(p)$$

— Résoudre le système d'équations pour toutes les inconnues ou seulement pour celles qui sont recherchées.

$$V_s(p) = \frac{V_e(p) + RCv_{s0}}{RCp+1} = \frac{V_e(p) + v_{s0}}{p+1}$$

$$V_s(p) = \frac{1}{p+1} \left[\frac{1}{p^2} (1 - e^{-p}) + v_{s0} \right]$$

— Calculer la transformée de Laplace inverse

$$F_1(p) = \frac{1}{(p+1)p^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \quad f_1(t) = (e^{-t} - 1 + t)u(t)$$

$$F_2(p) = \frac{v_{s0}}{(p+1)} \quad f_2(t) = v_{s0}e^{-t}u(t)$$

$$\text{donc } v_s(t) = f_1(t) - f_1(t-1) + f_2(t)$$

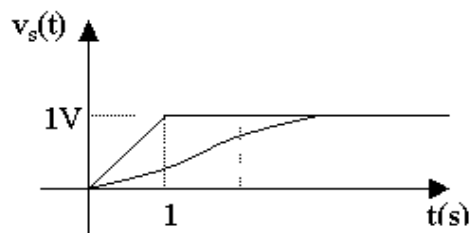


FIGURE 2.23 – Allure de $v_s(t)$ pour $v_{s0} = 0$

2.4 Définition et propriétés de la transformée en Z pour l'étude des signaux et des systèmes échantillonnés

Les systèmes linéaires invariants (SLI) échantillonnés constituent une classe très importante pour le traitement du signal. La transformée en Z pour de tels systèmes joue le même rôle que la transformée de Laplace pour les SLI continus.

2.4.1 Définition, condition d'existence et analyticité

Soit une séquence $x[k]$ de nombre réels, la transformée en Z est une fonction de la variable complexe z définie par :

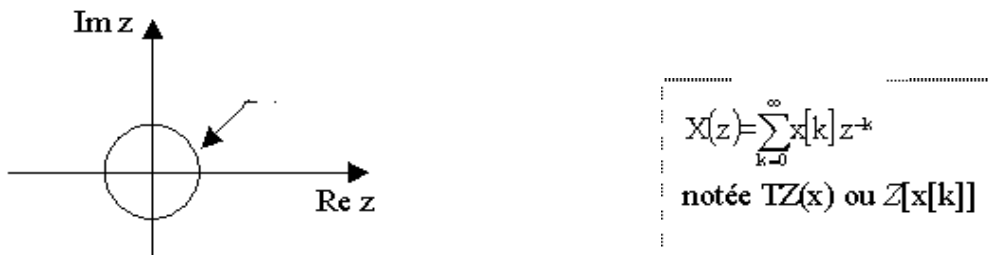


FIGURE 2.24 –

La définition retenue est celle de la TZ unilatérale valable pour les signaux et les systèmes de traitement causaux.

La variable complexe z peut s'écrire : $z = \rho e^{j\theta}$. Alors, une condition suffisante pour l'existence de la TZ est qu'il existe un réel positif ρ_0 tel que la somme suivante converge :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x[k]| \rho_0^{-k}$$

Puis pour tout $\rho > \rho_0$, la somme à fortiori converge et donc la TZ est définie.

Tous les signaux causaux qui ont une transformée en Z sont tels que cette transformée existe dans le plan complexe (contenant $\rho = +\infty$) privé d'un disque centré sur l'origine.

Exemple :

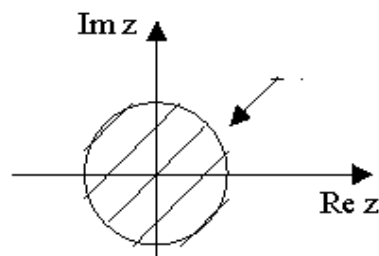


FIGURE 2.25 –

La fonction $f[k]=a^k$ où a est une constante réelle positive.

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (az^{-1})^k$$

$$F(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \text{ si } |az^{-1}| < 1$$

pour $\rho > a$, la transformée en Z est définie.

La transformée en Z d'une séquence $x[k]$ est donnée par l'ensemble de la fonction $X(z)$ et du codisque de convergence.

Pour satisfaire à cette condition, $x[k]$ doit être localement sommable et la croissance de $x[k]$ avec k ne doit pas être trop rapide : il existe deux réels positifs M et α tels que pour $k \rightarrow \infty$:

$$|x[k]| < M\alpha^k$$

Dans ce cas, la transformée en Z de $x[k]$, $X(z)$ est définie et analytique (dérivable) dans le codisque de convergence telle que $|z| = \rho > \alpha$.

2.4.2 La transformée en Z de quelques signaux

— Echelon unité (Heaviside)
$$TZ(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} u[k] z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k}$$

$$TZ(u) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \text{ pour } |z| > 1$$

— Impulsion discrète
$$TZ(\delta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[k] z^{-k} = 1$$

— Séquence exponentielle : $f[k] = \exp(-\alpha k)$ où α est une constante réelle positive

$$TZ(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \exp(-\alpha k) z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-\alpha} z^{-1})^k$$

$$TZ(f) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha} z^{-1}} \text{ pour } |z| > e^{-\alpha}$$

2.4.3 Propriétés de la TZ

— Linéarité : $Z \left[\sum_{i=1}^n a_i x_i[k] \right] = \sum_{i=1}^n a_i Z[x_i[k]]$ où a_i sont des constantes

— Translation en temps : soit y le signal x retardé de k_0 échantillons $y[k] = x[k - k_0]$
 $Z[y[k]] = z^{-k_0} X(z)$

Cette propriété montre que retarder un signal d'une unité (une période d'échantillonnage) revient à multiplier par z^{-1} dans le domaine fréquentiel. Ceci conduit à considérer la variable z^{-1} au sens d'un calcul symbolique comme un opérateur retard d'un échantillon.

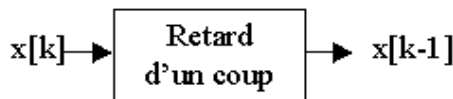


FIGURE 2.26 –

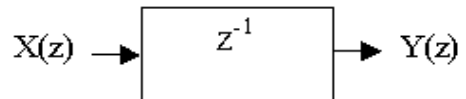


FIGURE 2.27 –

— Multiplication du signal par un signal exponentiel : $Z[a^k x[k]] = X(z/a)$

— Multiplication du signal par sa variable d'évolution : $Z[kx[k]] = -z \frac{dX(z)}{dz}$

— Convolution : $Z[x_1 * x_2[k]] = X_1(z) X_2(z)$

Remarque : pour des signaux causaux $x_1 * x_2[k] = \sum_{n=0}^k x_1[n] x_2[k - n]$

2.4.4 Relation entre la transformée en Z et la transformée de Laplace

Si la séquence $x[k]$ provient de l'échantillonnage d'un signal continu $x(t)$:

$$x[k] = x(kT) \quad k=0, 1, 2, \dots$$

la transformée en Z s'écrit : $X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)z^{-k}$

D'autre part le signal échantillonné : $x_e(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)\delta(t - kT)$

possède une transformée de Laplace : $L[x_e(t)] = X_e(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT) \exp(-kTp)$

Si l'on identifie $X(z)$ et $X_e(p)$, il vient : $z = e^{Tp}$

Grâce à cette relation, les transformées en Z et de Laplace d'un signal échantillonné causal sont identiques.

$$p = \sigma + j\omega$$

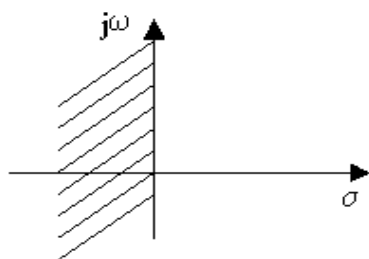


FIGURE 2.28 -

$$z = e^{T\sigma} e^{jT\omega} = \rho e^{j\theta}$$

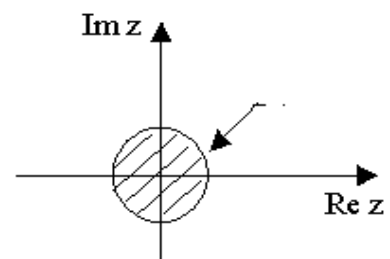


FIGURE 2.29 -

1/2 plan gauche
axe $j\omega$
1/2 plan droit



intérieur du cercle unité
cercle $|z|=1$
extérieur du cercle unité

Cas particulier :

Lorsque les domaines de convergence incluent l'axe $j\omega$ d'un côté et le cercle unité de l'autre, la séquence $x[k]$ possède une transformée de Fourier :

$$p = j\omega \quad z = e^{jT\omega} \quad TF(x) = X_e(j\omega) = X(e^{jT\omega}) = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k] \exp(-jkT\omega)$$

Les transformées en Z et de Fourier d'une séquence causale sont identiques.

2.4.5 La transformée inverse d'une fonction rationnelle

Considérons la fonction rationnelle suivante dans laquelle le numérateur et le dénominateur sont des fonctions polynomiales de z^{-1} : $X(z) = \frac{\sum_{r=0}^M a_r z^{-r}}{\sum_{r=0}^N b_r z^{-r}}$

Pour reconstituer la séquence $x[k]$ à partir de sa transformée en Z, plusieurs méthodes existent :

la division polynomiale :

En divisant le numérateur par le dénominateur, tous deux rangés selon les puissances croissantes de z^{-1} , on obtient une série :

$$X(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots \qquad X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

dont les coefficients sont les éléments de la séquence $x[k]$.

Exemple : $F(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}-0.5z^{-2}}$

$$\begin{array}{l} 1 \\ \hline 1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2} \\ \hline 0.5z^{-1} + 0.5z^{-2} \\ \hline 0.5z^{-1} - 0.5^2 z^{-2} - 0.5^2 z^{-3} \\ \hline 0.75z^{-2} + 0.5^2 z^{-3} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2} \\ \hline 1 + 0.5z^{-1} + 0.75z^{-2} + \dots \end{array} \right.$$

Cette méthode est utile pour déterminer les premiers termes de la séquence mais ne fournit pas une forme générique.

la décomposition en éléments simples :

La fraction rationnelle $X(z)$ peut s'écrire sous la forme d'une somme de termes dont la transformée en Z inverse est connue (voir tableau en annexe).

Type de pôle	expression	Élément simple associé
Pôle réel simple	$1 - az^{-1}$	$\frac{A}{1-az^{-1}}$

TABLE 2.2 –

Avec les techniques décrites pour inverser la transformée de Laplace, on détermine les coefficients de la décomposition :

$$X(z) = \sum_{r=1}^N \frac{A_r}{(1 - a_r z^{-1})}$$

Rappel : $Z[a^k] = \frac{1}{1-az^{-1}}$ donc $x[k] = \sum_{r=1}^N A_r a_r^k$

Exemple : $F(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1+0.5z^{-1})} = \frac{A_1}{(1-z^{-1})} + \frac{A_2}{(1+0.5z^{-1})}$

$$\begin{aligned} A_1 &= \left. (1 - z^{-1}) F(z) \right|_{z \rightarrow 1} = \frac{1}{1+0.5} = \frac{2}{3} \\ A_2 &= \left. (1 + 0.5z^{-1}) F(z) \right|_{z \rightarrow -0.5} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad \text{donc} \quad \begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{3} \left[\frac{2}{(1-z^{-1})} + \frac{1}{(1+0.5z^{-1})} \right] \\ \text{et } f[k] &= \frac{1}{3} \left(2 + (-0.5)^k \right) \end{aligned}$$

Inversion par calcul de l'intégrale complexe :

En principe, la transformée en Z inverse $x[k]$ peut être obtenue grâce à l'intégrale d'inversion complexe suivante :

$$x[k] = Z^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz$$

où C appartient au domaine de convergence de $X(z)$.

Théorème des résidus : Si $F(z)$ est analytique à l'intérieur et sur un contour fermé C, excepté éventuellement en un nombre fini de singularités situées à l'intérieur de C, alors

$$\oint_C F(z) dz = 2\pi j \sum_r k_r$$

où les k_r sont les résidus de $F(z)$ aux singularités.

En appliquant ce théorème avec $F(z) = X(z)z^{k-1}$, nous obtenons :

$$x[k] = \sum \text{Résidus de } X(z)z^{k-1} \text{ aux pôles de } X(z)z^{k-1}$$

Pour le pôle p_r d'ordre n, $k_r = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-p_r)^n X(z)z^{k-1}]_{z=p_r}$

Exemple : $F(z) = \frac{z^3 - z^2 + 0.5z}{(z-1)^2(z-0.5)}$

$F(z)z^{k-1}$ avec k entier positif à les mêmes pôles que $F(z)$:

$p_1 = 0.5$ simple

$p_2 = 1$ double

$$k_1 = \left| (z-0.5) F(z) z^{k-1} \right|_{z \rightarrow 0.5} = \left| \frac{z^3 - z^2 + 0.5z}{(z-1)^2} z^{k-1} \right|_{z \rightarrow 0.5} = (0.5)^k$$

$$k_2 = \left| \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 F(z) z^{k-1} \right] \right|_{z \rightarrow 1} = \left| \frac{d}{dz} \left[\frac{z^3 - z^2 + 0.5z}{z-0.5} z^{k-1} \right] \right|_{z \rightarrow 1} = k$$

donc $f[k] = (0.5)^k + k$

Les expressions des dérivées successives pour la détermination de k_r deviennent rapidement volumineuses et leur maniement ne peut être raisonnablement envisagé qu'avec des logiciels de calcul (type MAPLE).

2.5 Principales utilisations de la transformée en Z

La transformée en Z permet l'étude des systèmes discrets avec les mêmes possibilités que la transformée de Laplace pour les systèmes continus.

2.5.1 Fonction de transfert et réponse en fréquence des SLI

Les systèmes linéaires invariants sont les systèmes tels que l'entrée et la sortie sont liées par une équation aux différences linéaire avec des coefficients constants. Cette catégorie de systèmes est très importante car elle correspond aux systèmes de traitement du signal numérique (filtres numériques).

En pratique donc le système H est un SLI et de plus il est causal (la sortie y ne dépend que du passé ou du présent de x et du passé de y). Dans ce cas, l'équation aux différences est de la forme générale suivante, a_r et b_r sont des constantes réelles :

$$y[k] = \sum_{r=0}^M a_r x[k-r] - \sum_{r=1}^N b_r y[k-r] \text{ avec } M \leq N$$

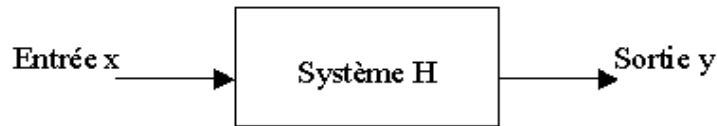


FIGURE 2.30 –

La transformation en Z de cette relation donne :

$$Y(z) = X(z) \sum_{r=0}^M a_r z^{-r} - Y(z) \sum_{r=1}^N b_r z^{-r}$$

Alors la fonction de transfert $H(z)$ du système est de la forme :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M a_r z^{-r}}{1 + \sum_{r=1}^N b_r z^{-r}}$$

Une fraction rationnelle en z (ou z^{-1}) relie l'entrée et la sortie d'un SLI dans le domaine en Z .

D'après les résultats énoncés dans la partie IV.4), si l'on considère que les séquences x et y représentent des signaux continus échantillonnés, la réponse en fréquence du système peut être obtenue en remplaçant z par $e^{jT\omega}$:

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{\sum_{r=0}^M a_r e^{-jr\omega T}}{1 + \sum_{r=1}^N b_r e^{-jr\omega T}} = |H(e^{j\omega T})| \exp(j\Phi(\omega))$$

$H(z)$ est une fraction rationnelle et $\exp(-j\omega T)$ est périodique. Donc les réponses en amplitudes et en phase sont périodiques de période $2\pi/T$.

Exemple :

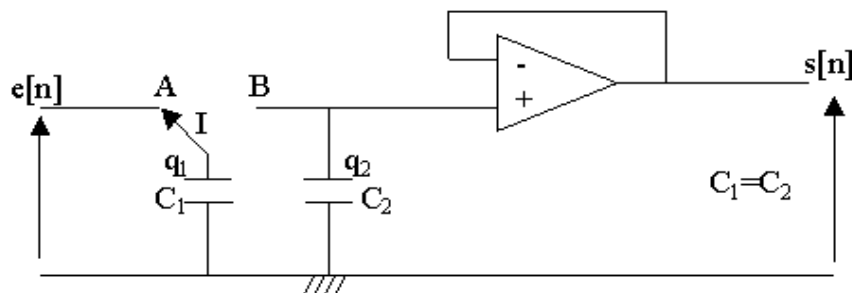


FIGURE 2.31 –

L'interrupteur I vient en contact avec la borne B aux instants nT pendant une durée $t_0 \ll T$.

Etablir l'équation aux différences

La charge totale présente sur les armatures des condensateurs à l'instant $nT - \varepsilon$ est identique à celle qui existe juste après la commutation à l'instant $nT + \varepsilon$.

à l'instant $nT-\varepsilon$:

$$\begin{cases} q_1 = C_1 e[n] \\ q_2 = C_2 s[n-1] \end{cases}$$

à l'instant $nT+\varepsilon$:

$$\begin{cases} q_1 = C_1 s[n] \\ q_2 = C_2 s[n] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C_1 e[n] + C_2 s[n-1] &= (C_1 + C_2) s[n] \\ \text{donc } s[n] &= \frac{C_1}{C_1+C_2} e[n] + \frac{C_2}{C_1+C_2} s[n-1] \quad \text{avec } C_1=C_2 \\ s[n] &= \frac{1}{2} (e[n] + s[n-1]) \end{aligned}$$

En déduire la fonction de transfert $H(z)$

La transformée en Z de la relation de récurrence ci-dessus donne :

$$S(z) = \frac{1}{2} (E(z) - z^{-1}S(z))$$

$$\text{d'où } H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{1}{2-z^{-1}}$$

Déterminer la réponse en amplitude dans le domaine fréquentiel et en déduire la fonction réalisée par ce filtre.

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega T}) &= \frac{1}{2 - e^{-j\omega T}} = \frac{1}{2 - \cos \omega T + j \sin \omega T} \\ |H(e^{j\omega T})|^2 &= \frac{1}{(2 - \cos \omega T)^2 + \sin^2 \omega T} = \frac{1}{5 - 4 \cos \omega T} \end{aligned}$$

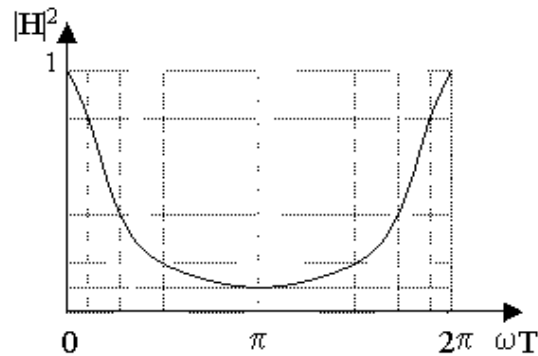


FIGURE 2.32 – Filtre passe bas

2.5.2 Stabilité

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système soit stable EBSB est que :

- sa réponse impulsionnelle soit absolument sommable : $\sum_{k=0}^{\infty} |x[k]| < +\infty$
- sa fonction de transfert $H(z)$ n'ait que des pôles dont le module est inférieur à 1.

La transmittance d'un système stable au sens large peut avoir des pôles d'ordre quelconque dont le module est inférieur à 1 et des pôles d'ordre 1 dont le module est égal à 1.

Ces conditions sont les transposées dans le plan en Z des conditions définies dans le plan de Laplace.

2.5.3 La variable bilinéaire

Bien que la variable z apparaisse naturellement dans les fonctions de transfert des systèmes échantillonnés, une autre variable λ est très utilisée :

$$\lambda = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

L'intérêt de cette variable est de faire correspondre au cercle unité dans le plan Z l'axe des imaginaires purs dans le plan λ de manière bijective, ce qui n'est pas le cas avec le plan p . En effet, un point sur le cercle unité en Z a une infinité d'origines sur l'axe $j\omega$ dans le plan p .

$$p = \sigma + j\omega \qquad z = e^{T\sigma} e^{jT\omega} = \rho e^{j\theta}$$

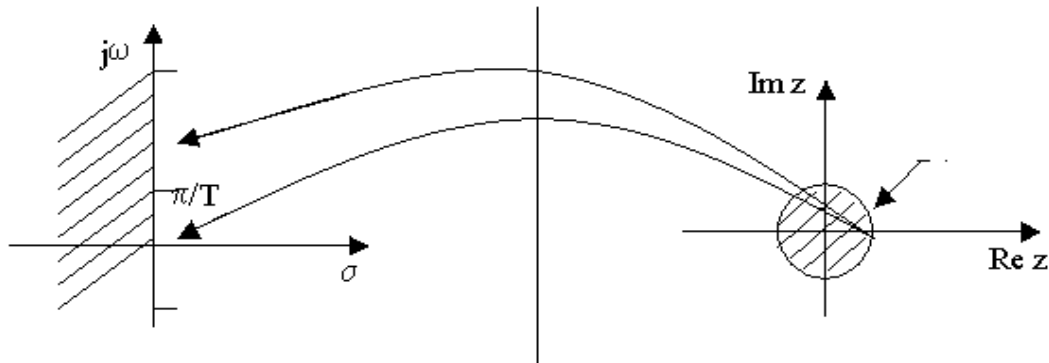


FIGURE 2.33 –

Tandis qu'avec λ : $\lambda = \frac{e^{j\theta} - 1}{e^{j\theta} + 1} = \frac{e^{j\theta/2} - e^{-j\theta/2}}{e^{j\theta/2} + e^{-j\theta/2}} = j \tan \frac{\theta}{2} = j\Omega$

le demi cercle $0 \rightarrow \pi$ correspond au demi axe $0 \rightarrow +\infty$ pour Ω

le demi cercle $0 \rightarrow -\pi$ correspond au demi axe $0 \rightarrow -\infty$ pour Ω

Les autres correspondances entre le plan λ et le plan Z sont les suivantes :

$1/2$ plan gauche	\iff	intérieur du cercle unité
$1/2$ plan droit	\iff	extérieur du cercle unité

Les utilisations de la variable bilinéaire sont les suivantes :

- Test de la stabilité des systèmes échantillonnés
- Conception de filtres digitaux : détermination de la fonction de transfert d'un filtre correspondant à un gabarit de spécifications.

Test de la stabilité

$$H(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} \quad \longrightarrow \quad z^{-1} = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \quad \longrightarrow \quad H(\lambda) = \frac{N_M(\lambda)}{D_N(\lambda)}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système soit stable EBSB est que la fonction de transfert $H(\lambda)$ n'ait que des pôles dans la partie gauche du plan (et $M \leq N$).

Définition : Un polynôme à coefficients réels est appelé polynôme de Hurwitz si tous ses zéros sont contenus dans le demi plan gauche.

Donc, pour savoir si le système H est stable, il suffit de tester si $D_N(\lambda)$ est un polynôme de Hurwitz ce qui est généralement plus simple que de déterminer tous les pôles de $H(z)$ ou de $H(\lambda)$.

Exemple :

$$H(z) = \frac{(1+z^{-1})^3}{37+51z^{-1}+27z^{-2}+5z^{-3}}$$

$$z^{-1} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$

$$1+z^{-1} = \frac{2}{1+\lambda}$$

$$H(\lambda) = \frac{8}{37(1+\lambda)^3+51(1-\lambda)(1+\lambda)^2+27(1-\lambda)^2(1+\lambda)+5(1-\lambda)^3}$$

$$H(\lambda) = \frac{1}{15+15\lambda+6\lambda^2+\lambda^3}$$

$D_N(\lambda) = 15 + 15\lambda + 6\lambda^2 + \lambda^3$ est-il un polynôme de Hurwitz ?

Méthode :

— Former deux polynômes dont la somme est $D_N(\lambda)$ contenant pour l'un, les puissances paires de λ et pour l'autre les puissances impaires.

$$N(\lambda) = \lambda^3 + 15\lambda$$

$$M(\lambda) = 6\lambda^2 + 15$$

— Obtenir la forme développée suivante pour $N(\lambda)/M(\lambda)$ grâce à des divisions et des inversions successives.

$$\frac{N(\lambda)}{M(\lambda)} = \alpha_1\lambda + \frac{1}{\alpha_2\lambda + \frac{1}{\alpha_3\lambda + \dots}}$$

Dividende	Diviseur et reste	Quotient
$N(\lambda) = \lambda^3 + 15\lambda$	$M(\lambda) = 6\lambda^2 + 15$	$q_1 = \frac{1}{6}\lambda$
$M(\lambda) = 6\lambda^2 + 15$	$R_1(\lambda) = N(\lambda) - q_1M(\lambda) = \frac{25}{2}\lambda$	$q_2 = \frac{12}{25}\lambda$
$R_1(\lambda) = \frac{25}{2}\lambda$	$R_2(\lambda) = M(\lambda) - q_2R_1(\lambda) = 15$	$q_3 = \frac{5}{6}\lambda$

TABLE 2.3 –

La condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $D_N(\lambda)$ d'ordre N soit un polynôme de Hurwitz au sens strict est que les N coefficients $\alpha_{1,2,\dots,N}$ soient strictement positifs.

Conclusion : la fonction de transfert $H(z) = \frac{(1+z^{-1})^3}{37+51z^{-1}+27z^{-2}+5z^{-3}}$ est la fonction de transfert d'un système stable EBSB.

Construction d'un filtre échantillonné

Première possibilité :

Filtre en temps continu $H(p)$ → expression temporelle $h(t)$
 → séquence échantillonnée $h[k] = h(kT)$
 → filtre échantillonné $H(z)$

$$H(p) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n (p-p_k)} = H_0 \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{(p-p_k)} \rightarrow h(t) = H_0 \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}$$

$$\rightarrow h[k] = H_0 \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k kT}$$

$$\rightarrow H(z) = H_0 \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

$H(z)$ est alors exprimé à partir des pôles de $H(p)$.

Application :

Deuxième possibilité : **Transformation conforme bilatère**

Modification du domaine fréquentiel :

$$H(p) = \frac{\omega_c}{p + \omega_c}$$

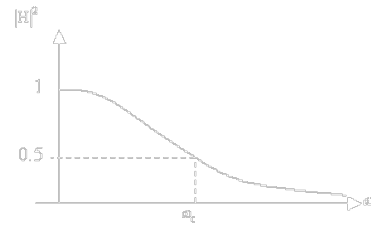


FIGURE 2.34 –

$$H(z) = \frac{\omega_c}{1 - e^{-\omega_c T} z^{-1}}$$

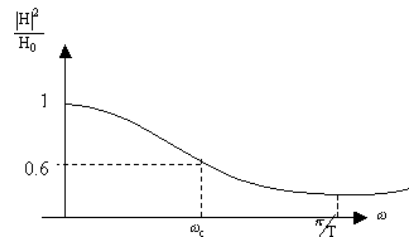


FIGURE 2.35 –

non satisfaisant :

gain en $\omega=0$ modifié
gain non réduit de moitié à ω_c

→ Filtre en temps continu $H(p=j\Omega)$ $p = j\Omega = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega T}}{1 + e^{-j\omega T}} = \frac{2}{T} j \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$
 → Filtre échantillonné $H(z)$ en substituant $p = f(z) = \frac{2}{T} \lambda = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$
 $p=f(z)$

Application :

$$\left. \begin{array}{l} \omega_c T = \frac{\pi}{2} \\ T = 1 \end{array} \right\} \Omega_c = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_c T}{2}\right) = 2H(p) = \frac{\Omega_c}{p + \Omega_c}$$

$$H(z) = \frac{\Omega_c}{2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + \Omega_c} = \frac{1}{2} (1 + z^{-1})$$

$$|H|^2 = \frac{1}{2} [1 + \cos \omega T]$$

Cette solution est satisfaisante puisque la réponse en amplitude du filtre échantillonné est conforme au gabarit : gain unitaire à fréquence nulle est gain divisé par deux (-3dB) à ω_c .

2.6 Transformations de Laplace et en Z d'une fonction causale $x(t)$ ou $x[kT]$

$x(t)$	$X(p)$	$X(z)$
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$u(t) - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$t - \frac{1-e^{-at}}{a}$	$\frac{a}{p^2(p+a)}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-aT})z}{a(z-1)(z-e^{-aT})}$
$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$	$\frac{ze^{-aT} \sin bT}{z^2-2ze^{-aT} \cos bT+e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT} \cos bT}{z^2-2ze^{-aT} \cos bT+e^{-2aT}}$
$\frac{t^2}{2} e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^3}$	$\frac{T^2 ze^{-aT}}{2(z-e^{-aT})^2} + \frac{T^2 ze^{-2aT}}{(z-e^{-aT})^3}$

TABLE 2.4 – Transformations de Laplace et en Z d'une fonction causale $x(t)$ ou $x[kT]$

2.7 Exercices

2.7.1 Etude en Laplace d'un filtre sélectif

On considère un circuit à temps continu dont le schéma de principe est reporté sur la figure 2.36. L'amplificateur opérationnel est supposé idéal : le gain en tension de l'amplificateur est infini et indépendant de la fréquence. L'impédance d'entrée est infinie ($i_+ = i_- = 0$).

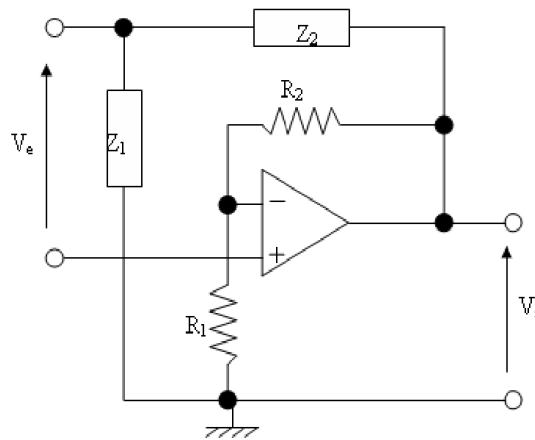


FIGURE 2.36 –

Question 2.7.1 Calculer la fonction de transfert $F(p) = \frac{V_s}{V_e}$. Exprimer F en fonction de $a = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ et $H = \frac{Z_1}{Z_1+Z_2}$

Z_1 est constituée d'une résistance R et d'un condensateur C en parallèle, Z_2 des mêmes éléments en série. Figure 2.37.

Question 2.7.2 Exprimer dans le formalisme de Laplace Z_1 , Z_2 et $H(p)$ en fonction de $\tau = RC$.

Question 2.7.3 Donner l'expression de la fonction de transfert $F(p)$ en fonction de a , τ et $\epsilon = 3 - a$.

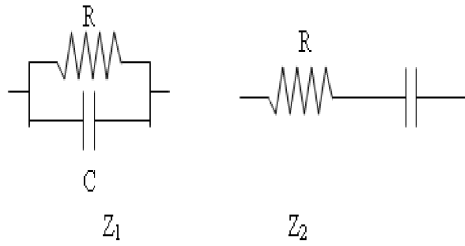


FIGURE 2.37 –

Question 2.7.4 *A quelle condition sur ϵ le système est-il stable ?*

Question 2.7.5 *Calculer les zéros $z_{1,2}$ de $F(p)$ en fonction de τ et expliciter $F(p)$ en fonction de $\tau_{1,2} = \frac{-1}{z_{1,2}}$.*

Question 2.7.6 *Tracer le diagramme asymptotique de Bode de $F : |F(p = j\omega)|_{dB}$ et $\Phi(F(p = j\omega))$ ainsi que l'allure de la courbe réelle dans le cas où $\epsilon \ll 1$.*

Question 2.7.7 *Quelle est la fonction réalisée par le circuit ?*

2.7.2 Exercice : Signal échantillonné

Soit le signal échantillonné selon la FIGURE 2.38.

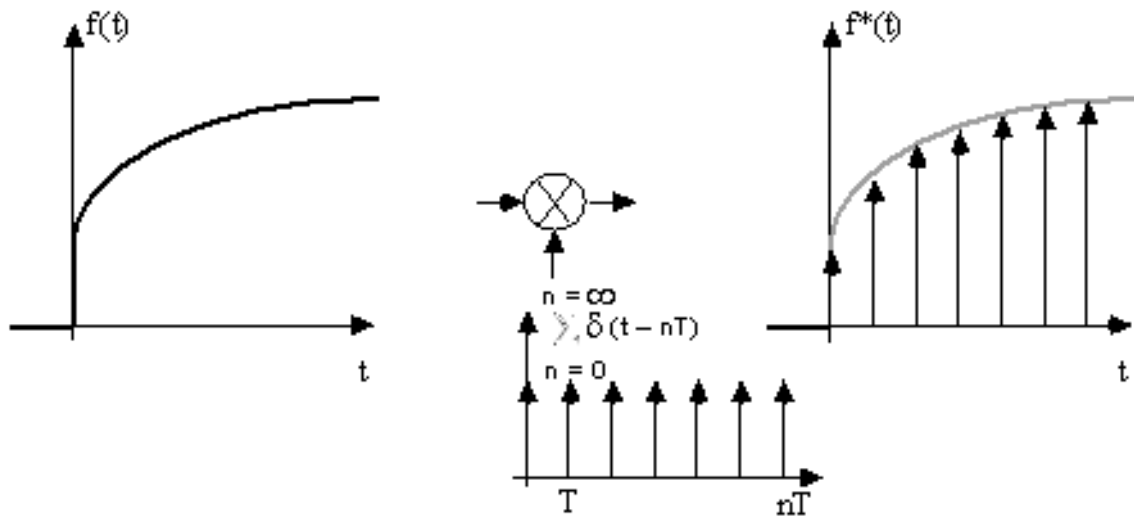


FIGURE 2.38 –

Question 2.7.2.1 *Ecrire l'expression du signal $f^*(t)$ en fonction de la valeur des échantillons de $f(t)$ et du peigne de Dirac.*

Question 2.7.2.2 *Trouver la transformation de Laplace, puis la transformation en z de $f^*(t)$. En déduire la relation entre z et p . De cette relation, sachant que les pôles d'une fonction de transfert $T(p)$ doivent être dans le 1/2 plan gauche de Laplace pour garantir la stabilité du système, en déduire la position des pôles d'une fonction de transfert $T(z)$ pour garantir également la stabilité du système en temps discret.*

2.7.3 Exercice : Signal échantillonné et bloqué

En pratique le signal analogique échantillonné est bloqué, en général, pendant une période d'horloge (FIGURE 2.39). On se propose d'étudier l'influence de ce blocage sur le signal en fréquence.

Question 2.7.3.1 Exprimer $v_{EB}(t)$ en fonction des échantillons $v(nT)$ et de la fonction échelon $u(t)$, en supposant $v(t) = 0$ pour $t < 0$.

Question 2.7.3.2 Calculer la transformation de Laplace de $v_{EB}(t)$: $V_{EB}(p)$. Faire apparaître dans cette expression la transformation de Laplace de $v(nT)$: $V_n(p)$. En déduire la fonction de transfert d'un bloqueur, notée $T_B(p)$. Représenter le module de $T_B(j\omega)$ en fonction de la fréquence.

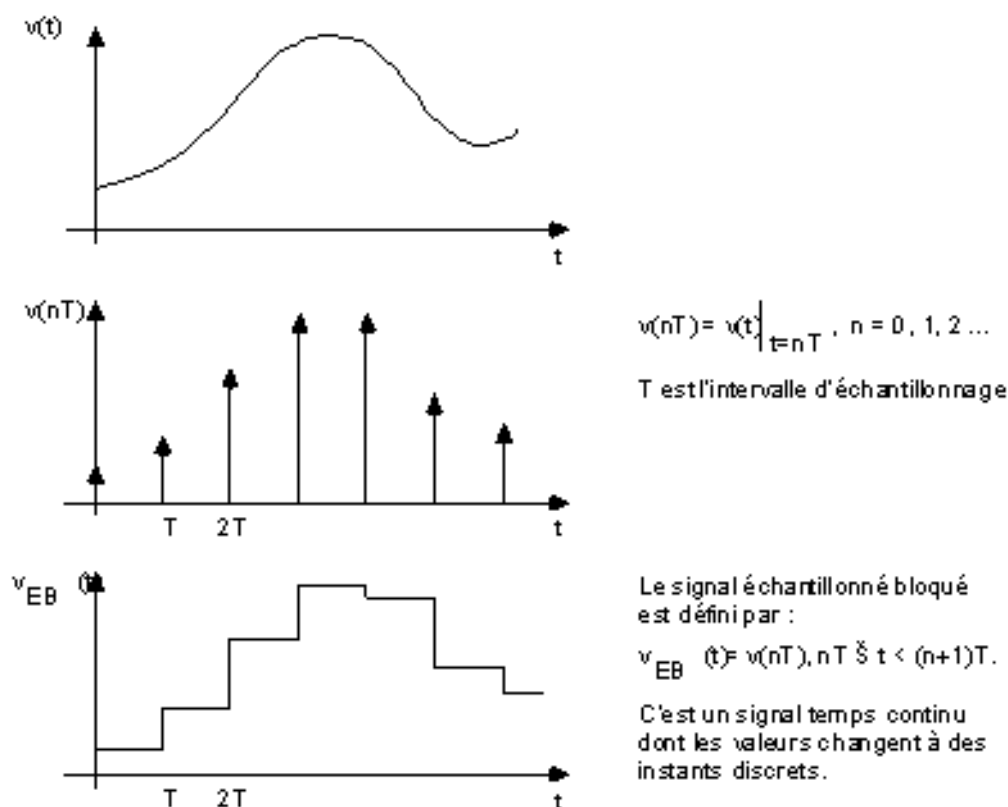


FIGURE 2.39 –

2.8 Bibliographie

- [1] H. Baher. *Analog & Digital Signal Processing*. John Wiley & Sons, 1992.
- [2] D. Beauvois and Y. Tanguy. *Représentation des signaux certains et des systèmes*. ESE, 1999.
- [3] ESE. *Analyse des systèmes linéaires*, 1980.

Chapitre 3

Amplification

3.1 Introduction

En électronique, on dispose de signaux qu'il est souvent nécessaire d'amplifier pour les rendre utilisables et on appelle "amplification" le processus qui permet de reproduire un signal de même forme, mais avec une amplitude plus grande. On est ainsi amené à parler d'une amplification en tension ou d'une amplification en puissance suivant le paramètre du signal qui a été amplifié.

La fonction amplification a souvent été la première fonction réalisée en électronique quelques soient les technologies utilisées (tube, transistor bipolaire, circuit intégré).

Cette fonction élémentaire constitue souvent le circuit d'entrée de nombreux traitements de signaux plus globaux, qu'ils soient analogiques ou numériques (filtrage, modulation, démodulation, conversion analogique numérique, communication radio . . .). En effet, l'amplification permet d'adapter le signal entrant, souvent de très faible puissance, aux caractéristiques des circuits en aval.

Le schéma bloc de l'amplificateur est présenté dans la figure 3.1. Le principe de l'amplification peut se résumer simplement par : rien ne se perd, rien ne se crée, l'amplificateur convertit l'énergie de l'alimentation en énergie utile à la charge.

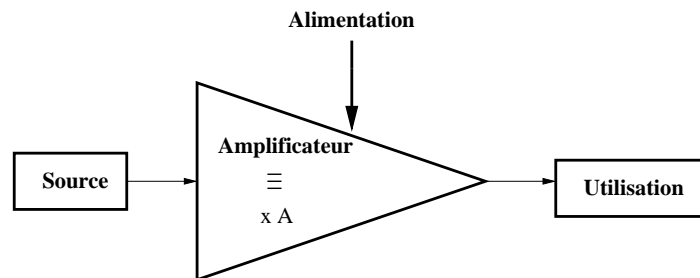


FIGURE 3.1 – Schéma bloc de l'amplificateur

Comment fonctionne un amplificateur, par exemple de tension ? Autrement dit, comment augmenter l'amplitude de la tension d'un signal ? La technique élémentaire utilisée est de moduler en fonction de la tension à amplifier l'intensité d'un courant délivré par une source de courant. Puis ce courant circule dans une résistance afin de récupérer une modulation de tension comme présentée dans la figure 3.2.

L'amplification se caractérise par deux paramètres fondamentaux :

- Le premier paramètre fondamental d'un amplificateur est celui qui concerne le phénomène d'amplification : on parlera à priori du gain de l'amplificateur, c'est-à-dire du rapport du signal de sortie de l'amplificateur sur le signal d'entrée.
- Le second paramètre fondamental est le domaine des fréquences dans lequel ce gain est mesuré et dans lequel il varie d'une façon limitée : on parle alors de bande passante de l'amplificateur.

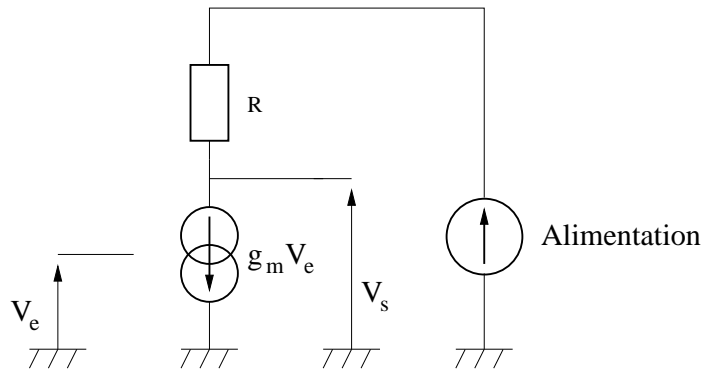


FIGURE 3.2 – Amplificateur élémentaire

Les amplificateurs peuvent être classés de différentes manières. On peut les présenter suivant le domaine des fréquences dans lequel ils sont utilisables, suivant la puissance qu'ils peuvent fournir, suivant un comportement linéaire ou non de leur courbe de réponse ou selon d'autres caractéristiques plus spécifiques.

3.2 Classification des amplificateurs

3.2.1 Classement en fonction du domaine des fréquences

- Les amplificateurs TBF (très basses fréquences) : la bande passante va du continu à quelques dizaines de Hertz (De 0,01 à 10 Hz pour fixer les ordres de grandeur).
- Les amplificateurs BF (basses fréquences) : la bande passante va de 10 Hz environ jusqu'à quelques dizaines de kilohertz.
- Les amplificateurs MF (moyennes fréquences) : la bande passante va de 100 KHz jusqu'à 1 MHz environ.
- Les amplificateurs HF (hautes fréquences) : capable d'amplifier des signaux de quelques centaines de mégahertz.
- Les amplificateurs hyperfréquences : travaillent jusqu'à quelques gigahertz, cette catégorie d'amplificateur se subdivisant en sous catégories spécifiques d'une bande de fréquence donnée à l'intérieur du domaine hyperfréquence : amplificateurs dits bande X, bande Ku, etc.

A noter que les limites des domaines de fréquences données ici ont une valeur relative.

Cette classification en fonction du domaine de fréquence peut être adaptée aux caractéristiques de certains amplificateurs :

- On parle ainsi d'amplificateurs audio, vidéo ou radio dont la bande passante va du continu à quelques dizaines de kilohertz, quelques dizaines de mégahertz ou quelques dizaines de gigahertz respectivement.
- De même, on parle d'amplificateur large bande lorsque la bande passante est du même ordre de grandeur que la fréquence centrale de cette bande passante ; ainsi dans le domaine des radars, on a un amplificateur large bande de fréquence centrale de 30 MHz et de bande passante de l'ordre de 10 à 20 MHz.
- De la même manière, on parle d'amplificateurs à bande étroite lorsque la bande passante de l'amplificateur est faible par rapport à la fréquence centrale de cette même bande passante.

La classification en fonction du domaine de fréquences est généralement la plus utilisée.

3.2.2 Classement en fonction de la puissance délivrée

Dans cette classification, on parle d'amplificateurs de faible puissance, de moyenne puissance, de forte puissance et on y ajoute des indications de fréquence. On parle ainsi d'amplificateur BF de forte puissance, d'un amplificateur HF de moyenne puissance, etc. Les limites entre ces zones de puissance sont approximativement de quelques dizaines de mW pour les amplificateurs de faible puissance, de quelques dizaines de W pour les amplificateurs de moyenne puissance et de l'ordre du kW pour les amplificateurs forte puissance.

3.2.3 Classement en amplificateur linéaire ou non linéaire

Dans cette classification, on a essentiellement des amplificateurs à réponse linéaire et des amplificateurs à réponse non linéaire.

Cette caractéristique de linéarité ou de non linéarité fait partie des caractéristiques fondamentales de l'amplificateur considéré et n'est pas un défaut d'utilisation.

A noter que l'on peut toujours amener un amplificateur dit linéaire à avoir un fonctionnement non linéaire, par saturation du niveau du signal de sortie.

3.2.4 Classification paramétrique

Dans cette classification, on distingue les amplificateurs de tension, de courant, de transimpédance et de transadmittance.

- Amplificateur de tension : l'amplificateur de tension amplifie une tension et délivre une tension. L'amplificateur de tension parfait à une impédance d'entrée infinie et une impédance de sortie nulle.
- Amplificateur de courant : l'amplificateur de courant amplifie un courant et délivre un courant. L'amplificateur de courant parfait à une impédance d'entrée nulle et une impédance de sortie infinie.
- Amplificateur de transimpédance : l'amplificateur de transimpédance amplifie un courant et délivre une tension. L'amplificateur de transimpédance parfait à une impédance d'entrée nulle et une impédance de sortie nulle.
- Amplificateur de transadmittance : l'amplificateur de transadmittance amplifie une tension et délivre un courant. L'amplificateur de transadmittance parfait à une impédance d'entrée infinie et une impédance de sortie infinie.

3.2.5 Préamplificateurs

Lorsque le signal d'entrée appliqué à l'amplificateur est faible, de l'ordre de quelques μV par exemple, on utilise des amplificateurs dont la caractéristique fondamentale est d'avoir un facteur de bruit le plus faible possible.

3.2.6 Amplificateurs spéciaux

Dans cette classification, on trouve des amplificateurs ayant des caractéristiques particulières ou permettant des applications spécifiques.

On trouve par exemple des amplificateurs dits à résistance négative, des amplificateurs paramétriques (dispositif pour lequel l'amplification du signal est due à un prélèvement de l'énergie sur une source, au moyen de variations périodiques d'une réactance), des amplificateurs différentiels (destinés à amplifier la différence de deux signaux appliqués à deux entrées présentant les mêmes caractéristiques électriques), des amplificateurs d'instrumentation (amplificateurs différentiels ayant une très grande impédance d'entrée), etc.

3.3 Les caractéristiques de l'amplificateur

L'amplificateur idéal est un système linéaire, c'est-à-dire son gain est constant quelles que soient l'amplitude, la forme et la fréquence du signal d'entrée. Mais comme tout système linéaire réel, l'amplificateur travaille autour d'un point de polarisation. Et comme tout système linéaire réel, l'amplificateur est limité par des phénomènes larges signaux, c'est-à-dire que l'amplificateur ne répond plus de manière linéaire si l'amplitude des signaux devient importante. Et la bande passante de l'amplificateur réel n'est pas infinie (réponse de l'amplificateur en petits signaux).

3.3.1 Caractéristiques larges signaux

Dynamique d'entrée

La dynamique d'entrée est définie comme la plage de variation du signal d'entrée à l'intérieur de laquelle l'amplificateur reste en fonctionnement linéaire.

Dynamique de sortie

A l'instar de la dynamique d'entrée, la dynamique de sortie est définie comme la plage de variation du signal de sortie à l'intérieur de laquelle l'amplificateur reste en fonctionnement linéaire.

Caractéristique de transfert, offset

La caractéristique de transfert idéale est une courbe linéaire représentant la fonction de transfert du signal de sortie par rapport au signal d'entrée. L'offset ou la tension de décalage est la valeur de la source de tension statique qu'il faut placer en entrée de l'amplificateur pour avoir une tension de sortie nulle.

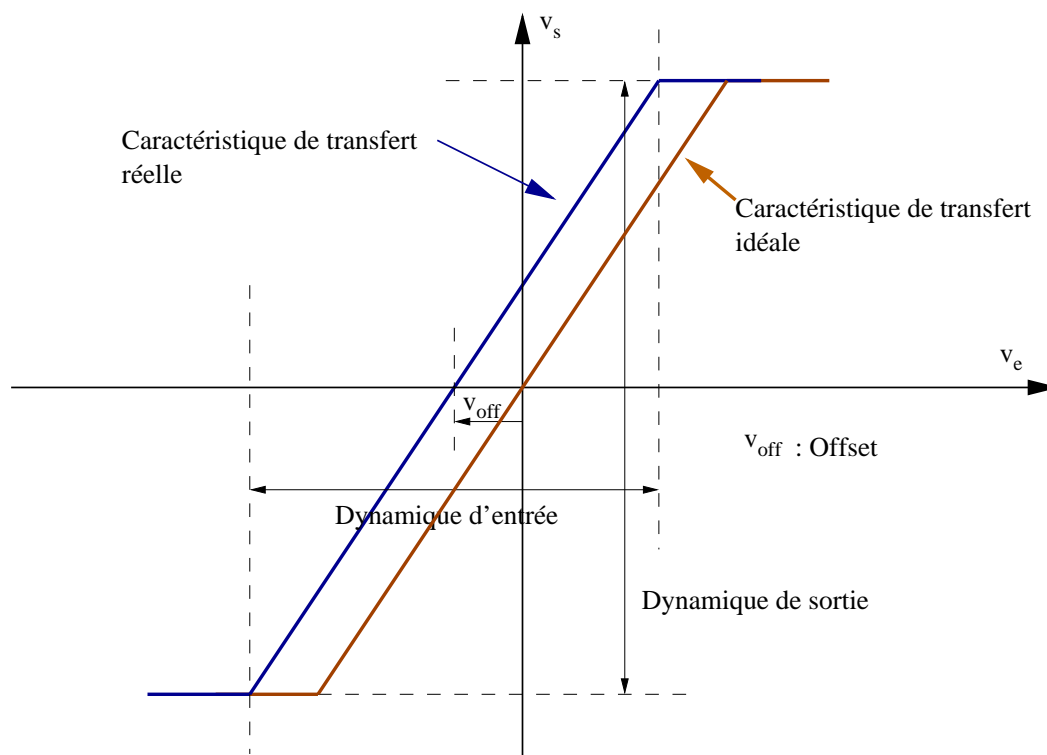


FIGURE 3.3 – Caractéristique de transfert de l'amplificateur

Vitesse de balayage (slew-rate)

Lorsque le signal d'entrée évolue trop rapidement, l'amplificateur n'est plus en régime linéaire. La vitesse maximale à laquelle sa sortie peut varier est alors limitée par une vitesse maximale appelée vitesse de balayage ou slew-rate. Physiquement, cette caractéristique non-linéaire correspond à la vitesse maximum à laquelle les différentes capacités présentes aux différents nœuds du dispositif actif peuvent être chargées ou déchargées. En général, la vitesse de balayage (slew-rate) est limitée par le temps nécessaire aux courants de polarisation des divers étages de l'amplificateur pour charger et décharger les capacités du circuit. Le slew-rate est donc constant (charge ou décharge d'une capacité à courant constant) et s'exprime en $V/\mu s$.

3.3.2 Caractéristiques petits signaux

En dehors du gain de l'amplificateur A_0 qui est un paramètre fondamental, les cellules amplificatrices ont un comportement en fonction de la fréquence qui se traduit par une chute de la courbe de réponse en fonction de la fréquence avec une pente mesurée en n fois 6 dB par octave de fréquence, au-delà d'une valeur particulière de la fréquence, valeur appelée fréquence de coupure à 3 dB.

La figure 3.4 présente le gain et le diagramme asymptotique de Bode du gain et la phase de la fonction de transfert d'un amplificateur en fonction de la fréquence. On voit que l'écart

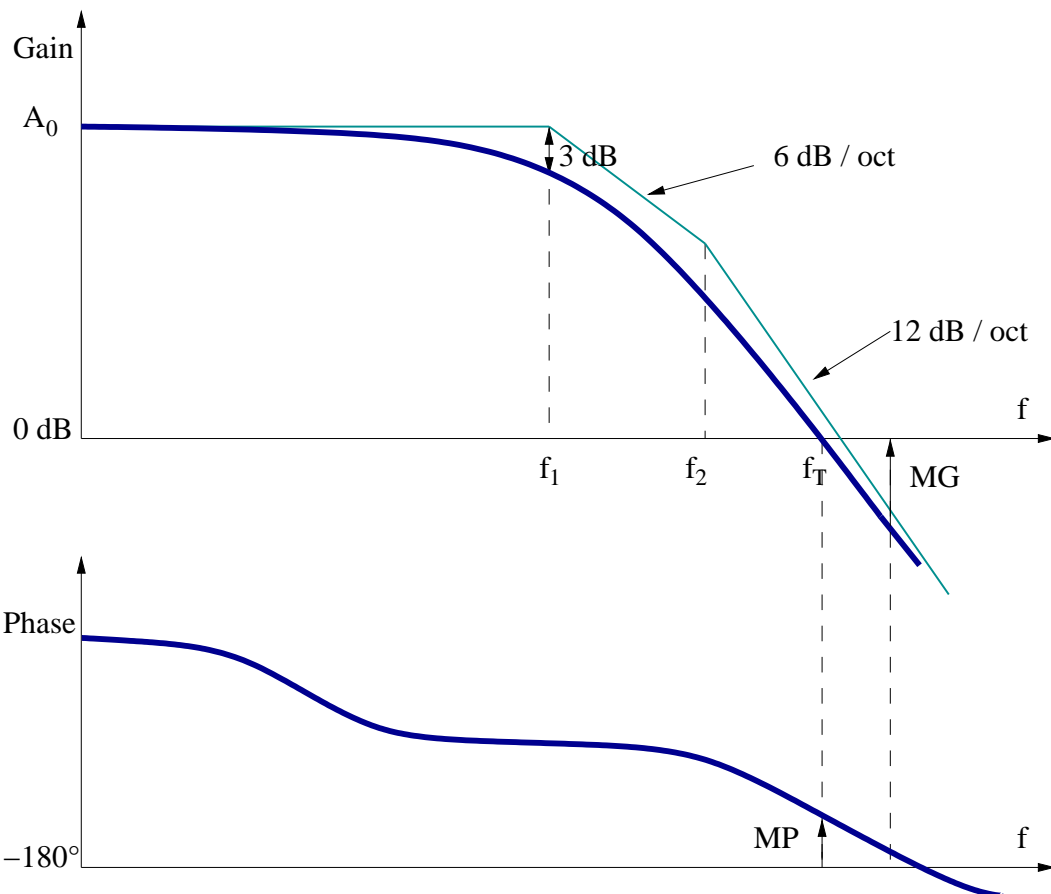


FIGURE 3.4 – Réponse en fréquences de l'amplificateur

entre l'approximation droite et la courbe réelle est de 3 dB pour la valeur f_1 de la fréquence. f_1 est donc ici égale à la fréquence de coupure f_c . La figure présente une courbe de réponse avec deux points de cassure appelés f_1 et f_2 . La région comprise entre f_1 et f_2 a une chute de 6 dB par octave, on dit que cette chute est d'ordre 1. La région au delà de f_2 a une chute

en 12 dB par octave, on dit que cette chute est d'ordre 2. Ainsi, l'ordre d'une courbe de réponse indique comment varie la courbe de réponse en fonction de la fréquence. Une courbe d'ordre n présente une région dont la pente sera de 6.n dB par octave ; L'approximation droite présentée ci-dessus est très utilisée dans la pratique.

A noter qu'en général, un amplificateur a une réponse en fréquence de type passe bande. L'amplificateur dont la réponse en fréquences est présentée dans la figure 3.4 est un cas particulier où il passe le continu (un amplificateur opérationnel par exemple).

Fréquence de transition

La fréquence de transition ou fréquence unitaire est la fréquence f_T pour laquelle le gain de l'amplificateur vaut 1 ou 0 dB.

Marge de gain (MG)

La marge de gain se définit par

$$MG = -Gain|_{dB} \Big|_{phase=-180^\circ}$$

Marge de phase (MP)

La marge de phase correspond au déphasage supplémentaire à retrancher au signal de sortie pour atteindre un déphasage de -180° à la fréquence de transition.

$$MP = Phase(f_T) + 180^\circ$$

La marge de gain et la marge de phase sont des paramètres qui mesurent le degré de stabilité de l'amplificateur en boucle fermée.

Produit gain-bande

Pour une cellule passe-bas ayant une chute de 6 dB par octave, la transmittance est de la forme :

$$A_v = A_{v0} \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

et si on utilise cette cellule à une fréquence $\omega \gg \omega_c$, alors, on a : $|A_v| \cdot \omega = A_{v0} \cdot \omega_c$.

Ainsi, le produit de la transmittance par la fréquence a l'allure d'une quantité constante, appelée produit gain-bande. Ce paramètre traduit la possibilité de transmittance maximum que peut fournir une structure amplificatrice pour une fréquence donnée.

Par exemple, une cellule de produit gain-bande de 10^6 ne pourra pas amplifier de plus de 10 un signal sinusoïdal de 100 KHz ; si le gain doit être supérieur à 10 pour ce signal, il faudra utiliser une autre cellule (de produit gain-bande de 10^7 par exemple) ou une structure multi-cellules.

Le produit gain-bande d'une cellule est, en quelque sorte, un paramètre marquant les possibilités maximales d'amplification de la cellule.

3.3.3 Distorsion et taux de distorsion harmonique

La distorsion signifie que le signal de sortie n'est plus la simple reproduction amplifiée d'un signal d'entrée, mais qu'il est déformé ou altéré, d'une façon ou d'une autre, par rapport au signal d'entrée. La distorsion peut provenir d'un grand nombre d'éléments de l'amplificateur.

La distorsion peut se produire à cause de la courbe caractéristique non linéaire de l'amplificateur : c'est la distorsion non linéaire ou harmonique. Théoriquement, un amplificateur fonctionne de la façon suivante :

$$V_s = \beta \cdot V_e$$

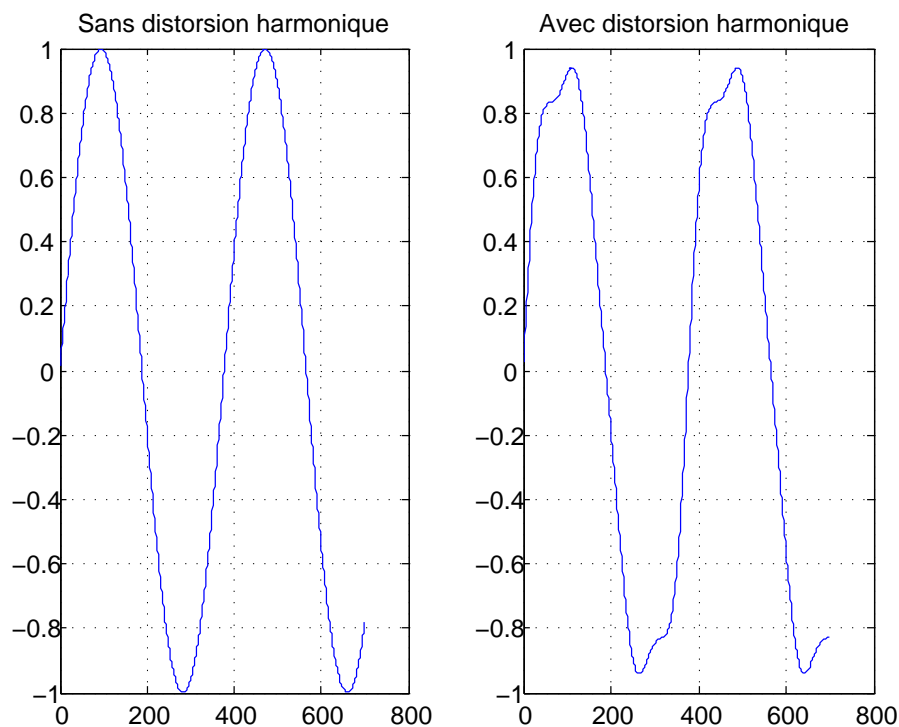


FIGURE 3.5 – Signaux de sortie d’un amplificateur sans et avec distorsion harmonique

Où V_e est l’amplitude du signal d’entrée, β le gain d’amplification, et V_s l’amplitude du signal de sortie. Malheureusement, les choses ne sont pas si simples, dans la réalité la fonction de transfert est plutôt :

$$V_s = \alpha + \beta \cdot V_e + \gamma \cdot V_e^2 + \delta \cdot V_e^3 + \dots$$

Où α est la composante continue (ou tension de décalage), β est le gain d’amplification souhaité, γ, δ, \dots sont des facteurs d’amplifications parasites. Ainsi, si V_e est un sinus, alors on retrouve à la sortie V_s non seulement le signal de départ, amplifié, de même fréquence que V_e mais aussi d’autres signaux parasites de fréquences multiples de la fréquence de V_e . Le signal de sortie est dit distordu.

$$V_s = A_0 + A_1 \cdot \sin\omega t + A_2 \cdot \sin 2\omega t + A_3 \cdot \sin 3\omega t + \dots$$

Une méthode d’explication de cette transformation du signal de sortie est l’analyse harmonique de Fourier ; celle-ci permet de décomposer tout signal périodique en plusieurs termes, à la fréquence fondamentale et à des multiples entiers de cette fréquence. Les composantes du signal périodique sont appelées composantes harmoniques ou simplement harmoniques. Ainsi, un signal peut présenter après distorsion une composante fondamentale, une composante à la deuxième harmonique, une composante à la troisième harmonique, etc.

La distorsion d’intermodulation est la distorsion produite lorsqu’un amplificateur traite plusieurs fréquences en entrée. Les produits de la distorsion d’intermodulation sont des multiples et sous-multiples complexes des signaux d’entrée.

La distorsion peut se produire également à cause de la saturation de l’amplificateur. Si l’amplitude du signal d’entrée est trop élevée, l’amplificateur ne peut plus suivre le signal d’entrée et bloque le signal de sortie à son niveau de saturation.

Un autre exemple de cause de la distorsion est le slew-rate de l’amplificateur. Comme indiqué précédemment, tous les amplificateurs ont une limite en fréquence : le slew-rate. Cela signifie que les amplificateurs ont une vitesse limitée, et que lorsque le signal d’entrée évolue

plus lentement que cette vitesse maximum, l'amplificateur suit et le signal de sortie amplifié reste fidèle au signal d'entrée. Mais lorsque la fréquence du signal d'entrée est trop élevée, l'amplificateur ne peut plus suivre et se cale à sa fréquence maximum.

Pour qualifier la distorsion harmonique d'un amplificateur pour une entrée sinusoïdale, on définit le taux de distorsion causée par chaque harmonique comme étant le rapport entre la valeur de l'harmonique et celle du fondamental et le taux total de distorsion harmonique comme étant le rapport en valeurs efficaces de l'ensemble des harmoniques sur celle du fondamental. Par exemple, le taux de distorsion harmonique causé par la deuxième harmonique et le taux total de distorsion harmonique sont donnés respectivement par :

$$TDH_2 = \left| \frac{A_2}{A_1} \right|$$

$$TDH = \frac{\sqrt{|A_2|^2 + |A_3|^2 + \dots}}{|A_1|}$$

En général, la principale composante de la distorsion est la deuxième harmonique. L'élimination de cette composante réduit considérablement la distorsion totale.

3.3.4 Autres caractéristiques

Beaucoup d'autres caractéristiques peuvent avoir une importance de premier plan dans certaines applications. Nous pouvons citer l'impédance d'entrée, l'impédance de sortie, le taux de réjection du mode commun pour les amplificateurs différentiels et le taux de réjection de l'alimentation. Nous aurions pu aussi citer la consommation, la charge maximale admissible.

3.4 Amplificateur différentiel

Un amplificateur différentiel est un amplificateur particulier qui amplifie non pas le signal d'entrée mais la différence entre ses deux signaux d'entrée. L'amplificateur doit éliminer le signal commun aux deux entrées afin d'amplifier seulement la différence, d'où le terme "différentiel".

On peut le représenter selon la figure 3.6. On dispose de deux entrées : l'entrée inverseuse

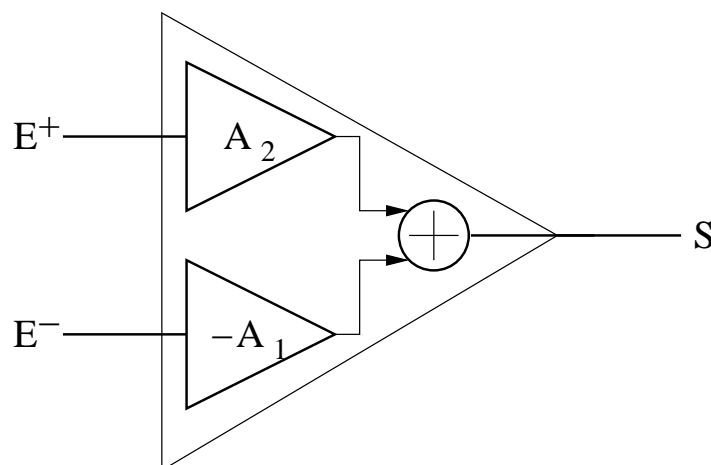


FIGURE 3.6 – Structure élémentaire de l'amplificateur différentiel

(E^-) de gain A_1 et l'entrée non-inverseuse (E^+) de gain A_2 . La sortie est un sommateur. Ainsi, la sortie s'écrit : $S = A_2E^+ - A_1E^-$.

En posant l'entrée en mode commun $E_c = \frac{E^+ + E^-}{2}$ et l'entrée différentielle $E_d = E^+ - E^-$, on peut écrire la sortie sous la forme :

$$S = A_d \cdot E_d + A_c \cdot E_c$$

Où A_d est le gain différentiel et A_c le gain de mode commun avec

$$A_d = \frac{A_1 + A_2}{2} \quad \text{et} \quad A_c = A_2 - A_1$$

En plus des caractéristiques présentées auparavant pour un amplificateur, on ajoute le taux de réjection en mode commun (TRMC) qui donne un autre indice de la performance d'un amplificateur différentiel.

$$TRMC = \frac{A_d}{A_c} \quad \text{et} \quad TRMC|_{dB} = 20 \cdot \log \left(\frac{A_d}{A_c} \right)$$

Ainsi, l'expression de la sortie d'un amplificateur différentiel s'écrit :

$$S = A_d \left(E_d + \frac{1}{TRMC} E_c \right)$$

3.5 Amplificateur opérationnel

L'amplificateur opérationnel doit son nom au fait qu'il a d'abord été conçu pour effectuer des opérations arithmétiques dans des calculateurs analogiques : addition, soustraction, résolution d'équations différentielles, ... Aujourd'hui, il est devenu le composant universel de l'électronique analogique grâce à sa facilité d'emploi et son faible coût. Ce circuit peut fonctionner aussi bien en régime linéaire (amplificateurs, filtres, ...) qu'en régime de commutation (comparateurs, générateurs de signaux carrés, ...).

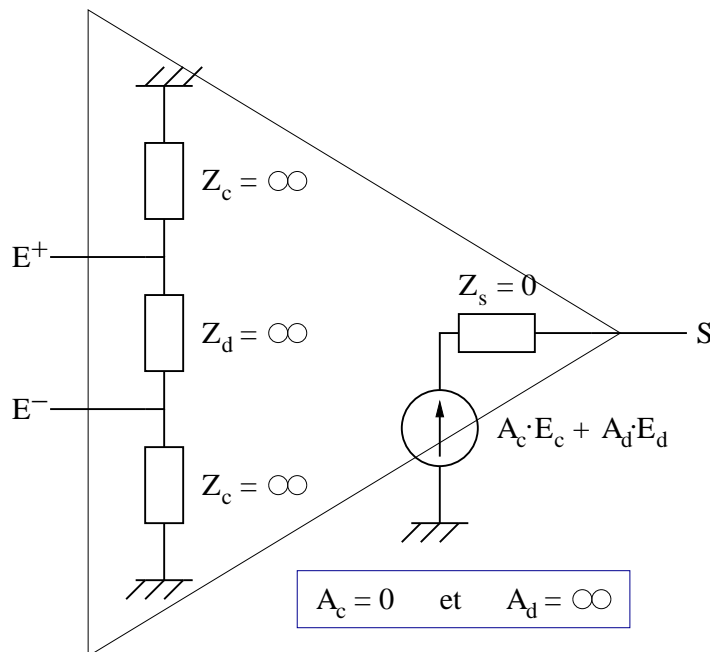


FIGURE 3.7 – Représentation de l'amplificateur opérationnel

L'amplificateur opérationnel est un amplificateur différentiel de très fort gain (gain infini idéalement). En d'autres termes, l'amplificateur opérationnel idéal est un système linéaire à

deux entrées et une sortie amplifiant infiniment la différence des signaux d'entrée et rejetant parfaitement leur somme. On peut le représenter selon la figure 3.7.

$$A_d = \infty \text{ et } S \text{ finie} \Rightarrow E_d = \epsilon = 0$$

D'autre part, ses impédances d'entrée (de mode commun Z_c et de mode différentiel Z_d) sont infinies; son impédance de sortie Z_s est nulle.

Les caractéristiques principales des amplificateurs opérationnels sont résumées dans le tableau suivant :

Propriété :	Cas idéal	Cas réel
Gain différentiel	infini	$> 10^4$
Impédance d'entrée	infinie	$> 10 \text{ M}\Omega$
Impédance de sortie	nulle	$< 500 \Omega$
Bande passante	infinie	$< 1 \text{ Ghz}$
Courants d'entrée	nul	$< 500\text{nA}$
Offset	nul	$< 10\text{mV}$
TRMC	infinie	$> 70 \text{ dB}$

TABLE 3.1 – Caractéristiques principales des amplificateurs opérationnels

3.6 La contre-réaction

3.6.1 Principe, schéma de base et propriété fondamentale

Considérons le schéma suivant :

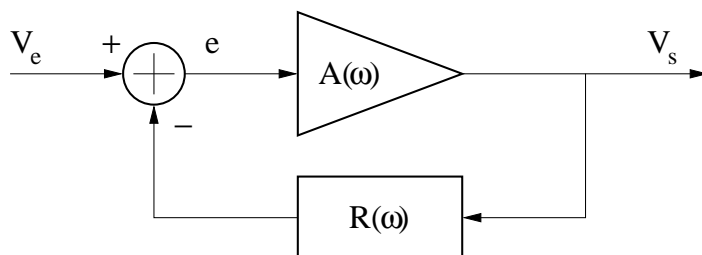


FIGURE 3.8 – Schéma de principe de la contre-réaction

Il est composé d'un amplificateur de transmittance $A(\omega)$, appelé dans ce cas présent chaîne directe, d'un circuit de transmittance $R(\omega)$, appelé chaîne de retour et d'un soustracteur de signaux.

Pour examiner plus en détail les propriétés de ce circuit bouclé, nous choisirons $A(\omega)$ et $R(\omega)$ idéaux et du type " gain en tension ".

A l'entrée du circuit bouclé, on applique une tension V_e . A la sortie de ce circuit bouclé, on a une tension V_s .

La tension e effective présente à l'entrée de $A(\omega)$ est :

$$e = V_e - R(\omega) \cdot V_s$$

Il est important de faire attention au signe moins dans cette équation. De plus on a :

$$V_s = A(\omega) \cdot e$$

On en déduit :

$$V_s = \frac{A(\omega)}{1 + A(\omega) \cdot R(\omega)} V_e$$

On appelle taux de contre-réaction la quantité :

$$1 + A(\omega) \cdot R(\omega)$$

Ces relations ci-dessus, tout à fait générales, se simplifient dans le cas particulier où le taux de contre-réaction est grand par rapport à l'unité ; dans ce cas particulier, la transmittance du circuit bouclé devient :

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{R(\omega)}$$

C'est l'inverse de la transmittance de la chaîne de retour. Sa valeur ne dépend pas de la valeur de $A(\omega)$, et des variations de $A(\omega)$ en fonction de divers facteurs, (dispersion des caractéristiques des éléments actifs de $A(\omega)$, dépendance de leurs valeurs vis-à-vis des variations de température, de la valeur de la tension d'alimentation, de la charge, ...), pourvu que le taux de contre-réaction reste grand devant l'unité.

En utilisant pour la chaîne de retour $R(\omega)$ des éléments passifs stables (résistances, capacités, inductances), on aura un circuit bouclé ayant lui aussi une transmittance fixée, reproductible, peu dépendante d'évolutions dues à l'environnement ou au vieillissement des composants actifs.

Ceci est la propriété fondamentale du circuit bouclé à contre-réaction.

Ces notions élémentaires sur les circuits bouclés à contre-réaction demandent à être précisées mais il est essentiel de retenir qu'un circuit bouclé à contre-réaction est une structure dans laquelle un signal dépendant du signal de sortie est retranché au signal appliqué à l'entrée et que le taux de contre-réaction est toujours grand devant l'unité, quel que soit le signal considéré et quelle que soit sa fréquence, son amplitude, etc.

3.6.2 Augmentation de la bande passante

Admettons que $A(\omega)$ soit une transmittance du premier ordre telle que :

$$A(\omega) = \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

avec A_0 le gain max et ω_c pulsation de coupure à 3 dB et que $R(\omega)$ soit indépendant de la pulsation ω ($R(\omega) = R$). Le circuit bouclé a pour transmittance :

$$A_r(\omega) = \frac{A(\omega)}{1 + R \cdot A(\omega)}$$

soit

$$A_r = \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \frac{1}{1 + R \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}} = \frac{A_0}{1 + R \cdot A_0} \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c(1 + R \cdot A_0)}}$$

ou donc

$$A_r = A_{rmax} \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega'_c}}$$

On reconnaît ainsi que le circuit bouclé a pour transmittance maximum

$$A_{rmax} = \frac{A_0}{1 + R \cdot A_0}$$

et que sa fréquence de coupure à 3 dB a pour valeur $\omega'_c = \omega_c \cdot (1 + R \cdot A_0)$, c'est-à-dire la fréquence de coupure de la transmittance $A(\omega)$ multipliée par le taux de contre-réaction.

On notera au passage que le produit gain-bande du circuit bouclé est le même que celui de la chaîne directe $A(\omega)$.

3.6.3 Diminution de la distorsion

La non linéarité d'une transmittance telle que $A(\omega)$ engendre en sortie la présence d'harmonique du signal d'entrée.

Cette distorsion apparaît surtout dans les étages de sortie de $A(\omega)$ et dépend de l'amplitude du signal dans ces étages. On compare ce qui se passe avec ou sans la contre-réaction.

On peut considérer qu'au niveau des étages de sortie de $A(\omega)$, on a une source de signaux parasites qui fournit un signal u . Sans contre-réaction, c'est cette tension qui apparaît.

Avec un circuit de retour, il y a, à l'entrée du circuit bouclé, réinjection d'une tension qui est amplifiée par la transmittance $A(\omega)$.

A cause des propriétés de la contre-réaction, la source de signaux parasites fournit un signal u' , différent de u qu'on détermine de la façon suivante :

u' est une somme du signal u engendré au niveau des étages de sortie de $A(\omega)$ et du signal qui a été transmis par la chaîne de retour et amplifié par $A(\omega)$.

La chaîne de retour donne le signal $R \cdot u'$ et l'amplificateur $A(\omega) \cdot R \cdot u'$; on a donc la relation :

$$u' = u + A(\omega) \cdot R \cdot u'$$

soit

$$u' = \frac{u}{1 + R \cdot A(\omega)}$$

Pour un même signal de sortie, l'amplitude harmonique due à la non linéarité est réduite de la valeur du taux de contre-réaction.

3.6.4 Notion de stabilité

La contre-réaction consiste en un couplage établi volontairement entre la sortie et l'entrée d'une transmittance $A(\omega)$, de telle sorte que le signal appliqué en retour se retranche du signal d'attaque. Or tout amplificateur introduit un déphasage des signaux de sortie par rapport aux signaux d'entrée. Il faut donc prendre garde que les rotations de phase introduites par $A(\omega)$ et $R(\omega)$ maintiennent toujours un fonctionnement en contre-réaction du circuit bouclé. Il faut donc examiner la stabilité du circuit bouclé, sachant qu'un circuit et plus généralement un système est dit stable si, écarté par une perturbation de sa position d'équilibre, il a tendance à y revenir.

Dans ce cas du circuit bouclé, les conditions d'instabilité sont exprimées par la relation :

$$1 + A(\omega) \cdot R(\omega) = 0$$

Si au moins une racine complexe de cette relation a une partie réelle positive ou nulle, alors le circuit bouclé sera instable car A_r aura tendance à avoir une valeur infinie.

3.7 Exercices

3.7.1 Décomposition harmonique et distorsion

On considère un montage d'un amplificateur élémentaire composé d'une source de courant commandée par la tension d'entrée V_e , d'une résistance ($R = 10k\Omega$) et d'une tension d'alimentation constante $V_{dd} = 3,3V$ (3.9). Le courant I_s est donné par :

$$I_s = K(V_e - V_T)^2$$

où $K = 500\mu A/V^2$ et $V_T = 0,7V$.

Nous appliquons un signal d'entrée $V_e = B + A\sin(\omega t)$, avec $A = 0,1V$ et $B = 1,65V$.

Question 3.7.1 Déterminer la décomposition harmonique (série de Fourier) du signal de sortie V_s , et en déduire le taux de distorsion harmonique de l'amplificateur.

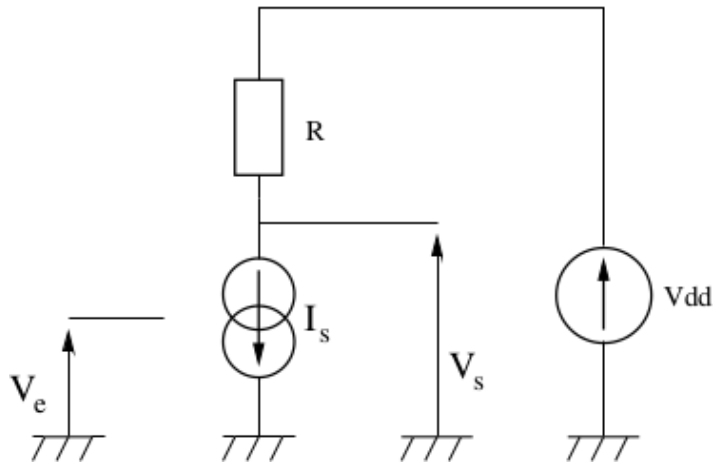


FIGURE 3.9 – Amplificateur élémentaire

3.7.2 Gain, bande passante et distorsion

A la réception d'un système audio, nous avons un signal faible d'amplitude maximum de 1mV et de 20 kHz de bande passante qui sera traité par la suite par un DSP. Ce signal sera d'abord amplifié et puis numérisé par un ADC de 8 bits avant de passer à l'entrée du DSP. La pleine échelle de l'ADC est 1V.

Question 3.7.2 *quels sont le gain et la bande passante de l'amplificateur ?*

Pour assurer une bonne qualité du traitement numérique du signal, le rapport signal sur bruit plus distorsion (SNDR) du signal à l'entrée du DSP doit être supérieur à 40 dB. Admettons que le SNDR de l'ADC soit 48 dB et que le bruit généré par l'amplificateur soit négligeable.

Question 3.7.3 *Quelle est la distorsion maximum admissible pour l'amplificateur ?*

3.7.3 Etude d'un amplificateur

On considère le circuit amplificateur de la figure 3.10

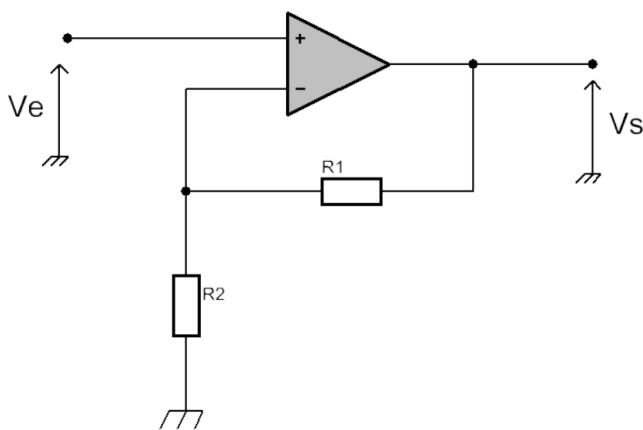


FIGURE 3.10 –

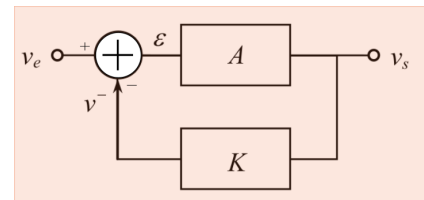


FIGURE 3.11 –

Question 3.7.4 *On suppose dans un premier temps l'AOP parfaitement idéal. Exprimer la fonction de transfert $H_o = V_s/V_e$ de l'amplificateur.*

Question 3.7.5 On suppose maintenant que le gain différentiel A de l'AOP est fini et donné par :

$$A(p) = \frac{A_o}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \quad \text{avec } \tau_1 \gg \tau_2$$

Montrer que le fonctionnement du circuit peut être représenté par le schéma fonctionnel de la figure 3.11. Déterminer K et exprimer le gain en boucle fermée $H = V_s/V_e$ en fonction de A et de K .

Question 3.7.6 Tracer les diagrammes de Bode asymptotique, puis « réel » (approché à main levée) du gain en boucle ouverte $G = v^-/\epsilon$, pour les deux cas : $\tau_2 \omega_T > 1$ et $\tau_2 \omega_T < 1$ où $f_T = \omega_T/2\pi$ est la fréquence de transition de l'AOP. On indiquera l'écart (en dB) entre les tracés des gains « réel » et asymptotique pour les points d'intérêt, ainsi que la marge de phase MP sur les diagrammes.

Question 3.7.7 Donner la condition pour assurer une marge de phase suffisante $MP \geq \pi/4$. En quoi cette condition a une relation avec la conservation du produit gain-bande ?

3.8 Bibliographie

- [1] M. Bouthier. *Electronique Analogique. Tome III : Opérateurs*. ENSTA, 1989.
- [2] J. Huijsing. *Operational Amplifiers : Theory and Design*. Springer International Publishing, 2017.
- [3] B. Razavi. *Design of Analog CMOS Integrated Circuits*. McGraw-Hill, 2002.
- [4] A. Sedra and K. Smith. *Circuits microélectroniques*. De Boeck supérieur, 2016.

Chapitre 4

Travaux pratiques : Amplification

4.1 Introduction Générale pour les Travaux Pratiques

Dans le cadre des TPs ESA, nous allons nous intéresser à la mise en oeuvre d'une banque d'effets musicaux qu'on appliquera à une guitare électrique.

- Dans le TP1, nous étudierons l'amplification. Cette fonction est nécessaire pour la numérisation du signal qu'on abordera dans le TP4 mais aussi en ajustant son gain, un amplificateur peut être utilisé pour générer un effet distorsion
- Dans le TP2, nous implémenterons un effet Tremolo à l'aide de circuits à capacités commutées.
- Le TP3 sera consacré à la fonction filtrage. Nous réaliserons un filtre passe bande flexible contrôlé, élément de base pour la mise en oeuvre de l'effet Wahwah.
- Dans le TP4, nous changerons de monde pour passer à des effets numériques (Octaver, Echo ...) . Ce passage nécessitera bien évidemment une conception et un dimensionnement appropriés du convertisseur analogique numérique.

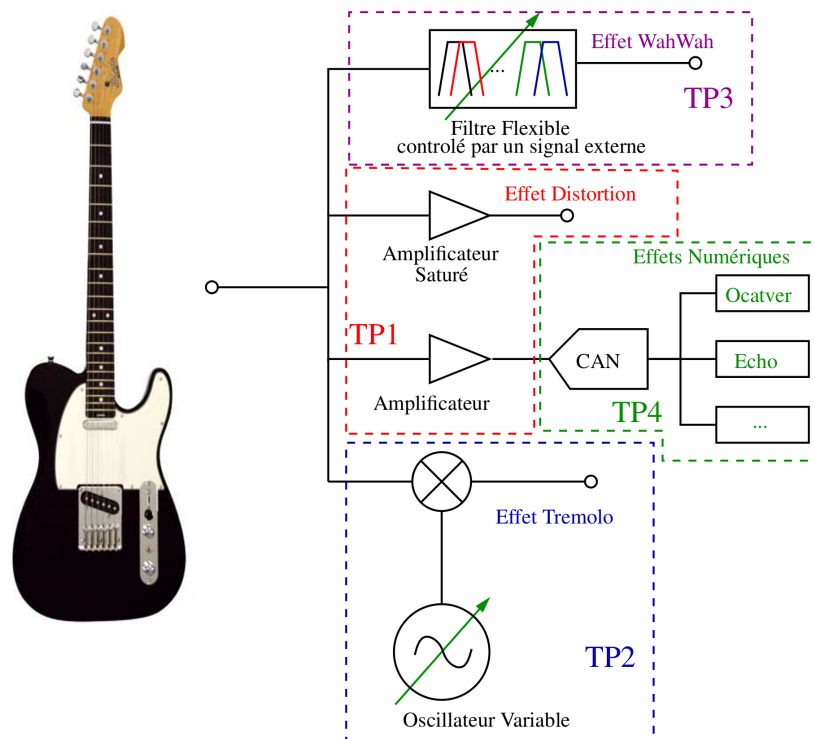


FIGURE 4.1 – Effets musicaux sur la guitare électrique

4.2 Introduction TP amplification

L'objectif de ce premier TP est de concevoir l'amplificateur de la chaîne de numérisation du signal issu de la guitare électrique. Nous étudierons également l'implémentation de l'effet distorsion en s'appuyant sur la même architecture d'amplificateur.

Le signal issu de la guitare a une dynamique de ± 250 mV avec une tension moyenne nulle. Fréquemment, ce signal pourrait avoir des composantes sur un spectre allant de 50 Hz à 20 KHz. Le convertisseur analogique numérique (CAN) a une dynamique de 0 à 4 V. Afin de maximiser les performances du CAN, il est nécessaire que le signal à son entrée occupe toute la dynamique sans la dépasser pour éviter la saturation. Le fonctionnement du CAN sera étudié en détails dans le chapitre 9.

L'architecture choisie est l'amplificateur composé d'un transistor et d'une résistance étudié en cours. L'amplificateur est illustré dans la figure 4.2.

4.3 Analyse statique

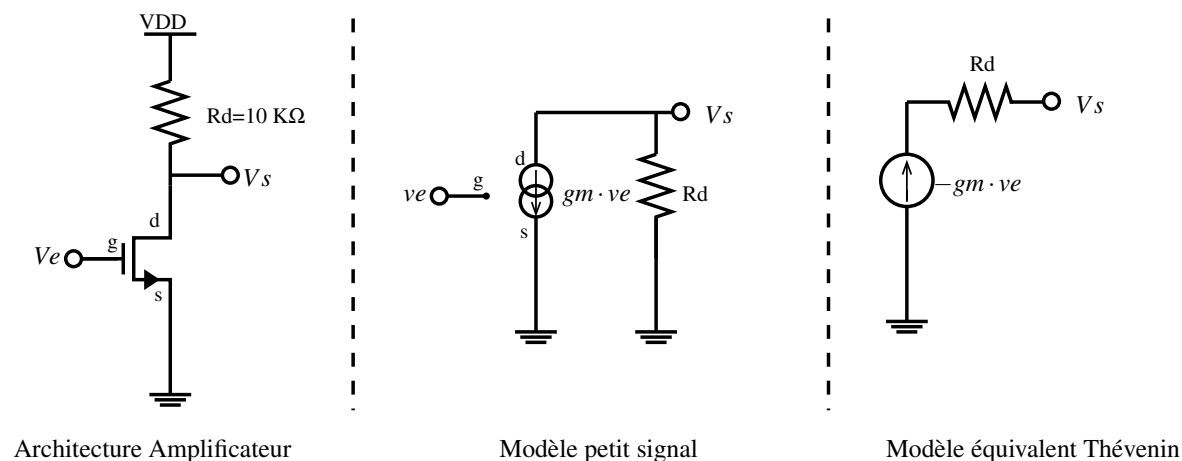


FIGURE 4.2 – Montage pour la mesure de la fonction de transfert

Pour réaliser le montage, nous utiliserons le circuit intégré CD4007 se trouvant sur la partie supérieure de votre maquette. La grille est connectée au connecteur 6, la source au connecteur 7 et le drain au connecteur 14.

Afin de vérifier que le gain et les dynamiques d'entrée et de sortie de l'amplificateur répondent aux besoins de notre chaîne, nous allons tracer la fonction de transfert du montage $V_s = f(V_e)$. Pour réaliser cette opération rapidement sans faire varier la tension d'entrée V_e à la main, l'approche la plus simple est d'appliquer un signal triangulaire faible fréquence à l'entrée de l'amplificateur et l'utiliser pour tracer la courbe $V_s = f(V_e)$ en s'appuyant sur le mode xy¹ est de l'oscilloscope. Pour cela, il est nécessaire de connecter l'entrée à la première voie de l'oscilloscope et la sortie à la deuxième. Pour le signal d'entrée, nous réglerons la fréquence à 100 Hz, la tension crête-crête (ou peak-peak V_{pp}) à 5 V et la tension moyenne (ou offset) à 2.5 V (afin de couvrir la plage de tension allant de la 0 à Vdd).

Question 4.3.1 Relever à l'oscilloscope la courbe $V_s = f(V_e)$ du circuit de la figure 4.2. Déterminer la zone de fonctionnement du transistor où le montage considéré est un amplificateur de tension ($V_s - V_{s0} = G \cdot (V_e - V_{e0})$ où V_{e0} et V_{s0} sont des tensions constantes).

1. Pour accéder au mode xy, appuyez sur le bouton avec les 6 carrés en bas à droite de l'oscilloscope

Question 4.3.2 Afin de solliciter toute la dynamique d'entrée d'une façon symétrique, nous choisissons de fixer V_{s0} à 2 V. Pour cette valeur, déterminer le gain, la dynamique d'entrée et la dynamique de sortie de l'amplificateur. Discuter si l'amplificateur est adapté pour notre application.

Le signal issu de la guitare étant centré autour de la masse, il ne peut pas être appliqué directement à l'entrée de l'amplificateur. Il est nécessaire de changer sa tension moyenne. Pour réaliser cette opération, nous proposons de rajouter le circuit composé par les résistances R_1 , R_2 et C à notre amplificateur voir illustré dans la figure 4.3.

Question 4.3.3 Quelle est la fonction fréquentielle réalisée par ce montage $HPF(j\omega) = \frac{v_g(j\omega)}{v_e(j\omega)}$?

Question 4.3.4 Compléter votre montage en rajoutant les composants R_1 , R_2 et C . Déconnecter ou désactiver l'entrée du générateur faible fréquence. Régler le potentiomètre R_2 afin d'obtenir une tension de sortie $V_s = 2V$. Relever la valeur de R_2 à l'aide de l'ohmmètre.

Question 4.3.5 Au vu des valeurs choisies pour R_1 , R_2 et C_1 , est ce que l'ajout de ce montage pourrait poser problème pour l'application visée ? Si oui, comment peut-on pallier ce problème ?

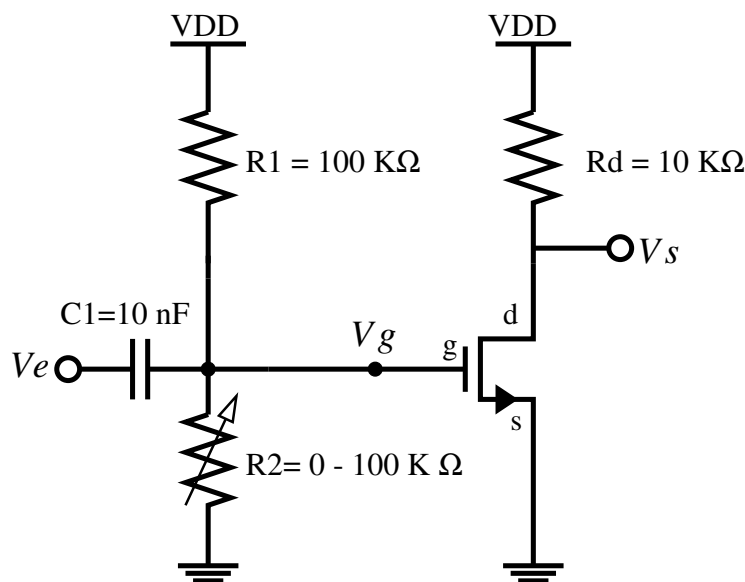


FIGURE 4.3 – Montage amplificateur avec réseau d'entrée

4.4 Analyse petit signal

Nous allons passer à présent à l'analyse fréquentielle de notre amplificateur. Pour cette opération, nous utiliserons un signal avec une faible amplitude de 100 mVpp et une fréquence de 5 KHz. Pour l'offset, sa valeur n'a pas d'impact sur le fonctionnement de l'amplificateur vu que le montage R_1 - R_2 - C permet de la supprimer.

Question 4.4.1 Mesurer le gain $G_0 = v_s/v_e$, comparer à la valeur obtenue avec l'analyse statique.

2. Pour faire cette analyse petit signal, vous pouvez connecter toutes les tensions continues à la masse.

Question 4.4.2 *Faites varier la fréquence du signal v_e pour déterminer la fréquence de coupure basse f_c^b et la fréquence de coupure haute f_c^h (les fréquences pour lesquelles le gain en tension vaut $G_0/\sqrt{2}$). Vérifier que f_c^b est en concordance avec le calcul théorique de la question 4.3.3.*

Question 4.4.3 *Calculer le produit gain-bande ($PGB = G_0 \cdot f_c^h$).*

Question 4.4.4 *Déterminer la fréquence de transition. La comparer avec le produit gain-bande.*

4.5 Et si on jouait de la guitare

Pour évaluer la qualité du signal à la sortie de l'amplificateur, nous souhaitons l'écouter. Pour cela, nous allons utiliser les 2 sorties BNC S3 et S4 pour connecter le signal de sortie à la fois à des écouteurs et à l'oscilloscope. Les écouteurs peuvent être modélisés par une résistance de 4 à 10 Ω . Dans un premier lieu, nous garderons en signal d'entrée une sinusoïde de 5 KHz d'amplitude 100 mVpp.

Question 4.5.1 *En observant l'oscilloscope, que se passe-t-il quand nous branchons les écouteurs ?*

Conseil : Appuyez vous sur le modèle équivalent Thévenin de l'amplificateur pour votre analyse en comparant le gain sans et avec écouteurs.

Pour pallier ce problème, nous utilisons un circuit pilote (ou driver) audio qui a la particularité d'avoir une impédance d'entrée extrêmement élevée et un étage de sortie qui permet de charger des faibles impédances comme celle des écouteurs.

Question 4.5.2 *Brancher le driver audio, commencer par observer le sortie avec un signal issu du générateur, puis passer à un signal issu de la guitare³.*

Un effet musical très utilisé parmi les guitaristes est la distorsion qu'on peut obtenir en saturant la sortie de la guitare. Pour cela, nous allons augmenter le gain de notre amplificateur en remplaçant la résistance R_d par une résistance de 100 K Ω

Question 4.5.3 *Modifier la résistance R_d , ajuster la valeur de R_2 pour ramener la composante continue V_{s0} à 2 V. Jouez et faites ressortir le David Gilmour qui est en vous.*

3. Si vous êtes pas à l'aise avec une guitare, vous pouvez utiliser le signal audio pré-enregistré sur le générateur. Pour ce faire, aller dans le mode *Arb* \rightarrow *Arb Waveform Menu* \rightarrow *user1*. Fixer la période à 5.7 secondes.

Chapitre 5

Electronique analogique à temps discret

5.1 Historique

La première publication connue sur les signaux analogiques échantillonnés se trouve dans "Treatise on Electricity and magnetism" de James Clerk MAXWELL en 1873. La théorie sur les signaux analogiques échantillonnés a ensuite été développée dans les années 1950 [6].

A partir de 1970, plusieurs schémas utilisant des commutateurs et des capacités pour simuler des filtres sont proposés ([3], [4]). Notamment, FRIED montre que, sous certaines conditions, il y a équivalence entre une capacité commutée et une résistance (FIGURE 5.1a). Le schéma de la FIGURE 5.1b est aussi décrit.

La technologie bipolaire, seule disponible à l'époque, n'a pas permis de gros développement. A la fin des années 1970 et durant les années 80, de nombreuses recherches aboutissent, notamment, à la réalisation de filtres analogiques échantillonnés grâce à l'évolution de la technologie MOS. Ces applications ont été rapidement suivies par un développement plus général de circuits de traitement de signal analogique.

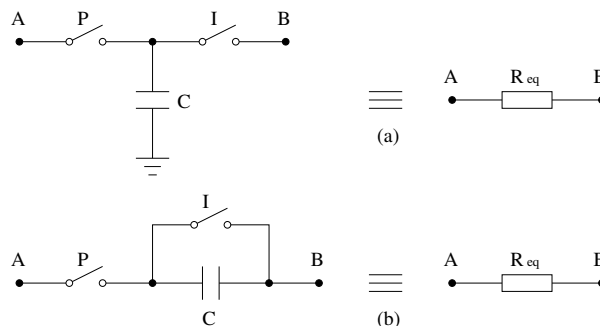


FIGURE 5.1 – (a) Equivalence de Fried ; (b) Capacité commutée série

La *technique des capacités commutées* est aujourd'hui très largement utilisée pour l'intégration des fonctions analogiques en temps discret. cette technique a permis un gain très important en densité d'intégration et en exactitude des caractéristiques des fonctions réalisées. Cette technique couvre tous les domaines d'applications dès lors que la fréquence du signal est compatible avec les possibilités d'échantillonnage de la technologie d'intégration.

5.2 Analogie entre capacité commutée et résistance

Considérons le circuit de la FIGURE 5.1a, où V_A et V_B sont les tensions supposées constantes aux noeuds A et B. Nous analysons le comportement de ce circuit en étudiant le transfert de

charge.

Nous formulons les hypothèses suivantes :

- Les commutateurs sont considérés comme parfaits : pas de capacité parasite, la résistance est nulle lorsque le commutateur est fermé et infinie lorsqu'il est ouvert.
- Les condensateurs sont considérés comme parfaits : pas de capacité parasite, pas de courant de fuite.

Les signaux d'horloges paire (P) et impaire (I), commandant respectivement les commutateurs pair (P) et impair (I), ont une période T_e et sont décalés de $T_e/2$. Pendant chaque période d'horloge, la capacité C est chargée et puis déchargée. Par conséquent, la différence de charge pendant une période d'horloge, ΔQ , transférée du noeud A au noeud B, est donnée par

$$\Delta Q = C(V_A - V_B). \quad ([1])$$

Puisque le transfert de charge est répété à chaque période d'horloge, le courant moyen dû à ce transfert de charge est donné par :

$$I_{moy} = \frac{C(V_A - V_B)}{T_e}. \quad ([2])$$

Le courant traversant la résistance équivalente R_{eq} est donné par :

$$I_{eq} = \frac{V_A - V_B}{R_{eq}}. \quad ([3])$$

Nous constatons que le courant traversant le circuit à capacités commutées est égal à celui du circuit de la résistance équivalente à condition que :

$$R_{eq} = \frac{T_e}{C} = \frac{1}{Cf_e}. \quad ([4])$$

L'équivalence entre R et $\frac{1}{Cf_e}$ est démontrée plus en détail dans l'étude du passe-bas du premier ordre.

5.3 Etude du passe-bas du premier ordre

Le schéma de la FIGURE 5.2 montre un circuit passif (c'est-à-dire sans composant de type transistor) de filtrage passe-bas du premier ordre, composé d'une résistance et d'une capacité (voir le Chapitre 7 sur le filtrage).

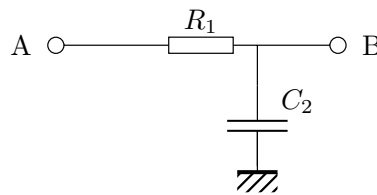


FIGURE 5.2 – Circuit passif de filtrage passe-bas du premier ordre

La réponse en fréquence d'un tel circuit est donné par l'équation :

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad ([5])$$

ou encore :

$$T(f) = \frac{1}{1 + j2\pi RCf} \quad ([6])$$

Le schéma de la FIGURE 5.3 montre un circuit de filtrage passe-bas du premier ordre à capacités commutées. Les commutateurs et les condensateurs sont considérés comme parfaits. Les signaux d'horloges paire (P) et impaire (I), commandant respectivement les commutateurs pair (P) et impaire (I), ont une période T_e et sont décalés de $T_e/2$.

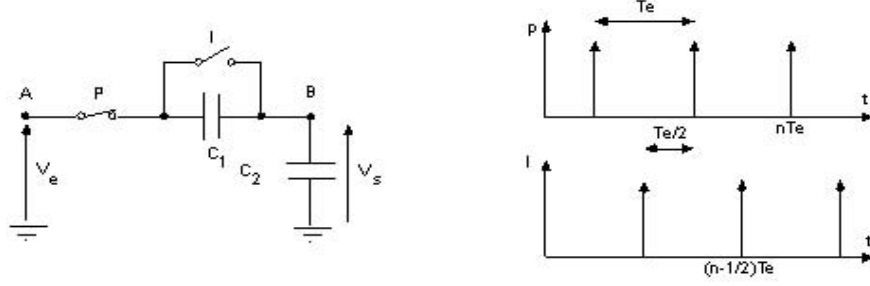


FIGURE 5.3 – Passe-bas du premier ordre et signaux de commande

Nous allons montrer que, en imposant une condition supplémentaire, ce circuit à capacités commutées est équivalent au circuit passif du premier ordre décrit précédemment.

Les conditions initialement imposées font qu'à chaque phase (paire ou impaire) correspond un transfert de charge instantané. Un bilan des charges des capacités (prises sur le noeud B) à ces instants particuliers donne :

$$\begin{aligned}
 \text{Instants pairs : } t = n \cdot T_e & & \text{Instants impairs : } t = (n - 1/2) \cdot T_e \\
 Q_{C_1}^P(nT_e) = C_1 \cdot (V_s^P(nT_e) - V_e^P(nT_e)) & & Q_{C_1}^I((n - 1/2)T_e) = 0 \\
 Q_{C_2}^P(nT_e) = C_2 \cdot V_s^P(nT_e) & & Q_{C_2}^I((n - 1/2)T_e) = C_2 \cdot V_s^I((n - 1/2)T_e)
 \end{aligned} \tag{7}$$

Nous pouvons vérifier qu'il n'y a pas de mouvement de charges dans le circuit entre les instants de commutation (interphase), tous les commutateurs étant ouverts. Autrement dit, toute charge contenue à l'intérieur d'une sous-partie isolée du circuit a nécessairement été acquise à la phase précédente.

En phase paire, le noeud B est isolé, c'est-à-dire qu'aucun transfert de charge n'est possible avec une source de courant ou de tension. L'application du principe de conservation de la charge aux instants pairs pour les deux capacités en série permet d'écrire :

$$Q_{C_1}^P(nT_e) + Q_{C_2}^P(nT_e) = Q_{C_1}^I((n - 1/2)T_e) + Q_{C_2}^I((n - 1/2)T_e). \tag{8}$$

La capacité C_2 est isolée aux instants impairs, d'où :

$$Q_{C_2}^I((n - 1/2)T_e) = Q_{C_2}^P((n - 1)T_e). \tag{9}$$

En combinant les deux équation précédentes, nous obtenons l'équation aux différences finies :

$$(C_1 + C_2) \cdot V_s^P(n) - C_2 \cdot V_s^P(n - 1) = C_1 \cdot V_e^P(n). \tag{10}$$

Notation : $V_s^P(n)$ est la tension de sortie à l'instant pair $(n \cdot T_e)$.

Les équations ci-dessus font référence aux tensions V_e et V_s à des instants discrets multiples de $T_e/2$. L'application de la transformation en z sur ces équations donne les fonctions de transfert en z :

$$\begin{aligned}
 T_{11}(z) &= \frac{V_s^P(z)}{V_e^P(z)} = \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_1}(1 - z^{-1})}, & T_{21}(z) &= \frac{V_s^I(z)}{V_e^P(z)} = \frac{z^{-1/2}}{1 + \frac{C_2}{C_1}(1 - z^{-1})}, \\
 T_{12}(z) &= \frac{V_s^P(z)}{V_e^I(z)} = 0, & T_{22}(z) &= \frac{V_s^I(z)}{V_e^I(z)} = 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Il existe donc plusieurs fonctions de transferts, selon les instants considérés pour le signal d'entrée et le signal de sortie.

La réponse en fréquence du circuit est donnée pour $z = e^{j\omega T_e}$, la sortie étant bloquée durant T_e . On en déduit :

$$\frac{S(\omega)}{E(\omega)} = e^{-j\frac{\pi f}{f_e}} \text{sinc}\left(\frac{\pi f}{f_e}\right) \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_1}(1 - e^{-j\omega T_e})}. \quad ([12])$$

Il vient :

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_1} \frac{j\omega}{f_e}}. \quad ([13])$$

avec la condition $\frac{f}{f_e} \ll 1$.

En comparant cette fonction de transfert et celle obtenue dans le cas d'un circuit passif $R.C$, nous constatons bien l'équivalence entre : R_1 et $\frac{1}{C_1 f_e}$, dès lors que $\frac{f}{f_e} \ll 1$.

5.4 Intérêts et contraintes liés à la technologie MOS ou CMOS

5.4.1 Intérêts

Exactitude des rapports capacitifs

La technologie MOS permet de réaliser des capacités de bonne qualité. Elles sont peu exactes en valeurs absolues (par exemple dans une technologie 65 nm, elles sont environ de 20%). Par contre, le rapport de capacités peut être obtenu avec une exactitude de 0,1 à 1%, d'où une bonne précision sur les fonctions de transfert (constantes de temps, gains, etc.), sans calibrage, dans la mesure où les coefficients sont définis par des rapports de capacités.

La valeur absolue des capacités n'intervenant pas directement dans la fonction de transfert (cette valeur influe sur l'exactitude des valeurs des coefficients en pratique), celles-ci peuvent être choisies très petites. Des capacités de quelques centaines de femtoFarad sont couramment utilisées.

Emulation de comportements résistifs

Comme nous l'avons vu, une capacité commutée peut émuler un comportement résistif dès lors que la fréquence d'échantillonnage est très supérieure à la fréquence maximale du signal et que les commutateurs et la capacités sont idéaux.

Possibilités de configuration

La valeur de la résistance émulée dans les circuits à capacité commutées dépend de la fréquence d'échantillonnage. Cette propriété permet d'opérer des reconfigurations rapides sur ce type de systèmes. Ceci est important pour de nombreuses applications où la reconfiguration de l'interface d'acquisition est nécessaire (communications mobiles multistandards, calibrage d'interfaces pour l'instrumentation).

Avancée technologique

La technique des capacités commutées profite des avancées de la technologie CMOS. En fait, la diminution des tailles des transistors entraîne une diminution de la taille des capacités parasites des commutateurs. Ceci permet d'améliorer les performances et de réduire la consommation de puissance nécessaire pour piloter ces commutateurs.

5.4.2 Contraintes

Les différentes imperfections liées aux éléments constituant les circuits à capacités commutées imposent des limites sur les performances obtenues.

Les commutateurs

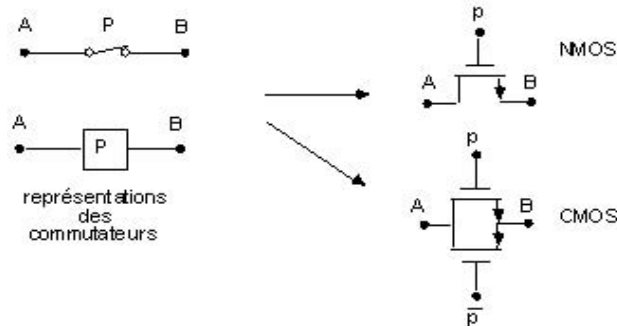


FIGURE 5.4 – Symboles et réalisations des commutateurs

Le comportement idéal du commutateur pourrait se résumer à une impédance infinie quand il est ouvert ou Off et une impédance nulle quand il est fermé ou On. Cependant en pratique, en position ouverte, l'impédance des commutateurs n'est pas infinie notamment à cause des capacités parasites des transistors MOS. Ces capacités engendrent des courants de fuite surtout en haute fréquence. Ces courants modifient la charge stockée sur la capacité et peuvent ainsi dégrader les performances du système notamment sa linéarité.

En position fermée, les commutateurs doivent avoir une impédance nulle. Cependant en pratique, ils présentent une résistance R_{on} d'environ 10 à 1k Ω . La valeur de cette résistance est notamment fixée par la taille des transistors MOS formant le commutateur. En fait, réduire la résistance du transistor MOS nécessite une augmentation de sa largeur W , ceci se paie par une augmentation de la surface, de la consommation et des capacités parasites.

En pratique, le choix de l'architecture du commutateur et de la taille des transistors le composant est un compromis entre ses performances dans les modes fermé et ouvert, la consommation de puissance nécessaire pour le piloter et la surface ainsi que d'autres aspects qui ne seront pas traités dans ce cours tels que la dépendance entre R_{on} et le signal d'entrée et l'injection de charges lors de l'ouverture et de la fermeture.

Les amplificateurs opérationnels

Le désavantage principal des circuits à capacités commutées est qu'ils augmentent les contraintes sur les amplificateurs opérationnels comparés aux circuits temps continu. D'une manière qualitative, il est possible de comprendre ce problème en comparant le pourcentage de temps donné à la charge et décharge de la capacité utile dans les deux types de circuits. En effet, dans les circuits temps continu, la charge de la capacité se fait d'une manière continue. Cependant dans un circuit à capacités commutées, ce pourcentage est souvent de l'ordre de 50%. Ceci augmente les contraintes sur les amplificateurs opérationnels en terme de produit gain bande et en terme de Slew Rate et se traduit ainsi par une augmentation de la consommation de puissance.

5.5 Applications

Le filtrage analogique et la conversion ont constitué les premières applications des circuits à capacités commutées. Puis d'autres applications ont été développées. La facilité d'implantation en technologie MOS rend cette technique attractive. Le concepteur de systèmes de

traitement du signal peut choisir entre l'approche tout analogique, tout numérique ou mixte et ainsi optimiser les performances et la surface pour une application donnée.

Des exemples de circuits à capacités commutées pour le filtrage sont présentées dans le chapitre 7 et pour la conversion analogique-numérique dans le chapitre 9. Les capacités commutées peuvent également servir à bien d'autres fonctions : amplification, redressement d'un signal, détection de crête, etc.

5.6 Exercices

5.6.1 Exercice 1

Soit le circuit de la FIGURE 5.5.

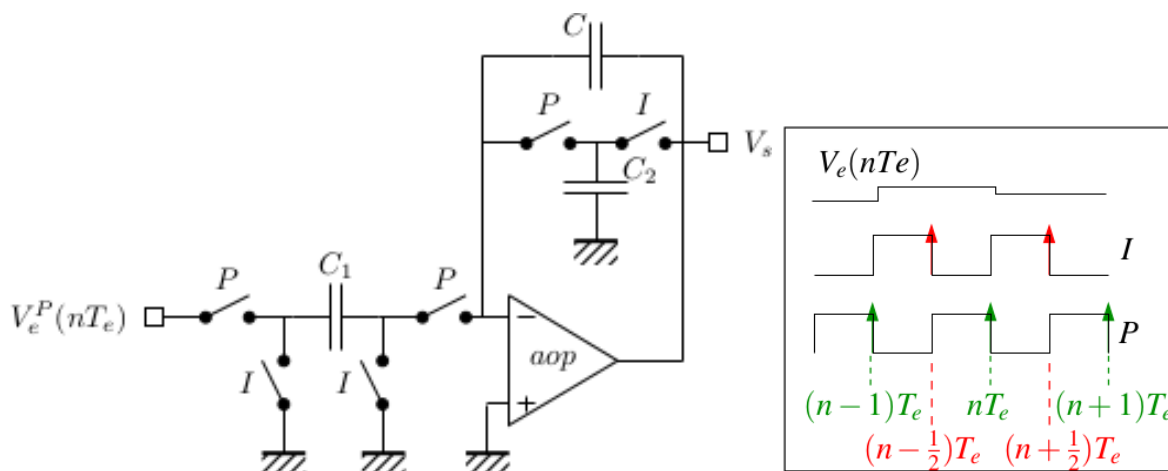


FIGURE 5.5 – Exercice 1 : circuits à capacités commutées

L'amplificateur opérationnel, les commutateurs et les condensateurs sont parfaits (les transferts de charge sont instantanés). L'entrée V_e est bloquée sur les instants pairs. Ceci se traduit par $V_e(nT_e - 0.5T_e) = V_e(nT_e - T_e)$.

Question 5.6.1.1 La sortie V_s étant considérée aux instants pairs (instant nT_e), calculer la fonction de transfert du circuit à capacités commutées.

On pose $C = C_2$.

Question 5.6.1.2 Quelle est la fonction réalisée ?

5.6.2 Exercice 2

Soit le circuit de la FIGURE 5.6.

L'amplificateur opérationnel, les commutateurs et les condensateurs sont parfaits (les transferts de charges sont instantanés). L'entrée V_e est bloquée sur les instants pairs. Ceci se traduit par $V_e(nT_e - 0.5T_e) = V_e(nT_e - T_e)$.

Question 5.6.2.1 La sortie V_s étant considérée aux instants pairs (indités P), calculer la fonction de transfert du circuit à capacités commutées.

On pose $C_1 = C_2$.

Question 5.6.2.2 Quelle est la fonction réalisée.

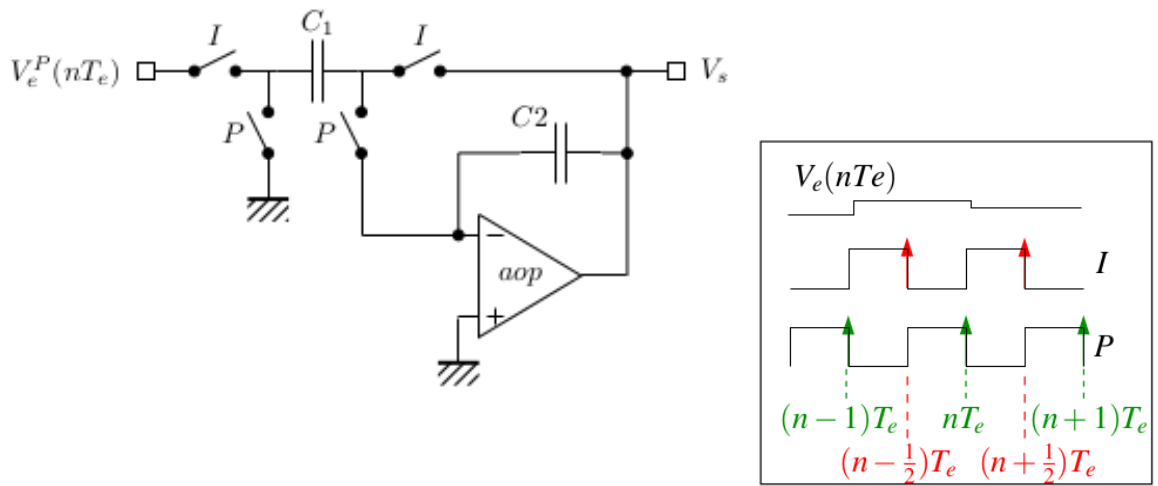


FIGURE 5.6 – Exercice 2 : circuits à capacités commutées

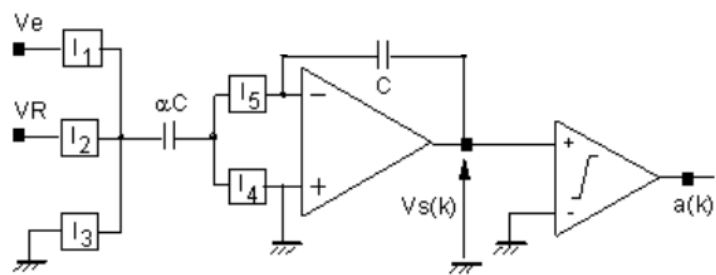


FIGURE 5.7 – Exercice 3 : circuits à capacités commutées

5.6.3 Exercice 3

Soit le circuit de la FIGURE 5.7. Chaque cycle est composée de 4 phases représentées sur la FIGURE 5.8. VR est une tension de référence continue, l'entrée V_e est bloquée pendant tout le cycle. Ceci se traduit par $V_e^4(k) = V_e^3(k) = V_e^2(k) = V_e^1(k)$.

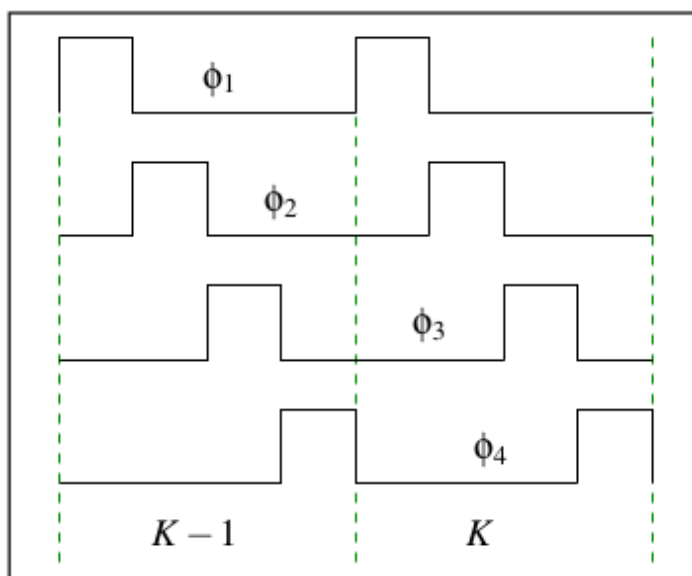


FIGURE 5.8 – Chronogramme des phases

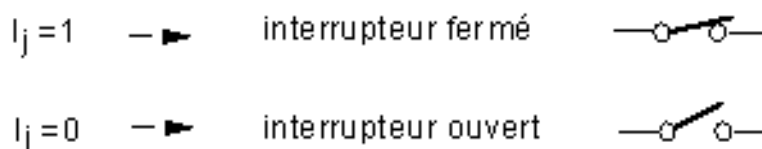
La commande des interrupteurs est donnée dans les tableaux ci-après.

On note $V_s^i(k)$ la tension de sortie de l'amplificateur opérationnel à la fin de la phase Φ_i et $V_s(k)$ la tension en fin de cycle k ($V_s(k) = V_s^4(k)$).

$a(k)$ est un élément binaire associé à la tension de sortie $V_s^2(k)$ tel que :

- $a(k) = 1$ si $V_s^2(k) > 0$;
- $a(k) = 0$ si $V_s^2(k) < 0$.

A chaque interrupteur est associée une variable binaire I_j telle que :



	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	$a = 0$	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	$a = 1$	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
ϕ_1	1	0	0	1	0	ϕ_3	0	1	0	1	0	ϕ_3	0	0	1	1	0
ϕ_2	0	0	1	0	1	ϕ_4	0	0	1	0	1	ϕ_4	0	1	0	0	1

TABLE 5.1 – Commande des interrupteurs

Question 5.6.3.1 Montrer par une analyse du circuit dans les 4 phases que l'on a les relations de récurrence :

$$V_s^2(k) = V_s(k-1) + \alpha V_e(k)$$

$$V_s(k) = V_s^4(k) = V_s^2(k) - \alpha \cdot VR \cdot (a(k) - \bar{a}(k))$$

Ce montage est le bloc de base d'un convertisseur analogique numérique. Il sera étudié en détails dans le chapitre 9.

5.6.4 Exercice 4 : Biquad à capacités commutées

L'amplificateur opérationnel, les commutateurs et les condensateurs sont parfaits (les transferts de charges sont instantanés). L'entrée V_i est bloquée sur les instants pairs. Ceci se traduit par $V_i(nT_e - 0.5T_e) = V_i(nT_e - T_e)$.

Définition d'un module de base

Question 5.6.4.1 Déterminer les opérations " temps discret " réalisées par le module à capacités commutées (FIGURE 5.9).

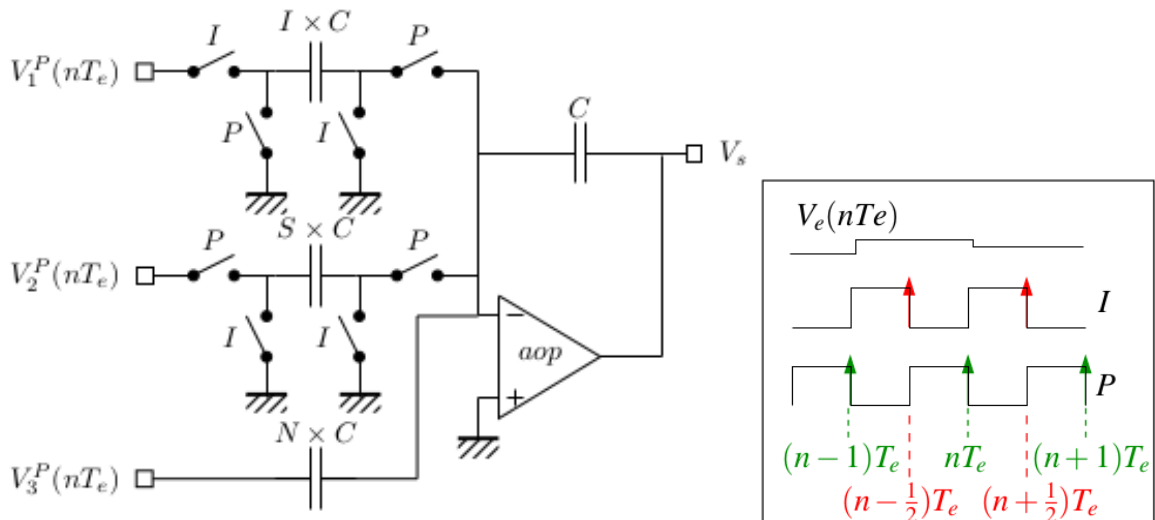


FIGURE 5.9 – Exercice 3 : circuits à capacités commutées

Question 5.6.4.2 Montrer que ces opérations peuvent être représentées par le bloc fonctionnel représenté FIGURE 5.10.

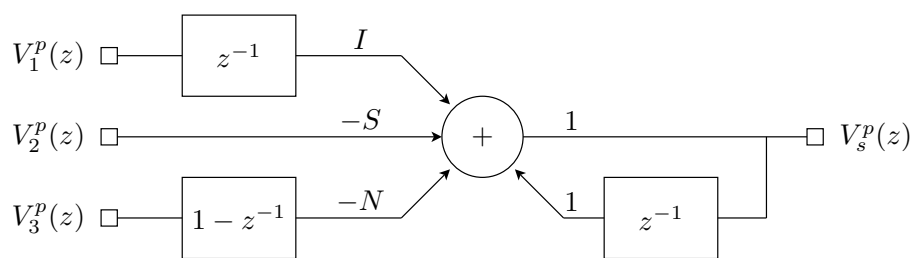


FIGURE 5.10 – Exercice 3 : bloc fonctionnel

Synthèse d'un biquad à capacités commutés

La fonction de transfert : $T(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{-(1-z^{-1})[b_2(1+a_1)+(a_0b_1-b_2)z^{-1}]}{z^{-2}+(-a_1-2+a_0a_2)z^{-1}+(a_1+1)}$ est réalisée par la structure FIGURE 5.11.

Question 5.6.4.3 Donner une réalisation électrique complète à partir du module de base à capacités commutées.

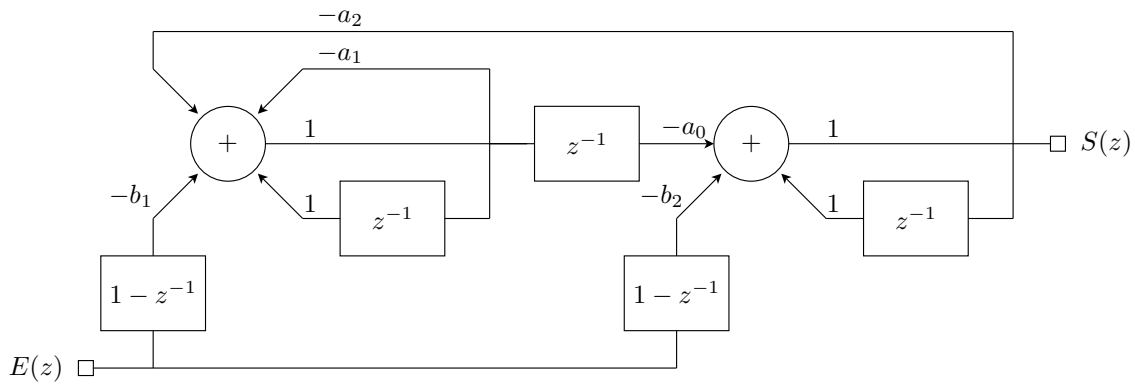


FIGURE 5.11 – Exercice 3 : bloc fonctionnel

5.7 Bibliographie

- [1] P. Allen and E. Sanchez-Sinencio. Switched capacitor circuits. Technical report, Van Nostrand Reinhold Company, 1984.
- [2] F. Baillieu, Y. Blanchard, P. Loumeau, H. Petit, and J. Porte. *Capacités commutées et applications*. Dunod, 1996.
- [3] A. Fettweis. Realisation of general network functions using the resonant transfert principle. In *Fourth Asilomar Conf. on Circuits and Systems*, pages 663–666, Nov. 1970.
- [4] D. L. Fried. Analog sample data filters. *IEEE J. of Solid State Circuits*, pages 302–304, Août 1972.
- [5] G. Hueber and R. Staszewski. *Multi-Mode / Multi-Band RF Transceivers for Wireless Communications : Advanced Techniques, Architectures, and Trends*. Wiley-IEEE Press, 2010.
- [6] James Clerk Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Clarendon Press, 1873.

Chapitre 6

Travaux pratiques : Circuits à capacités commutées

6.1 Introduction

L'objectif de ce TP est de concevoir un oscillateur flexible (2 à 20 Hz) à l'aide de circuits à capacités commutées. Cet oscillateur constituera l'élément de base pour l'implémentation d'un effet Tremolo sur le son de la guitare.¹

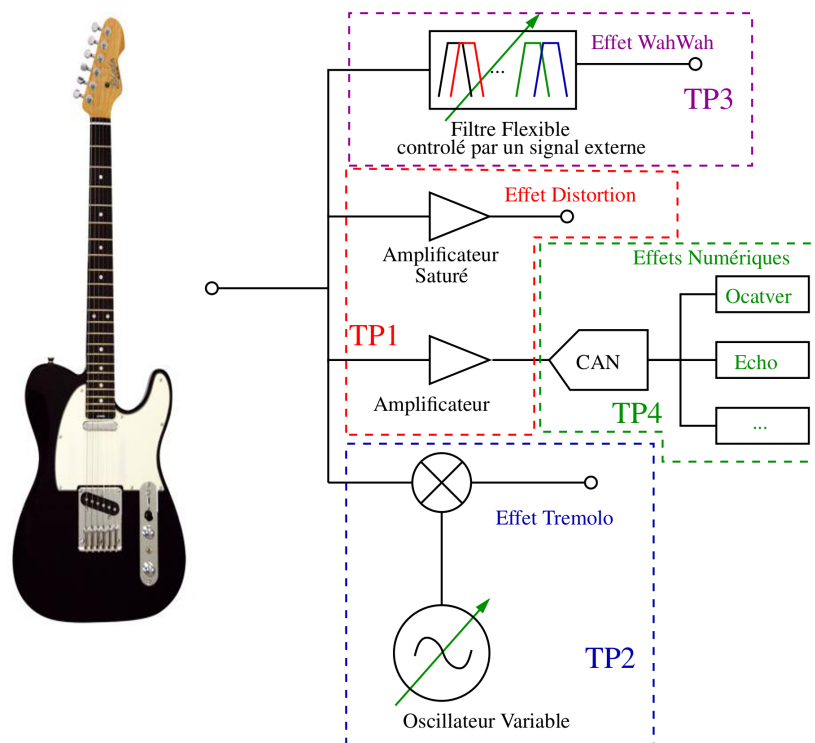


FIGURE 6.1 – Effets musicaux sur la guitare électrique

L'oscillateur sera implémenté en simulations sur le circuit reconfigurable de type FPAA (Field Programmable Analog Array). Nous utiliserons également le logiciel de calcul Octave pour l'analyse des circuits de base et pour la validation de l'effet.

1. Le Tremolo est un effet musical qui est qualifié parfois par un tremblement de la musique. Cet effet est obtenu par une modulation d'amplitude avec un signal sinusoïdal de très faible fréquence (< 20 Hz) afin que le changement de note dû à la modulation soit négligeable.

Remarque importante La tension d'alimentation du FPAA est de $V_{dd} = 3 V$ et tous les signaux sont compris entre $\pm V_{dd}$.

6.2 Intégrateur inverseur

Pour construire l'oscillateur, nous allons utiliser l'intégrateur suivant du circuit FPAA Anadigm (figure 6.2) qu'on échantillonnera à $f_s = 1 \text{ KHz}$.

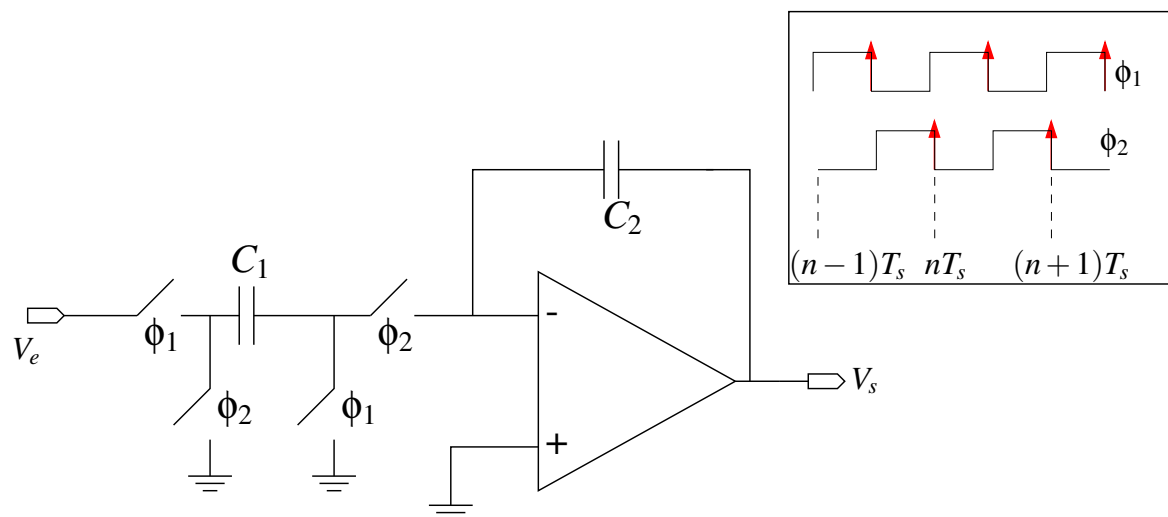


FIGURE 6.2 – Intégrateur Anadigm

Question 6.2.1 Montrer que la fonction de transfert aux instants pairs (fin de ϕ_2) est donnée par l'expression ci-dessous. Vous pouvez considérer que l'entrée V_e est bloquée sur les instants pairs. Ceci se traduit par $V_e(nT_s - 0.5T_s) = V_e(nT_s - T_s)$.

$$T_{I01b}(z) = \frac{V_s(z)}{V_e(z)} = \frac{k z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad \text{avec} \quad k = \frac{C_1}{C_2}$$

On applique à l'entrée de l'intégrateur une tension continue : $V_e = 0,5 V$.

Question 6.2.2 Déterminer la sortie V_s sur 10 périodes avec $V_s(0) = 0$ et $k = 1$.

Nous allons à présent simuler le fonctionnement de l'intégrateur sur le FPAA. Dans le menu **Settings** → **Active Chip Settings**, fixer **ACLK(fc)** à 1 KHz et ajuster **Clock0** à 1 KHz. La deuxième étape est l'instanciation du module. Pour ce faire, dans le menu **Get New CAM** symbolisé par un triangle vert, choisissez le module **Integrator**. Changez l'horloge de contrôle de votre module **ClockA** à **Clock0**, **Polarity** à **Non-Inverting**, **Input Sampling Phase** à **Phase 1** et changez sa constante d'intégration **Integration const.** (exprimée en $V/\mu s$) pour implémentez un k de 1 en utilisant la formule suivante :

$$\text{Integration Const.} = \frac{k \times \overbrace{f_s}^{1 \text{ KHz}}}{10^6}$$

Question 6.2.3 Configurer et ajuster les paramètres de votre simulation et comparer le résultat obtenu au calcul de la question précédente.

6.3 Etude système du générateur sinusoïdal

Pour construire l'oscillateur flexible, on propose d'utiliser 2 intégrateurs mis en boucle. Afin d'obtenir un oscillateur stable qui répond à nos besoins, nous allons commencer par une étude haut niveau de notre montage.

L'équation différentielle $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega_o^2 u = 0$ a comme solution générale :

$$u(t) = C_1 \sin(\omega_o t) + C_2 \cos(\omega_o t)$$

Nous nous proposons d'effectuer une simulation temps-discret de la forme vectorielle de cette équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = \omega_o y \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega_o x \end{cases}$$

Pour cela, on utilise l'approximation de Euler pour la dérivée :

$$\frac{\partial x}{\partial t}(nT_s) \equiv \frac{\partial x}{\partial t}(n) = \frac{x(n+1) - x(n)}{T_s}$$

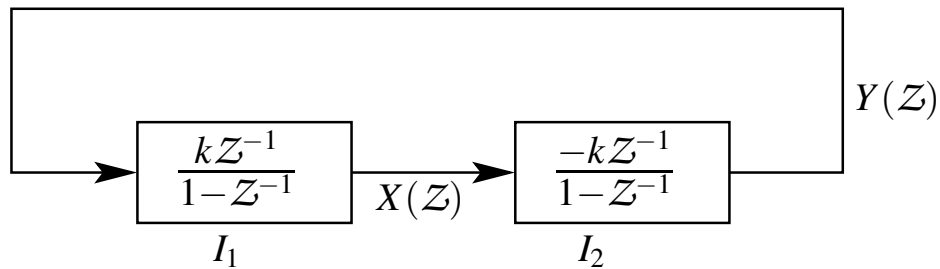


FIGURE 6.3 – Générateur sinusoïdal : cas 1

La figure 6.3 représente le schéma-bloc à partir de deux intégrateurs réalisant cette approximation.

Question 6.3.1 *En déduire la valeur du coefficient k des intégrateurs en fonction de la pulsation ω_o et de la période d'échantillonnage T_s .*

Le script Octave `gen-sin.m` effectue une simulation du système discret (vérifier la conformité des équations sur x et y avec le schéma de la figure 6.3).

Question 6.3.2 *Exécuter le script et conclure qualitativement sur la stabilité du système. Justifier ce résultat par le calcul des pôles (racines en z de l'équation $I_1 I_2 = 1$ où I_1 et I_2 sont les fonctions de transfert des deux intégrateurs).*

On modifie le schéma-bloc conformément à celui de la figure 6.4.

Question 6.3.3 *Etablir les équations discrètes sur x et y correspondantes et modifier le script `gen-sin.m` en conséquence.*

Question 6.3.4 *Effectuer la simulation et conclure qualitativement sur la stabilité du système. Justifier ce résultat par le calcul des pôles en z . Quelle est la contrainte sur k pour garantir la stabilité ?*

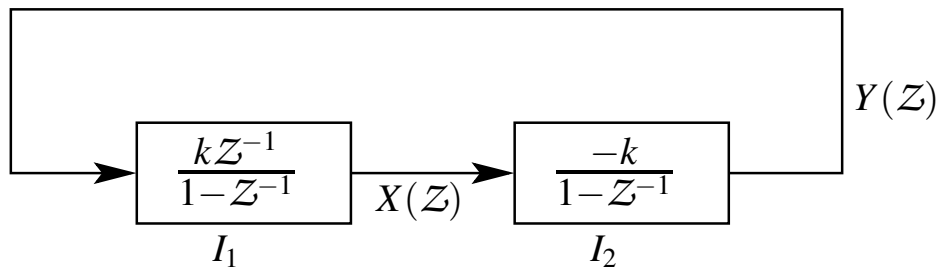


FIGURE 6.4 – Générateur sinusoïdal : cas 2

6.4 Implémentation du générateur sinusoïdal sur le FPAA

Nous souhaitons à présent implémenter l'oscillateur de la figure 6.4 sur le FPAA. Pour rappel, la fréquence de sortie de cet oscillateur doit pouvoir être variée entre 2 et 20 Hz. Cette variation sera implémentée par une modification du rapport capacitif $k = \frac{C_1}{C_2}$.

Question 6.4.1 *Calculer la constante d'intégration qui permet d'avoir une fréquence d'oscillation de 2 Hz puis de 20 Hz. En déduire les valeurs de k correspondantes.*

Pour l'implémentation du montage, nous allons utiliser 2 modules `Integrator` montés tête bêche. Pour avoir 1 retard dans la boucle et non pas 2, nous activerons le premier intégrateur sur la phase 1 et le deuxième sur la phase 2. Un des 2 intégrateurs devrait être implémenté en `inversion`. Fixer la constante d'intégration pour l'obtention d'une fréquence de 20 Hz.

Question 6.4.2 *Pourquoi selon vous le circuit n'oscille pas ?*

Conseil : Fixez dans le code Octave `gen-sin.m` les conditions initiales à 0 et analyser l'impact sur le comportement du circuit

Pour simuler correctement le fonctionnement de l'oscillateur avec Anadigm, nous allons exciter le système. En utilisant le bloc `SumInv`, ajouter un signal carré avec une amplitude de 1 V, une fréquence de 1 Hz et un `Duty Cycle` de 1% à un des noeuds de l'oscillateur. Comme la sortie de cet étage est une somme inversée $OUT = -(IN1 + IN2)$ des 2 entrées, il est nécessaire de changer la polarité d'un des 2 intégrateurs pour compenser cette inversion de signe.

Question 6.4.3 *Simuler le montage et vérifiez qu'il est bien capable d'assurer toute la plage de fréquence requise.*

Sachez qu'en pratique, les oscillateurs n'ont pas besoin d'être excités pour rentrer en phase d'oscillation. Le bruit ambiant, qui n'est pas pris en compte dans nos simulations, permet de faire sortir le système de l'équilibre instable où tous les noeuds sont à 0.

Question 6.4.4 *Quels sont selon vous les avantages et inconvénients de diminuer et d'augmenter la fréquence d'échantillonnage ?*

Conseil : Analyser l'impact de f_s sur k et sur la qualité du signal en sortie de l'oscillateur.

6.5 Effet Tremolo

Comme précisé dans l'introduction, dans le cadre de ce TP, nous n'implémenterons que l'oscillateur variable. Le reste de la chaîne requise pour l'effet Tremolo sera abordée au niveau système avec le logiciel Octave. Charger le script Octave `Tremolo.m` qui permet de réaliser une modulation d'amplitude ou un effet Tremolo. La variable `effet` permet d'activer (`effet=1`) ou de désactiver (`effet=0`) l'effet Tremolo.

Question 6.5.1 *Pour commencer, fixer effet à 0 pour écouter le signal original sans effet.*

Vous disposez dans le script de 3 degrés de liberté pour l'effet Tremolo :

- La fréquence de la modulation
- L'indice de la modulation
- La ou les fenêtres temporelles sur lesquelles sera appliqué l'effet Tremolo

Question 6.5.2 *Analyser les impacts de ces 3 paramètres et trouver le jeu de paramètres qui vous permet d'avoir le meilleur rendu sonore.*

Chapitre 7

Filtrage analogique

7.1 Introduction

Les filtres analogiques sont des composants essentiels des systèmes d'acquisition (numérisation) et de restitution du signal. Ils peuvent être utilisés pour conditionner le signal avant d'effectuer certaines opérations. C'est le cas, par exemple, lors d'une opération d'échantillonnage à la fréquence F_s où le spectre $X_d(f)$ du signal échantillonné est relié au spectre $X(f)$ du signal d'entrée par :

$$X_d(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f - k F_s)$$

Pour pouvoir échantillonner à une fréquence $F_s = 2B$ (Nyquist-Shannon) on doit garantir que le spectre du signal d'entrée n'a pas de composantes supérieures à B . Ceci est généralement assuré par un filtre appelé filtre anti-repliement (figure 7.1).

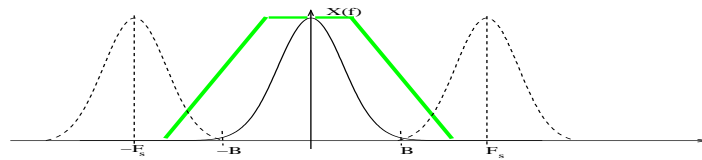


FIGURE 7.1 – Filtrage anti-repliement

Les filtres analogiques sont également utilisés pour sélectionner une partie du spectre d'un signal. C'est par exemple le cas lorsqu'une bande de fréquences est utilisée dans un système radio.

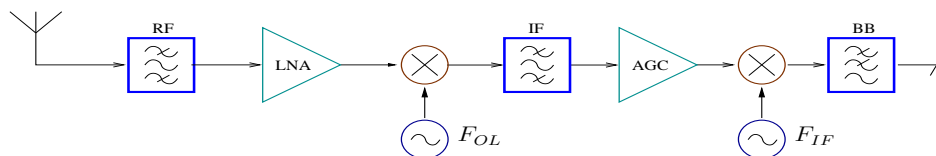


FIGURE 7.2 – Filtrage dans un récepteur radio

La figure 7.2 montre un exemple de récepteur radio où le filtrage est réparti dans la chaîne de réception sur un ensemble de filtres (RF,IF,BB). la technologie utilisée pour ces différents filtres est étroitement liée à la fréquence du signal à traiter. Nous en donnerons quelques exemples à la fin du cours.

7.2 Spécification des filtres

Les filtres analogiques temps continu sont régis, de manière générale, par des équations différentielles du temps et de l'espace. Considérons une onde qui se propage dans le filtre à la vitesse v . Si d est la dimension du dispositif et si la longueur d'onde $\lambda = \frac{v}{f}$ est voisine de d , les phénomènes de propagation doivent être considérés. Lorsque d est très inférieur à λ , on pourra négliger les phénomènes de propagation. C'est généralement vrai pour les derniers étages d'une chaîne telle que celle de la figure 7.2 (filtre BB). Le circuit est alors dit à **éléments localisés** (lumped element model). Les éléments du circuit (R,L,C,..) sont considérés comme ponctuels et celui-ci est décrit par les lois de Kirchoff. Nous supposons cette condition réalisée dans la suite de ce cours.

Exemple : $v = 4000 \text{ m/s}$ (filtre à onde de surface où filtre SAW : *Surface Acoustic Wave*)

$$f = 2\text{GHz} \Rightarrow \lambda = 2\mu\text{m}$$

Dans ce cas, λ est une longueur caractéristique des motifs du filtre et l'approximation précédente n'est pas valide.

7.2.1 Fonction de transfert

Un filtre linéaire est décrit de façon générale par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ ou la transformée de Laplace $T(p)$ de cette dernière (figure 7.3). La fonction $T(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$ est la fonction de transfert du filtre.

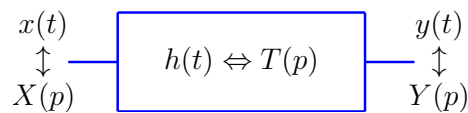


FIGURE 7.3 – Fonction de transfert

Pour les circuits à éléments localisés, les équations de constitution de ces éléments, associées aux lois topologiques (Kirchoff), conduisent à des fonctions de transfert rationnelle en p :

$$\underbrace{\sum_j i_{kj} = 0}_{\text{Lois topologiques}} \quad \text{et} \quad \underbrace{i = C \frac{dv}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad I(p) = C p V(p)}_{\text{Equations de constitution}}$$

$$\boxed{T(p) = \frac{\prod_{j=1}^m (p - z_j)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)}} \quad ([1]) \quad \begin{array}{l} p_i : \text{pôles} \\ z_j : \text{zéros} \\ n : \text{ordre du filtre} \end{array}$$

Les fonctions de transfert de ces filtres sont ainsi caractérisées par les racines des polynômes numérateur (zéros) et dénominateur (pôles). Le nombre n de pôles est appelé ordre du filtre. Il caractérise sa complexité. Ayant la forme de la fonction de transfert, il nous faut maintenant déterminer quelles sont les contraintes imposées à cette dernière pour qu'elle puisse être exploitée efficacement.

7.2.2 Réponse transitoire et harmonique

Considérons la réponse d'un filtre (linéaire à constantes localisées) à une entrée sinusoïdale à la pulsation ω . Pour simplifier, nous considérons que tous les pôles sont simples, le calcul

pouvant facilement être étendu au cas des pôles multiples :

$$x(t) = e^{j\omega t} \cdot \mathbf{1}_{\{t>0\}} \Leftrightarrow \mathcal{L}\{x(t)\} = X(p) = \frac{1}{p-j\omega}$$

La sortie du filtre est donnée par :

$$Y(p) = T(p) \cdot X(p) = \frac{N(p)}{\prod_{i=1}^n (p-p_i)} \cdot \frac{1}{p-j\omega} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{p-p_i} + \frac{C_{n+1}}{p-j\omega}$$

On obtient, par identification, le coefficient C_{n+1} :

$$C_{n+1} = [T(p)]_{p=j\omega} = T(j\omega)$$

et par transformée inverse, la réponse temporelle :

$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} + T(j\omega) e^{j\omega t}$$

Réponse transitoire *Réponse harmonique*

La réponse temporelle fait apparaître une partie transitoire qui dépend uniquement des conditions initiales et une réponse harmonique avec un gain complexe donné par l'évaluation de $T(p)$ pour $p = j\omega$. Nous nous intéresserons dans la suite à cette deuxième partie de la réponse du filtre. La réponse transitoire est normalement une réponse évanescence. Pour qu'il en soit effectivement ainsi, on doit satisfaire au critère de stabilité de la fonction de transfert :

$$\boxed{\text{Stabilité : } m \leq n \quad R_e(p_i) < 0}$$

7.2.3 Causalité de la réponse impulsionnelle

Afin de mettre en évidence une autre contrainte imposée à la réponse d'un filtre, nous considérons le cas d'un "passe-bas" idéal. Celui-ci a un gain unitaire dans la bande $[-f_c, f_c]$ (bande passante) et un gain nul en dehors de cette bande. Nous autorisons d'autre part un retard t_o entre l'entrée et la sortie du filtre (figure 7.4).

Nous remarquons que la réponse impulsionnelle d'un tel filtre est non nulle pour $t < 0$. Ce filtre n'est pas causal. Le théorème de Paley-Wiener stipule que la fonction de transfert T d'un filtre causal doit être telle que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |T(f)||}{1+f^2} df < \infty$$

En conclusion, on ne peut pas annuler le module de $T(f)$ sur une bande de fréquence aussi petite soit elle. Nous chercherons donc, dans la suite, des fonctions de transfert de la forme ([1]) de la section 7.2.1 qui approchent au mieux les caractéristiques du filtre précédent.

7.2.4 Gabarits

Les gabarits de filtrage déterminent les limites de variation permises des caractéristiques du filtre. Parmi celles-ci les plus importantes sont l'affaiblissement et le temps de propagation de groupe.

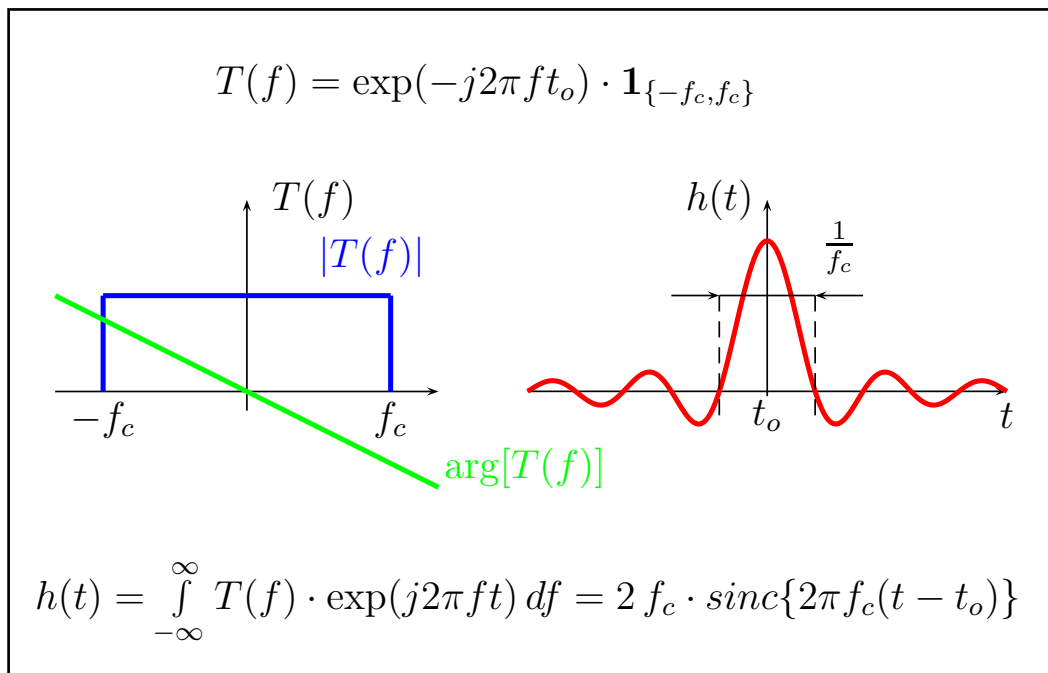
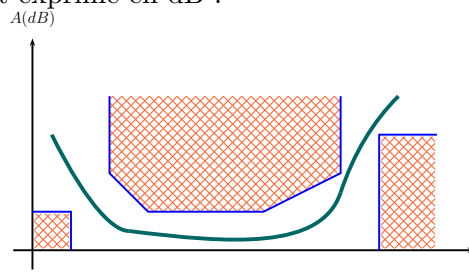


FIGURE 7.4 – Filtre passe-bas idéal

Gabarit d'affaiblissement

L'affaiblissement du filtre est généralement exprimé en dB :

$$A(\omega) = -20 \log_{10} |T(j\omega)|$$



Remarque Pour les filtres à constantes localisées (fonctions rationnelles à coefficients réels), on a la propriété de réflexion :

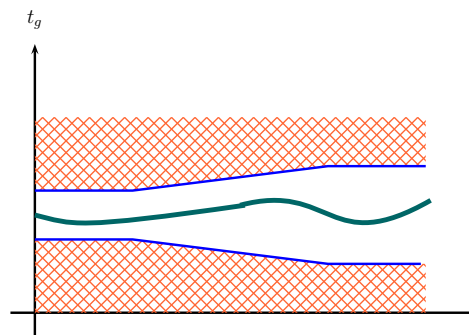
$$T(\bar{p}) = \bar{T}(p) \quad , \quad |T(\omega)|^2 = [T(p) \cdot T(-p)]_{p=j\omega}$$

où la barre supérieure indique le complexe conjugué.

Gabarit de temps de propagation de groupe

La phase fait intervenir une fonction transcendante. On préfère utiliser le *temps de propagation de groupe* :

$$t_g(\omega) = -\frac{\partial \arg[T(j\omega)]}{\partial \omega}$$



7.3 Approximations standards

Les approximations standards sont basées sur la construction d'un filtre passe-bas normalisé en amplitude et en fréquence par une fonction caractéristique Ψ_n . Celui-ci est appelé filtre prototype. La variable complexe normalisée correspondant au prototype sera notée $S = \Sigma + j \Omega$:

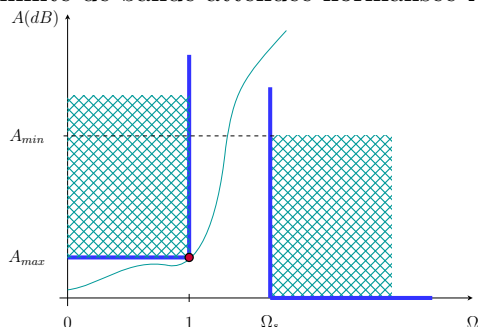
$$A(\Omega) = 10 \log_{10}[1 + \epsilon^2 \Psi_n^2(\Omega)] \quad , \quad |T(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \Psi_n^2(\Omega)}$$

L'approximation sur le prototype consiste à déterminer la fonction Ψ qui satisfait le gabarit d'affaiblissement. Pour réaliser les autres types de filtres que le passe-bas (passe-haut, réjecteur, passe-bande), on utilise une transformation de fréquences :

$$S = f(p) \quad \text{avec} \quad p = \sigma + j\omega$$

7.3.1 Définition du prototype

Le prototype est un filtre passe-bas normalisé. Il est caractérisé par son affaiblissement maximum en bande passante A_{max} , son affaiblissement maximum en bande atténuée A_{min} et sa limite de bande atténuée normalisée Ω_s .



$$\begin{aligned} A(\Omega) &= 10 \log_{10}[1 + \epsilon^2 \Psi_n^2(\Omega)] \\ \Omega \in [0, 1] &\Rightarrow |\Psi_n(\Omega)| \leq 1 \\ \Psi_n(1) &= 1 \\ A_{max} &= 10 \log_{10}(1 + \epsilon^2) \end{aligned}$$

La relation suivante permet de déterminer l'ordre du filtre lorsque qu'un choix particulier a été effectué pour Ψ :

$$A_s = 10 \log_{10}[1 + \epsilon^2 \Psi_n^2(\Omega_s)] \geq A_{min} \quad \Psi_n(\Omega_s) \geq D = \sqrt{\frac{10^{A_{min}/10} - 1}{10^{A_{max}/10} - 1}}$$

7.3.2 Approximation sur le prototype

Nous ne considérerons ici que quelques approximations classiques sur le module de la fonction de transfert. Celles-ci consistent à faire un choix particulier de Ψ qui approche "au mieux" le prototype. On peut distinguer deux classes particulières selon la forme polynomiale ou rationnelle de la fonction caractéristique.

- Approximations polynômiales

1. Approximation de Butterworth : $\Psi_n(\Omega) = \Omega^n$
2. Approximation de Tchebycheff :

$$\Psi_n(\Omega) = T_n(\Omega) \quad T_n : \text{polynôme de Tchebycheff d'ordre } n$$

- Approximations rationnelles

1. Tchebycheff en bande atténuée : $\Psi_n(\Omega) = \frac{T_n(\Omega_s)}{T_n(\frac{\Omega_s}{\Omega})}$
2. Approximation de Cauer ou Elliptique :

n pair	n impair
$\Psi_n(\Omega) = C_1 \prod_{i=1}^{n/2} \frac{\Omega^2 - \Omega_{oi}^2}{\Omega^2 - \Omega_{zi}^2}$	$\Psi_n(\Omega) = C_2 \Omega \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{\Omega^2 - \Omega_{oi}^2}{\Omega^2 - \Omega_{zi}^2}$
$\Omega_{oi} \cdot \Omega_{zi} = \Omega_s$	

La figure 7.5 montre quelques exemples d'affaiblissements obtenus pour n=5.

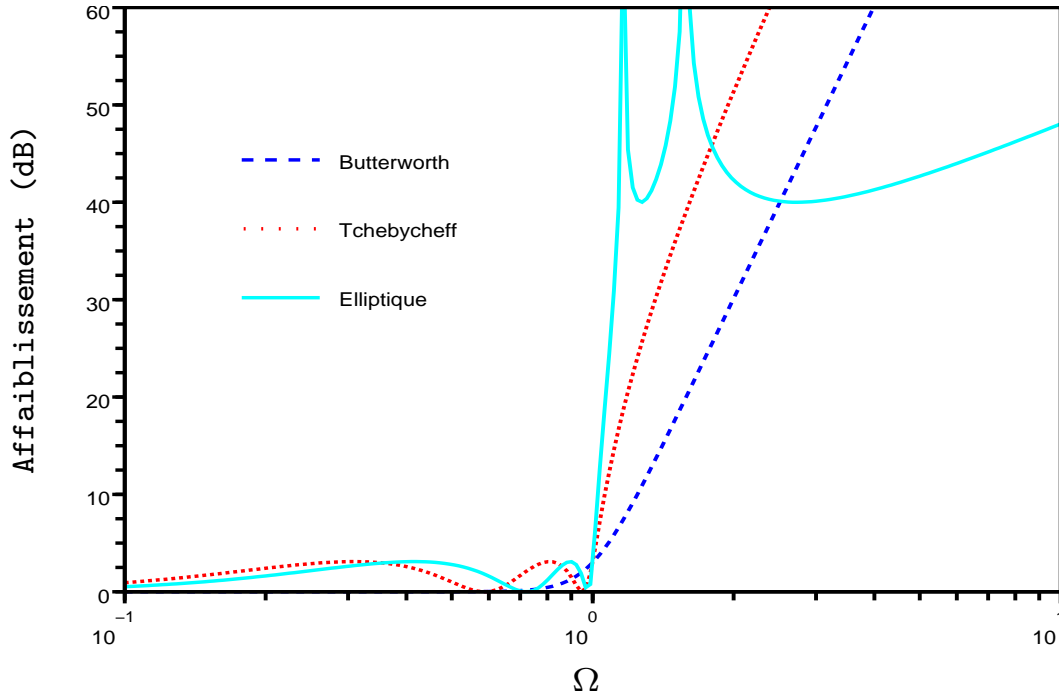


FIGURE 7.5 – Exemples d'approximation standard (n=5, Amax=3 dB)

7.3.3 Transformations de fréquences

Les transformations de fréquences permettent de réaliser d'autres types de filtre à partir du passe-bas prototype. Le tableau 7.1 donne les principales transformations $S = f(p)$ et leur paramètres associés.

(1) passe-haut :	(2) réjecteur :	(3) passe-bande :
$S = \frac{\omega_2}{p}$	$S = \frac{B}{\omega_o} \left[\frac{p}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{p} \right]^{-1}$	$S = \frac{\omega_o}{B} \left[\frac{p}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{p} \right]$
	$B = \omega_4 - \omega_3$	$B = \omega_3 - \omega_2$
$\Omega_s = \frac{\omega_2}{\omega_1}$	$\Omega_s = \frac{\omega_4 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_2}$ Contrainte : $\omega_1 \cdot \omega_4 = \omega_2 \cdot \omega_3 = \omega_o^2$	

TABLE 7.1 – Transformations de fréquences

La principale contrainte imposée aux transformations (2) et (3) du tableau 7.1 est la symétrie géométrique autour de la fréquence centrale ω_o :

$$\omega_1 \cdot \omega_4 = \omega_2 \cdot \omega_3 = \omega_o^2$$

Ainsi, si le gabarit de départ n'est pas à symétrie géométrique, nous devons trouver un gabarit plus sévère qui satisfait cette condition pour pouvoir appliquer la méthode d'approximation sur un prototype.

Exemple de transformation Nous allons appliquer la transformation passe-bas passe-bande au prototype du premier ordre suivant :

$$T(S) = \frac{1}{1+S} \quad T(j\Omega) = \frac{1}{1+j\Omega}$$

L'affaiblissement pour $\Omega = 1$ est $A = 10 \log(2) \approx 3 \text{ dB}$. On obtient le filtre passe-bande du second ordre à l'aide de la transformation :

$$S = \frac{\omega_o}{B} \left[\frac{p}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{p} \right] = Q_o \left[\frac{p}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{p} \right]$$

Nous avons noté $Q_o = \frac{\omega_o}{B}$ le rapport entre la pulsation centrale et la bande B (bande passante à 3 dB). Q_o est le coefficient de qualité du filtre du second ordre.

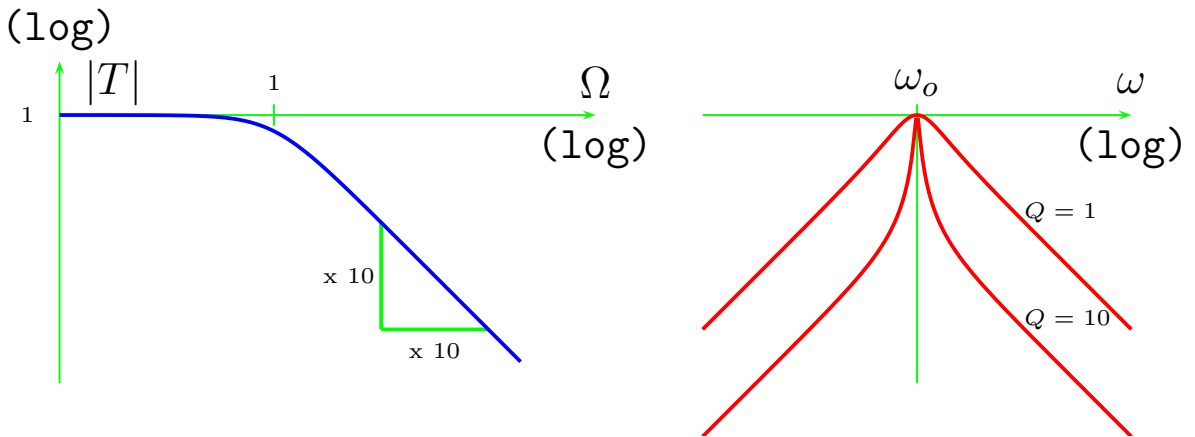


FIGURE 7.6 – Transformation passe-bas passe-bande

On notera que cette transformation établit bien une correspondance sur l'axe imaginaire puisque pour $p = j\omega$ on a :

$$S = j Q_o \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) = j \Omega \quad \text{avec} \quad \Omega = Q_o \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)$$

La fonction de transfert du filtre transformé est :

$$T_{bp}(p) = \frac{\frac{\omega_o}{Q_o} p}{p^2 + \frac{\omega_o}{Q_o} p + \omega_o^2}$$

Le module de cette fonction de transfert et celle du prototype sont représentés en échelles logarithmiques pour deux valeurs du coefficient de qualité Q_o .

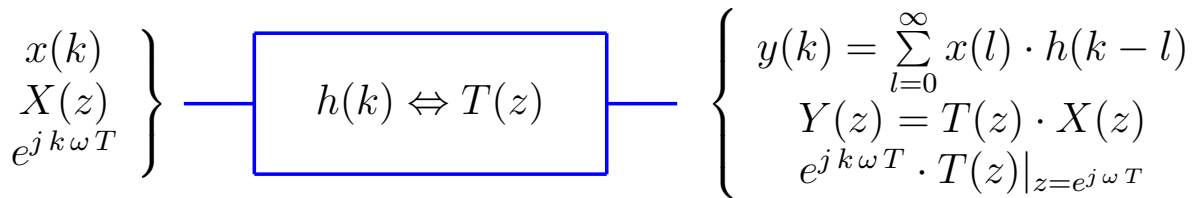


FIGURE 7.7 – Fonction de transfert en z

7.3.4 Filtre à temps discret

Les filtres à temps discret sont décrits par leur fonction de transfert en z (figure 7.7).

La méthode du prototype précédemment décrite peut être appliquée en utilisant une transformation univoque du plan p vers le plan z. La transformation bilinéaire suivante est généralement utilisée.

$$p = f(z) = \frac{2z - 1}{Tz + 1} \quad p = j\omega_a \rightarrow z = \frac{1 + j\frac{\omega_a T}{2}}{1 - j\frac{\omega_a T}{2}} = e^{j2\pi f T}$$

La transformation de l'axe des fréquences entre le prototype f_a et le filtre discret f_d est alors donnée par (figure 7.8) :

$$\omega_a = \frac{2}{T} \tan(\pi f_d T)$$

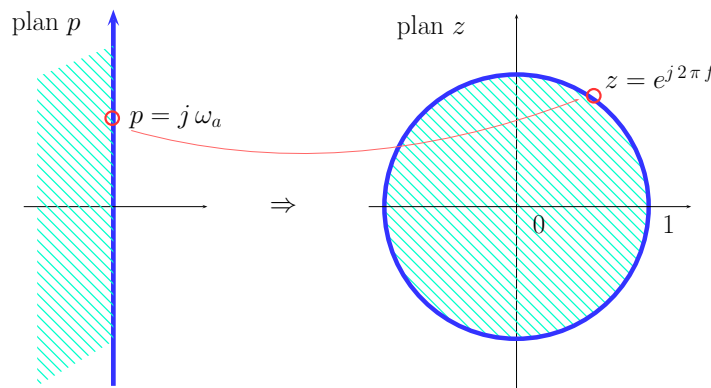


FIGURE 7.8 – transformation bilinéaire

7.4 Types de filtres

Le choix d'une technologie particulière pour réaliser un filtre est guidé par un certain nombre de critères :

- Performances peu sensibles aux variations des composants, de la température,...
- Distorsion réduite, faible bruit
- Faible surface, consommation, coût
- Sélectivité élevée
- Facilité de calibrage si celui-ci est nécessaire
- ...

La figure 7.9 donne une classification des technologies usuelles de filtrage.

Nous donnons dans la suite quelques exemples de filtre de la figure 7.9.

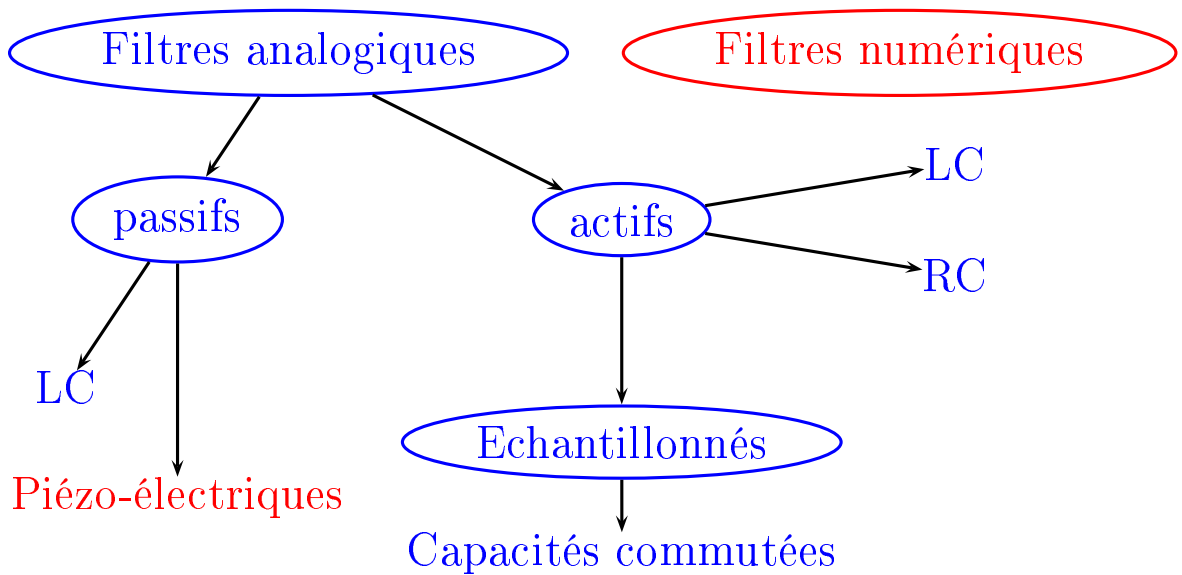


FIGURE 7.9 – Différents types de filtres

7.4.1 Filtre passif LC

Les filtres LC avec terminaisons résistives sont utilisés depuis plus d'un demi siècle. Ces filtres peuvent être décrits en terme de puissance incidente P_i , utile P_u et réfléchie P_r (figure 7.10).

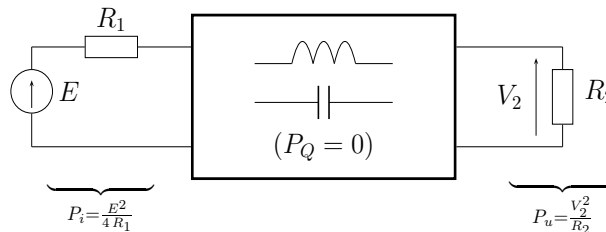


FIGURE 7.10 – Filtre LC avec terminaisons résistives

On a les relations suivantes :

$$P_r = P_i - P_u \quad , \quad |t|^2 = \frac{P_u}{P_i} \leq 1 \quad , \quad |r|^2 = \frac{P_r}{P_i} \quad , \quad |K|^2 = \frac{P_r}{P_u}$$

$$|t|^2 = \frac{4 R_1}{R_2} \left| \frac{V_2}{E} \right|^2 = \frac{P_u}{P_u + P_r} = \frac{1}{1 + |K|^2}$$

On notera la similitude entre la fonction K et la fonction caractéristique de la section 7.3. Le quadripôle LC est idéalement sans pertes et sans bruit.

La figure 7.11 montre un exemple d'un filtre prototype polynômial du 5^{ème} ordre.

La valeur des éléments est fonction du type d'approximation. On a par exemple dans le cas d'une approximation de Butterworth avec $A_{max} = 3 \text{ dB}$ ($\epsilon = 1$) les valeurs du tableau 7.2.

Pour calculer les valeurs effectives des composants on utilise les formules de dénormalisation suivantes :

$$c_k = \frac{C_k}{\omega_p R} \quad , \quad l_k = \frac{L_k R}{\omega_p}$$

où R est la résistance de terminaison et ω_p est la pulsation limite de bande passante.

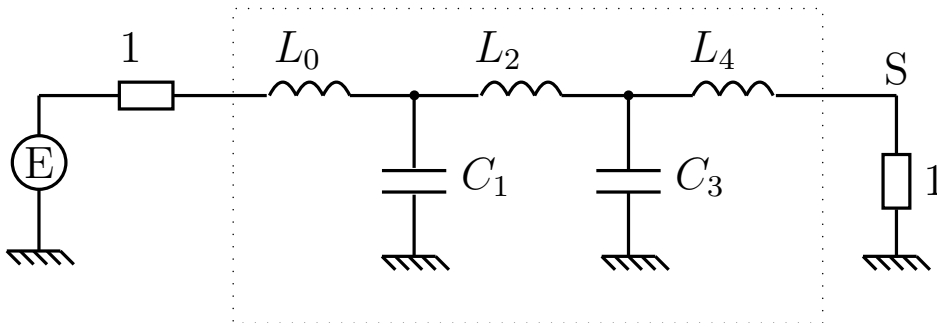


FIGURE 7.11 – Prototype passe-bas LC du 5^{ème} ordre

k impair	k pair
$C_k = 2 \sin \left[\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right]$	$L_k = 2 \sin \left[\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right]$

TABLE 7.2 – Valeur des éléments L et C (Butterworth, $A_{max} = 3$ dB)

Ces filtres sont particulièrement intéressants en haute fréquence (quelques centaines de mégahertz) où les inductances ont un encombrement et un coût raisonnables. Les performances des inductances intégrées sur silicium sont cependant limitées comme le montre la figure 7.12 qui donne un exemple de réalisation d'une inductance plane.

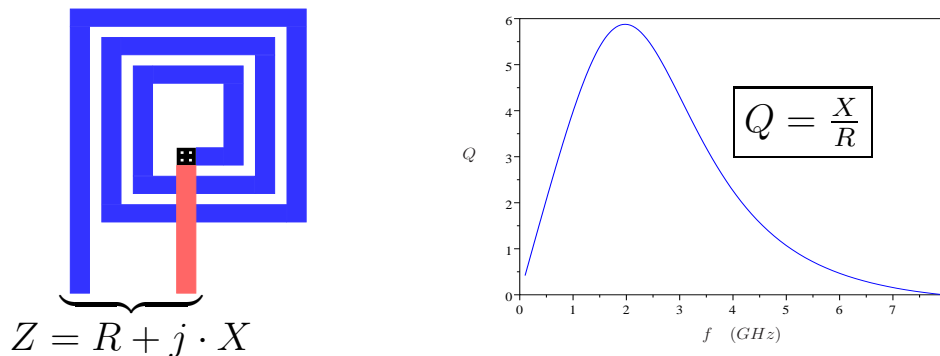


FIGURE 7.12 – Réalisation d'une inductance plane intégrée et coefficient de qualité

Le coefficient de qualité d'une inductance est défini comme $Q = \frac{X}{R}$ où R et X sont les parties réelle et imaginaire de l'impédance complexe du circuit réel. Les courants induits dans le substrat ainsi que les résistances du métal limitent la valeur de ce coefficient de qualité et la possibilité de réaliser une sélectivité importante du filtre (Ω_s voisin de 1).

7.4.2 Filtre actif RC

Nous donnons, à titre d'exemple, la cellule du second ordre de Sallen-Key (figure 7.13) :

$$T(p) = \frac{\omega_o^2}{p^2 + \frac{\omega_o}{Q_o} p + \omega_o^2} \quad , \quad \omega_o = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}} \quad , \quad Q_o = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

L'avantage d'une telle structure est de ne nécessiter qu'un seul amplificateur (contrairement aux cellules basées sur des intégrateurs telles que celle examinée à la section suivante où le nombre d'amplificateurs est au moins égal à celui du filtre). La sortie basse impédance

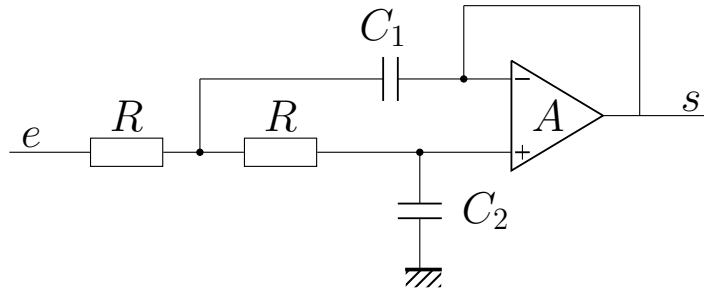


FIGURE 7.13 – cellule du second ordre de Sallen-Key

permet de réaliser un filtre d'ordre élevé en utilisant plusieurs cellules de ce type en cascade (cf section 7.4.4).

Les performances du filtre dépendent bien sur des performances de l'amplificateur. La figure 7.14 montre un exemple de résultat obtenu pour un filtre de Butterworth ayant une fréquence de coupure de 10 kHz. On constate une très forte dégradation à partir de 1 MHz (Amplificateur LT1007¹).

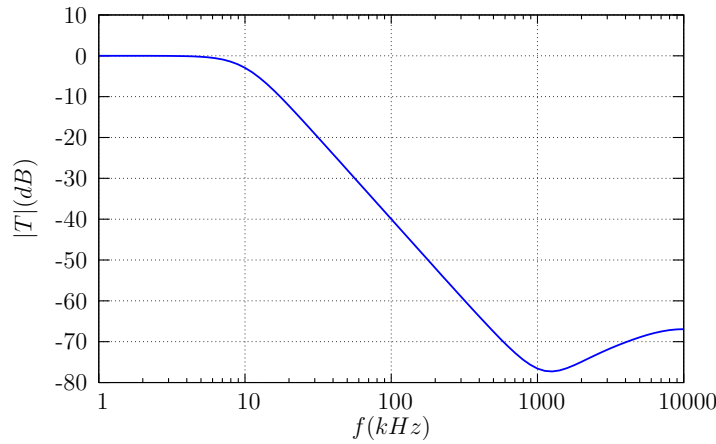


FIGURE 7.14 – Influence de l'amplificateur sur la fonction de transfert

7.4.3 Filtres à capacités commutées

Les circuits à capacités commutées présentent l'avantage de pouvoir réaliser économiquement des circuits échantillonnés utilisés en filtrage et en conversion. Nous donnons, à titre d'exemple, une cellule de filtrage passe-bas du circuit programmable utilisé en travaux pratiques (figure 7.15). La fonction de transfert $T(z) = V_{out}(z)/V_{in}(z)$ est donnée par :

$$T(z) = -\frac{C_1 C_3}{C_A C_B} \cdot \frac{z}{\left(\frac{C_A}{C_B} + 1\right) z^2 + \left(\frac{C_2 C_3}{C_A C_B} - \frac{C_A}{C_B} - 2\right) z + 1}$$

Lorsque la fréquence d'échantillonnage $F_s = 1/T_s$ est très supérieure à la fréquence du signal, La fonction de transfert $T_i(z)$ d'un intégrateur temps discret peut être assimilée à celle d'un intégrateur temps continu :

$$T_i(f) = \frac{1}{z-1} \Big|_{z=e^{j2\pi f T_s}} \quad \text{pour } f T_s \ll 1 \quad \text{on a } T_i(f) \approx \frac{1}{j 2\pi f T_s}$$

Dans ce cas, la fonction de transfert précédente peut être approchée par :

$$T(p) = \frac{V_{out}}{V_{in}} \approx -G \frac{\omega_o^2}{p^2 + \frac{\omega_o}{Q_o} p + \omega_o^2}$$

1. <http://www.linear.com>

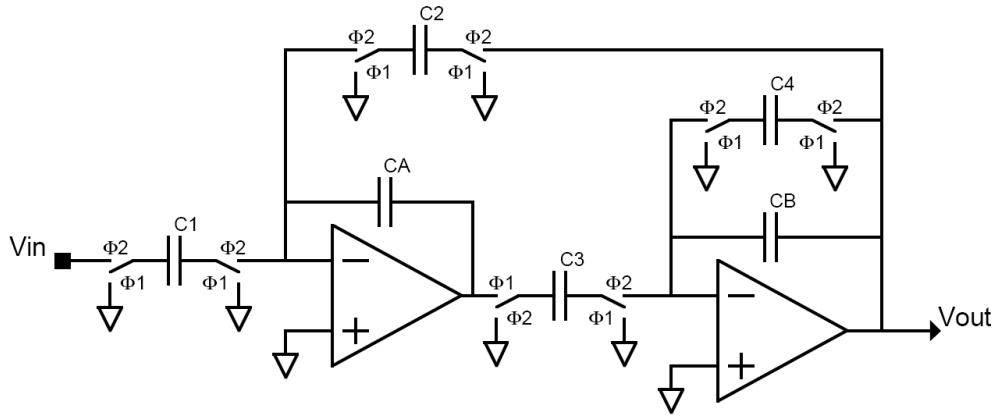


FIGURE 7.15 – Cellule passe-bas du circuit Anadigm AN10E40 (IP : F01 low Q)

avec :

$$\omega_o \cdot T_s = \sqrt{\frac{C_2 C_3}{C_A C_B}} \quad , \quad G = \frac{C_1}{C_2} \quad , \quad Q_o = \frac{C_B}{C_4} \sqrt{\frac{C_2 C_3}{C_A C_B}}$$

7.4.4 Structure cascade

Cette section s'applique aux filtres actifs de manière générale. La structure cascade d'un filtre actif est donnée à la figure 7.16.

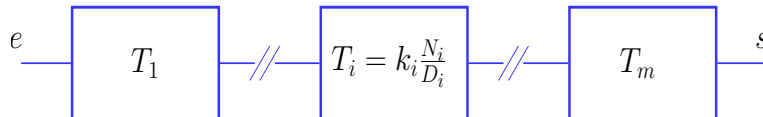


FIGURE 7.16 – Structure cascade

Ces caractéristiques sont les suivantes :

1. Chaque cellule réalise un filtrage du premier ou du second ordre
2. L'interaction entre les cellules est supposée négligeable
3. La réalisation du filtre complet fait intervenir $m - 1$ fonctions intermédiaires, ce qui nécessite les choix suivants :
 - ordonnancement des dénominateurs D_i
 - ordonnancement des numérateurs N_i
 - répartition des gains k_i

Ce sont en général les performances en bruit et en linéarité qui guideront ces différents choix, car dans le cas idéal, et si la condition 2 est vérifiée, toutes ces solutions sont équivalentes avec $\prod_i k_i = K$ où K est le gain global du filtre.

7.5 Exercices

7.5.1 Temps de propagation de groupe

On désire filtrer un signal $x(t)$ à bande étroite à l'aide d'un filtre passe-bande centré sur la pulsation ω_o . Au voisinage de cette pulsation, le module du filtre peut être considéré comme constant et de valeur T_o . La phase est approchée par un développement limité au premier ordre :

$$\phi(\omega) = \phi_o + (\omega - \omega_o) \cdot \left. \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right|_{\omega_o}$$

Question 7.5.1 Déterminer la forme du signal de sortie $s(t)$ lorsque $x(t)$ est un signal modulé en amplitude centré en ω_o :

$$x(t) = a(t) \cdot e^{j\omega_o t}$$

Quel retard subit l'enveloppe $a(t)$?

7.5.2 Filtre pour récepteur ZigBee

Dans les prochaines années, des compteurs intelligents viendront remplacer les compteurs classiques d'électricité. Cette nouvelle génération de compteurs permettra de mesurer d'une manière détaillée et en temps réel la consommation d'électricité et transmette ces données à un gestionnaire d'énergie qui adaptera le fonctionnement de certains appareils (Chauffe-eau, radiateur, ...) en fonction des contraintes imposées par l'utilisateur ou le fournisseur d'énergie. La figure 7.17 montre un scénario d'utilisation proposé par la société Linky.

Un standard très utilisé pour ce type d'application est le standard ZigBee. C'est un protocole permettant des communications faibles débits avec une faible consommation énergétique et ainsi est largement utilisé pour des applications IoT (Internet of Things). Il existe 3 bandes principales pour les communications ZigBee centrées à 868 MHz, 915 MHz et 2.4 GHz. Les canaux de transmission ont une bande passante de 2 MHz et sont espacés de 5 MHz. Dans le cadre de cet exercice, nous nous intéressons à la conception du filtre de sélection pour un récepteur ZigBee.

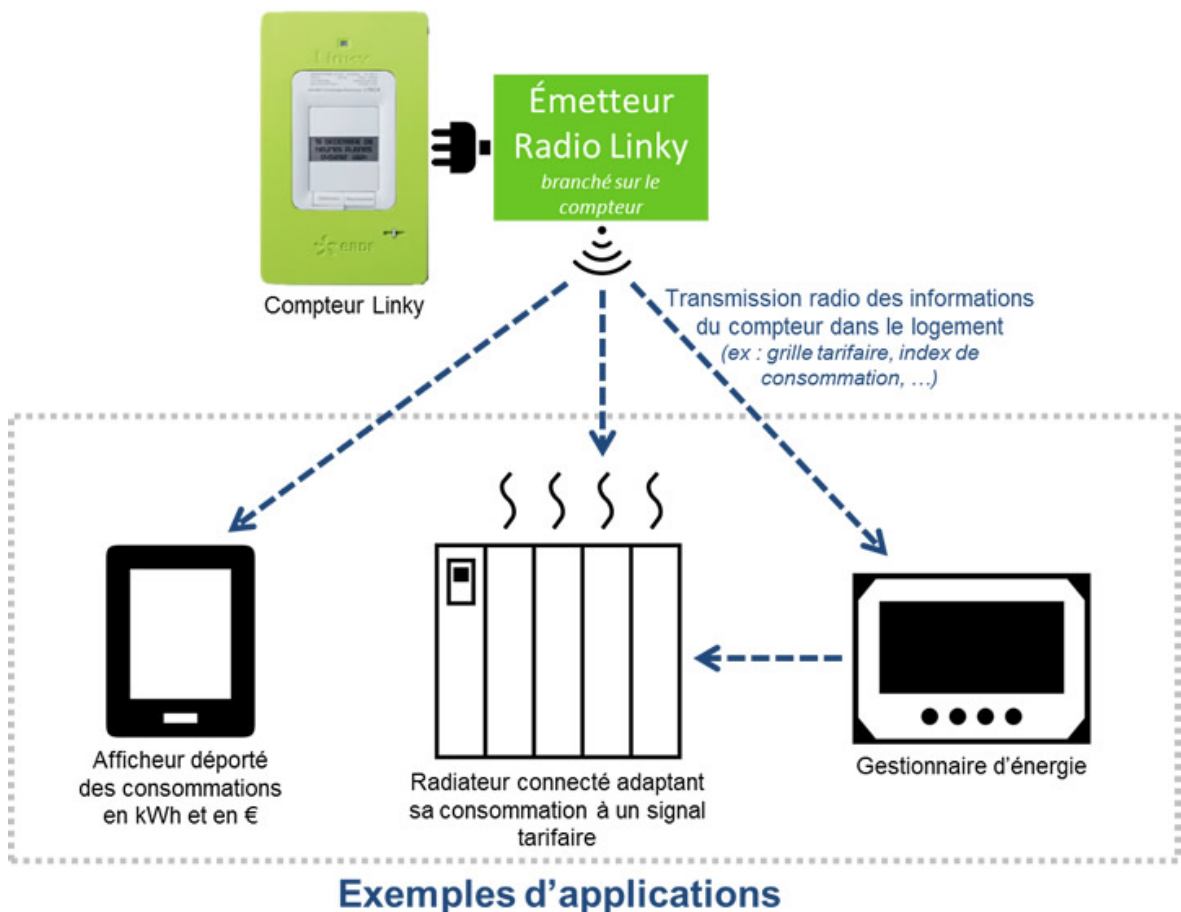


FIGURE 7.17 – Exemple de compteur intelligent

Nous décidons d'implémenter ce récepteur à l'aide d'une architecture à faible fréquence intermédiaire. Ce type de récepteur est robuste face aux perturbations faible fréquence qui sont susceptibles de dégrader significativement l'intégrité du signal, spécialement pour les

applications à faible bande passante. La figure 7.18 montre un digramme du spectre à l'entrée du filtre après les phases d'amplification et de mélange. Le signal utile est centré autour d'une fréquence intermédiaire de 10 MHz² et est entouré par d'autres canaux ZigBee qu'on souhaite filtrer avant de passer dans le domaine numérique.

Après comparaison des différentes contraintes imposés par le standard, nous déterminons que le filtrage du canal 4 est le plus contraignant. Il nécessite une atténuation supérieure à 30 dB à la fréquence 20 MHz. Nous souhaitons également avoir une ondulation inférieure à 0.5 dB à l'intérieur de la bande passante (9 MHz à 11 MHz).

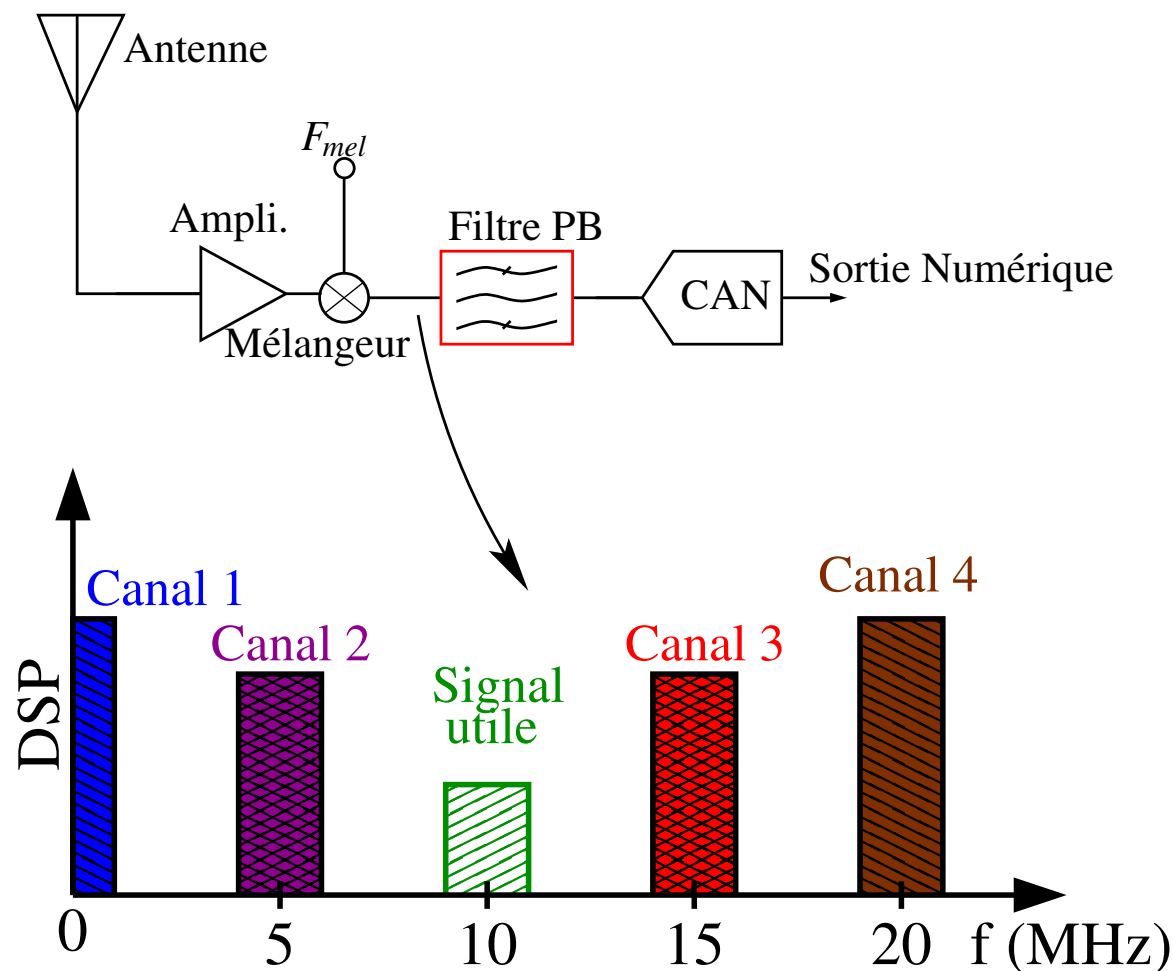


FIGURE 7.18 – Haut) Chaîne de réception simplifiée - - - Bas) Gabarit du signal à l'entrée du filtre

Question 7.5.2 Déterminer le gabarit du filtre passe-bande à symétrie géométrique permettant de sélectionner le canal utile.

Question 7.5.3 Déterminer le paramètre de sélectivité Ω_s et le gabarit prototype passe-bas.

Question 7.5.4 Calculer l'ordre du filtre prototype pour une approximation polynomiale de type Butterworth.

Nous disposons de cellules Butterworth de second ordre passe bas, passe bande et passe haut.

Question 7.5.5 Proposer une implémentation pour le filtre.

2. Sachez qu'en pratique cette fréquence est faible (typiquement 3 à 4 MHz), nous avons modifié cette valeur pour simplifier l'exercice.

7.6 Bibliographie

- [1] H. Baher. *Synthesis of Electrical Networks*. Wiley, 1984.
- [2] H.J. Belinchikoff and A.I. Zverev. *Filtering in the Time and Frequency Domains*. Krieger, 1986.
- [3] A. Mohan. *VLSI Analog Filters*. Springer, 2013.
- [4] R. Schaumann, M.S. Ghauri, and K.R. Laker. *Design of Analog Filters*. Prentice-Hall, 1990.

Chapitre 8

Travaux pratiques : Filtrage analogique

8.1 Introduction

L'objectif de ce TP est d'implémenter un effet "WahWah" sur le son de la guitare.¹ Ceci nécessite de concevoir un filtre passe bande avec une fréquence centrale reconfigurable. Dans le cadre de ce TP, nous concevrons un filtre avec une fréquence centrale allant de 800 Hz à 2400 Hz. L'implémentation se fera avec des composants sur étagère (résistances, condensateurs, amplificateurs ...).

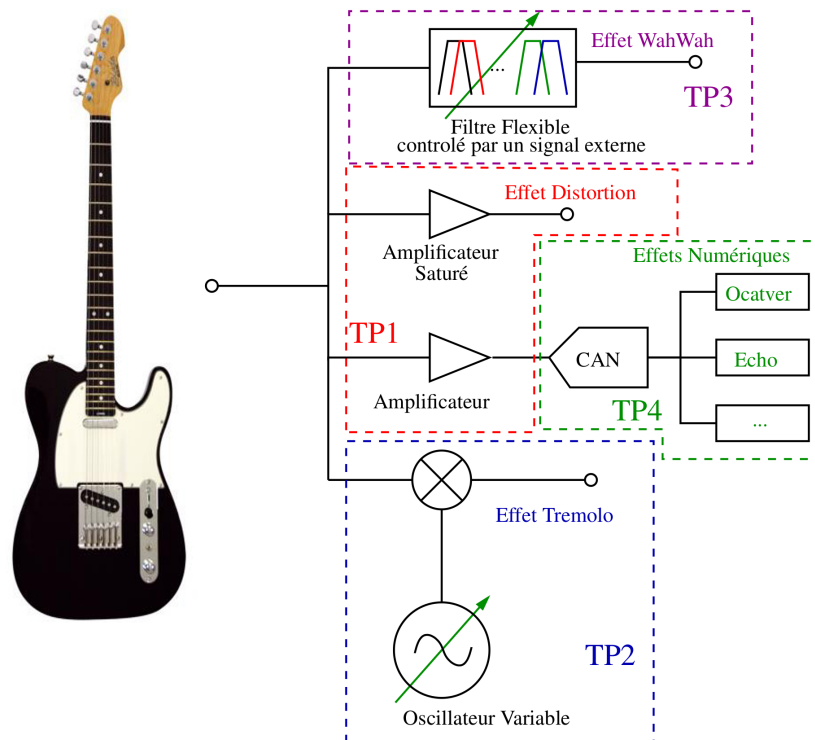


FIGURE 8.1 – Effets musicaux sur la guitare électrique

1. Le WahWah est un effet modifiant la qualité voyelle d'une note. Autrement dit, il transforme un son « o » en « a » et inversement, produisant cet effet quasiment vocal. Pour mieux comprendre, vous pouvez regarder la vidéo suivante qui montre plusieurs solos à base d'effet Wahwah <https://www.youtube.com/watch?v=ZdTgEEOqv0Q>

8.2 Filtre à base de cellule de Rauch

Nous proposons d'utiliser la cellule de Rauch pour mettre en oeuvre le filtre (Figure 8.2).

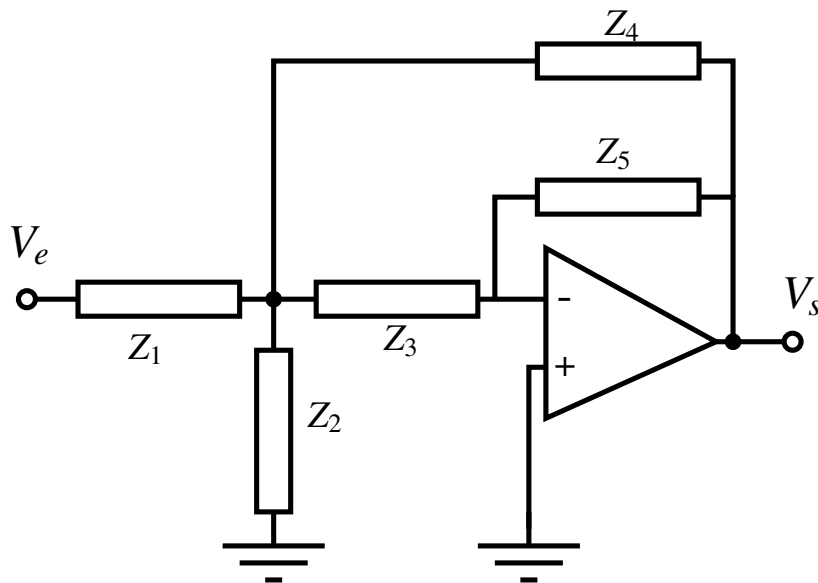


FIGURE 8.2 – Cellule passe-bande du second ordre

La fonction de transfert du filtre est donnée par l'expression suivante :

$$H(p) = \frac{-Y_1(p) \cdot Y_3(p)}{Y_3(p) \cdot Y_4(p) + Y_5(p) \cdot (Y_1(p) + Y_2(p) + Y_3(p) + Y_4(p))}$$

où $Y_i = \frac{1}{Z_i}$ sont les admittances des impédances Z_i .

Afin de construire un filtre passe bande, nous allons utiliser la configuration suivante pour la cellule de Rauch :

- Z_1 est une résistance $R1 = 10 \text{ K}\Omega$
- Z_2 est une résistance variable R_V
- Z_3 et Z_4 sont des condensateurs de valeur $C = 10 \text{ nF}$
- Z_5 est une résistance de valeur $R2 = 100 \text{ K}\Omega$

Question 8.2.1 Déterminer la fonction de transfert du filtre réalisée dans le domaine de Laplace en fonction de $R1$, $R2$, R_V et C .

La fonction de transfert a un zéro à DC ($f=0 \text{ Hz}$) et 2 pôles donnés par² :

$$p_{1,2} = \frac{-R1 \cdot R_V \pm j\sqrt{R1 \cdot R_V \cdot (R2 \cdot R1 + R2 \cdot R_V - R1 \cdot R_V)}}{R1 \cdot R2 \cdot R_V \cdot C}$$

Question 8.2.2 Quelles sont les conditions nécessaires sur $R1$, $R2$, R_V et C pour garantir la stabilité du filtre.

Afin d'étudier le comportement en fréquence, nous allons exprimer la fonction de transfert $H(j\omega)$ dans le domaine de Fourier. Celle-ci peut être écrite sous la forme suivante :

$$H(j\omega) = \frac{-H_0}{1 + j \cdot Q \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

2. Pour $R2 > R_V$

avec

$$H_0 = \frac{R_2}{2 \cdot R_1}$$
$$Q = \frac{\sqrt{(R_1 + R_V) \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_V}}{2 \cdot R_1 \cdot R_V}$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_V}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_V \cdot C^2}}$$

Question 8.2.3 En vous appuyant sur les notions du cours, reliez H_0 , Q et ω_0 à des paramètres physiques du filtre.

Question 8.2.4 Ouvrez le script `Rauch_TF.m`, fixer R_V à 1000Ω . Relever les valeurs du gain, de la fréquence centrale et de la bande passante à 3 dB. Comparer les aux valeurs théoriques

Question 8.2.5 Déterminer la plage de valeur de R_V qui permet d'obtenir une fréquence centrale variant de 800 Hz à 2400 Hz. Vérifier votre résultat en simulant la fonction de transfert pour les fréquences minimale et maximale avec le script `Rauch_TF.m`.

Question 8.2.6 Sachant que l'implémentation d'une résistance variable contrôlée est plus simple que celle d'un condensateur variable, expliquer pourquoi le choix de Z_2 comme levier de reconfiguration se justifie-t-il ?

8.3 Implémentation du Filtre

Nous allons à présent implémenter le filtre sur la maquette. Nous utiliserons l'amplificateur opérationnel MC1458P de Texas Instruments que nous alimenterons avec les tensions d'alimentation positive VDD de 5 V et négative VSS de -5 V³. Le circuit a été installé sur le support du bas de la maquette à droite. Voici le descriptif de ses connecteurs :

- L'alimentation positive VDD est connectée à la broche 14
- L'alimentation négative VCC est connectée à la broche 10
- L'entrée V^- de l'amplificateur est connectée à la broche 8
- L'entrée V^+ de l'amplificateur est connectée à la broche 9
- La sortie de l'amplificateur est connectée à la broche 7

Nous allons fixer dans un premier lieu R_V à 6600Ω . Utiliser l'ohmmètre pour la régler.

Question 8.3.1 Mesurer le gain, la fréquence centrale et la bande passante en balayant une sinusoïde d'amplitude $0.4 V_{pp}$ avec un offset nul. Comparer les valeurs obtenues aux valeurs théoriques.

Question 8.3.2 Refaire la question précédente pour un R_V de 460Ω . Conclure.

Le retard de groupe ou temps de propagation d'un filtre bande autour de la pulsation centrale ω_0 est donné par :

$$t_g = - \left. \frac{d\phi}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{2 \cdot Q}{\omega_0}$$

3. Pour cette manipulation, utiliser les sorties ± 20 V de l'alimentation, en connectant la sortie +20 V au VDD de la maquette, la sortie -20 V au VSS de la maquette et la masse (port COM) du générateur à la masse de la maquette

Question 8.3.3 En vous appuyant sur l'expression ci-dessus, calculer la valeur théorique du retard de groupe.

Pour mesurer le retard de groupe en pratique, nous décidons d'appliquer une modulation d'amplitude en entrée de notre filtre. En fait, l'utilisation d'une sinusoïde pure de pulsation ω_0 ne nous permet pas de mesurer des retards supérieurs à la période du signal.

Question 8.3.4 Mesurer le retard de groupe que subit l'enveloppe pour le signal d'entrée suivant :

$$V_e(t) = A \cdot (1 + m \cdot \cos(2\pi f_m t)) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

avec une fréquence de modulation $f_m=200$ Hz, une fréquence porteuse $f_0=2400$ Hz, un indice de modulation $m=1$ (100%) et une amplitude A de 0.4 Vpp. Comparer la mesure pratique à la valeur théorique.

8.4 Implémentation de la résistance variable et effet Wahwah

Comme indiqué dans l'introduction, l'effet WahWah nécessite une reconfiguration de la fréquence centrale actionnée par un signal de contrôle. Ce signal est en pratique généré par une pédale, une manette ou un accéléromètre. Cependant dans ce TP, pour des limitations de temps, nous utiliserons le générateur d'alimentation⁴. Un des meilleurs moyens pour l'implémentation d'une résistance variable contrôlée est le transistor MOS dont la résistance drain-source peut être reconfigurée en modifiant la tension de grille. Pour caractériser la résistance du transistor, nous allons implémenter le circuit de la figure 8.3. Dans cette configuration avec la valeur choisie de R_{car} , le transistor se comportera comme une résistance sur toute la plage où il est passant. La puce contenant le transistor NMOS est installée sur le support du haut de la maquette. Le drain du transistor est connecté à la broche 8, la source à la broche 7 et la grille à la broche 6.

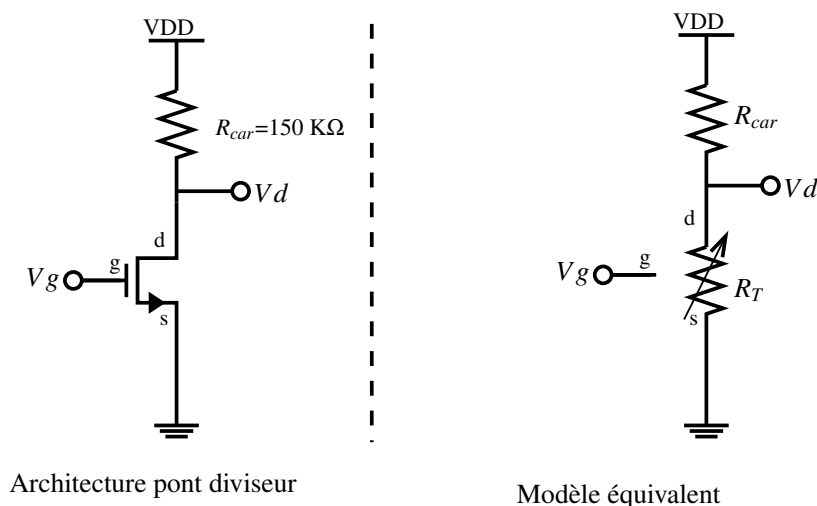


FIGURE 8.3 – circuit de caractérisation

Question 8.4.1 Déterminer la relation qui lie R_T à R_{car} , VDD et V_d en utilisant le modèle équivalent.

Question 8.4.2 Faites varier la tension V_g de 1 V à 3 V en passant par les points suivants [1.0 ; 1.4 ; 1.8 ; 2.2 ; 2.6 ; 3.0]). Relever la courbe $R_T = f(V_g)$. Conclure.

4. Pour cette manipulation, utiliser la sortie 6 V de l'alimentation

Remplacer le potentiomètre RV par le transistor dans le filtre. Pour cela, il suffit de débrancher la résistance R_{car} et de connecter le drain du transistor au bon noeud du circuit, la source étant déjà connectée à la masse.

Question 8.4.3 Appliquer une sinusoïde de fréquence 1.6 KHz et d'amplitude 400 mVpp. Connecter le signal de sortie à la fois aux écouteurs et à l'oscilloscope. Faites varier la tension de grille du transistor de 1 à 3 V. Décrivez brièvement les phénomènes observés et perçus.

Pour bien percevoir l'effet Wahwah, il faut appliquer un signal riche fréquentiellement. Vous pouvez générer un tel signal en utilisant la guitare⁵.

Question 8.4.4 Faites varier plus ou moins rapidement (environ 1 cycle par seconde) la tension de grille entre 1 et 3 V, décrivez brièvement l'effet perçus.

5. Si vous n'êtes pas à l'aise avec une guitare, vous pouvez utiliser le signal audio pré-enregistré sur le générateur. Pour ce faire, aller dans le mode $Arb \rightarrow Arb \text{ Waveform Menu} \rightarrow user1$. Fixer la période à 5.7 secondes.

Chapitre 9

Conversion analogique-numérique

9.1 Introduction

Les circuits intégrés numériques, en terme de vitesse et de densité, permettent de mettre en oeuvre des traitements de signaux à très grande complexité. De ce fait et aussi grâce aux possibilités de programmation, le traitement numérique du signal est privilégié pour de nombreuses applications, le traitement analogique servant alors essentiellement à l'acquisition et au pré-traitement indispensable pour réaliser une conversion du signal de l'analogique vers le numérique ou à la restitution pour des opérations de filtrage ou d'amplification après conversion du numérique vers l'analogique.

Le traitement analogique et dès lors les circuits analogiques restent indispensables pour la récupération d'informations avec le monde extérieur. En effet, la plupart des capteurs d'informations fournissent une donnée du domaine analogique en temps continu.

Lors de la spécification architecturale d'un système, le choix d'un partitionnement conduisant à un traitement massif du signal en numérique et un traitement minimal en analogique ne conduit pas toujours à un optimum globalement. Le meilleur partitionnement dépend notamment des technologies d'intégration, du traitement à effectuer, des performances recherchées et des divers coûts.

De nombreuses applications en transmission ou en radiocommunications requièrent des systèmes mixtes (analogique et numérique) dans lesquels la recherche d'un optimum d'intégration dépend de nombreux paramètres et notamment de l'état de l'art en conversion analogique-numérique et en conversion numérique-analogique. Ceci illustre l'importance des interfaces d'acquisition et de restitution en général et des interfaces entre traitement d'un signal sous sa forme analogique et traitement sous sa forme numérique. Les convertisseurs jouent un rôle fondamental pour le choix d'architectures, et au-delà, pour l'atteinte des performances vis-à-vis d'objectifs de conception.

L'objet de ce chapitre est tout d'abord de présenter les principes de la conversion. Les grandes familles de convertisseur classiques sont décrites en soulignant les caractéristiques de chacune d'elles. Les convertisseurs de type $\Sigma\Delta$ ou de type pipe-line ne sont pas présentés dans ce document et sont l'objet d'étude dans le cadre d'autres enseignements.

9.2 Principe de la conversion

Pour comprendre le principe de la conversion, plaçons-nous dans une application d'acquisition et de restitution de données (FIGURE 9.1).

9.2.1 Etapes de la conversion

Pour permettre un traitement de signal numérique et/ou une transmission de signal numérique, il est nécessaire de procéder en différentes étapes :

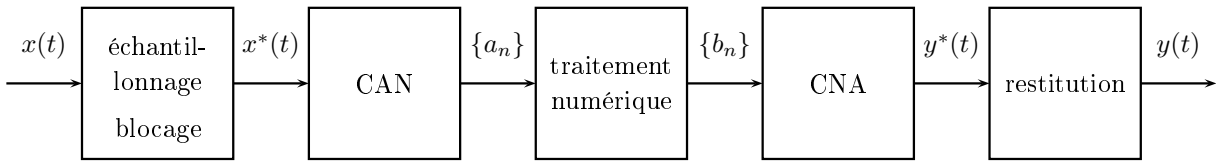


FIGURE 9.1 – Chaîne d’acquisition de données

- l’échantillonnage-blocage permet de discrétiser l’axe des temps. A un instant précis, la valeur du signal d’entrée est récupérée. Le signal $x^*(t)$ est analogique temps discret. Le signal $x(t)$ est analogique temps continu.
- la conversion analogique numérique peut être décomposée en 2 étapes. La première est la quantification. A partir de cette étape, le signal est discrétisé en amplitude. La deuxième étape est le codage du signal quantifié dans un code choisi. Le signal de sortie est une suite d’information binaire.
- le traitement numérique dépend de l’application.
- la conversion numérique-analogique permet de passer de l’information binaire à un signal quantifié en amplitude.
- la phase de restitution permet de récupérer le signal analogique en temps continu.

Avant de s’intéresser aux différentes familles de convertisseurs, l’opération d’échantillonnage-blocage, indispensable avant conversion, est présentée.

9.2.2 Echantillonnage

Le signal d’entrée $x(t)$ est un signal analogique temps continu. On ne va convertir que les valeurs du signal d’entrée espacées du temps T_{conv} , correspondant au temps nécessaire à la conversion. Aussi doit-on récupérer cette information et pour ce faire échantillonner le signal d’entrée à la fréquence $F_e = \frac{1}{T_{conv}} = \frac{1}{T_e}$.

L’expression du signal en sortie de l’échantillonneur est :

$$x_e(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e).$$

La transformation de Fourier de cette expression permet d’obtenir le spectre du signal (FIGURE 9.2) :

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} X(f) * \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(f - nF_e) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X(f - nF_e).$$

L’opérateur $*$ est le produit de convolution.

Pour éviter le recouvrement des spectres, il est nécessaire que le spectre du signal d’entrée soit limité à $B < \frac{F_e}{2}$. Ceci impose, en général, un filtrage du signal d’entrée.

9.2.3 Blocage

L’étape précédente suppose que la prise d’information est instantanée. Or les temps d’établissement et de propagation imposent de la garder suffisamment longtemps à l’entrée du convertisseur. Il faut alors considérer l’impulsion non pas comme un Dirac, mais comme un créneau :

$$x_b(t) = x_e(nT_e) * [u(t) - u(t - T_e)].$$

Le spectre correspondant s’écrit :

$$X_b(f) = X_e(f) \frac{1 - \exp(-2j\pi f/F_e)}{2j\pi f}.$$

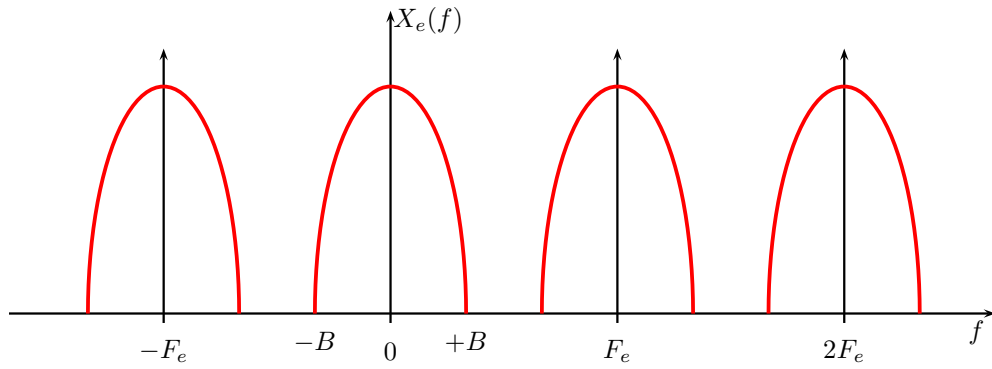


FIGURE 9.2 – Spectre du signal échantillonné

Ceci donne l'expression en module :

$$|X_b(f)| = |X_e(f)| \frac{|\sin c(\pi f/F_e)|}{F_e}$$

Ceci se traduit par une déformation du spectre (FIGURE 9.3) où le spectre du signal de départ sera d'autant moins déformé que la fréquence d'échantillonnage sera grande devant la bande B du signal d'entrée.

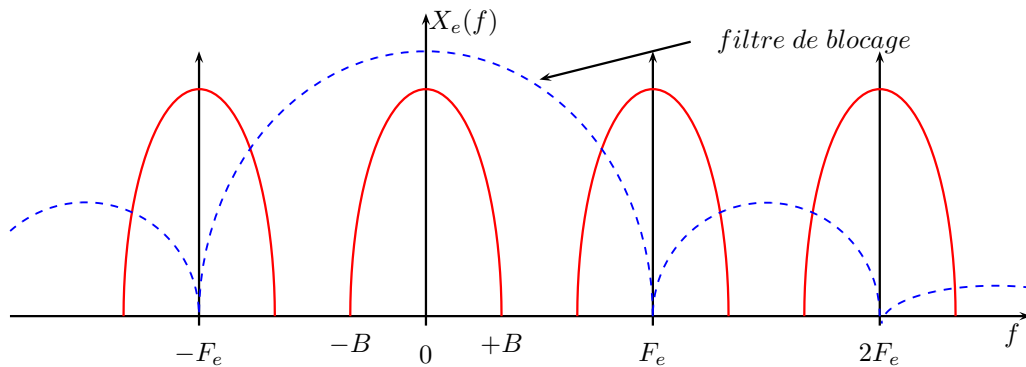


FIGURE 9.3 – Spectre du signal et effet du blocage

9.3 La conversion analogique-numérique

Cette opération peut être décomposée en deux parties : la quantification et le codage. En général, le même circuit met en oeuvre les deux opérations.

Avant d'étudier les architectures des convertisseurs, quelques termes liés à la conversion doivent être définis.

9.3.1 Définitions

Pour un Convertisseur Analogique Numérique (CAN), la grandeur analogique temps continu A est transformée en un signal discret (b_1, b_2, \dots, b_n) . L'équation de définition du convertisseur s'écrit :

$$A = b_1 \frac{V_{ref}}{2} + b_2 \frac{V_{ref}}{4} + \dots + b_n \frac{V_{ref}}{2^n} + e = N \frac{V_{ref}}{2^n} + e,$$

- V_{ref} : la pleine échelle du convertisseur, égale à la différence entre la tension maximale et la tension minimale supportés par le convertisseur. Par exemple, pour un CAN opérant entre 0 et 5 V, V_{ref} sera égale à 5 V, pour un CAN opérant entre -2 et 2 V, V_{ref} sera égale à 4 V et pour un CAN opérant entre 1 et 4 V, V_{ref} sera égale à 3V¹.
- e : l'erreur de quantification du convertisseur
- N : la sortie numérique du convertisseur
- n : le nombre de bit ou la résolution du CAN
- b_1 : le bit de poids le plus fort (MSB : *Most Significant Bit*) et b_n : le bit de poids le plus faible (LSB : *Least Significant Bit*).

On définit également le pas de quantification qui se nomme également le quantum :

$$q = \frac{V_{ref}}{2^n}.$$

L'approximation due à la quantification peut être représentée comme une erreur (FIGURE 9.4) comprise entre $\pm q/2$.

Le comportement non linéaire du quantificateur fait que l'on ne peut pas utiliser les méthodes classiques. Aussi, fait-on appel au modèle statistique. La référence de base de ce travail est un article de Bennett [1].

Par la suite, nous allons considérer la quantification comme un bruit blanc additif de probabilité uniforme (FIGURE 9.5). Nous parlerons dans la suite de bruit de quantification.

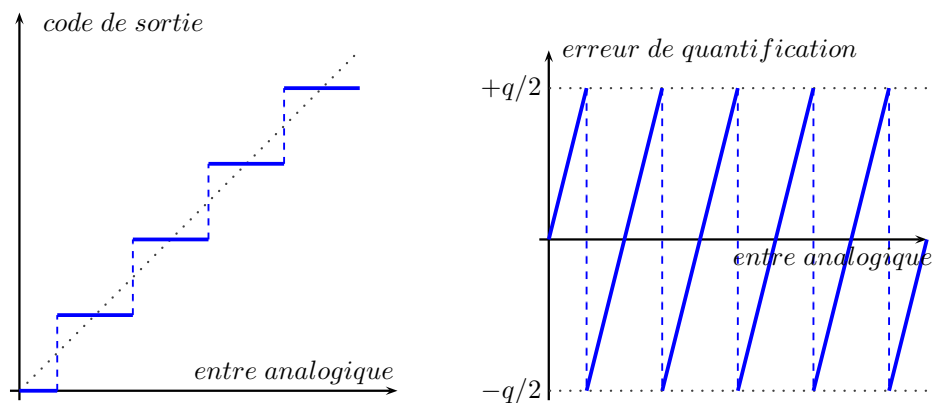


FIGURE 9.4 – Fonction de transfert d'un CAN et erreur de quantification

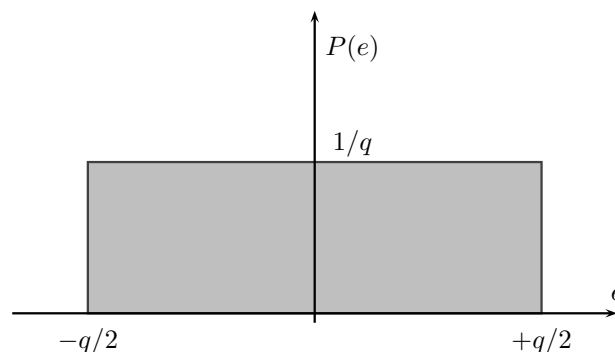


FIGURE 9.5 – Densité de probabilité de l'erreur de quantification

1. Attention, dans la littérature, V_{ref} désigne dans certains cas comme le notre la pleine échelle et dans d'autres la pleine échelle divisée par 2.

La variance du bruit de quantification est donnée par :

$$\sigma^2 = \frac{1}{q} \int_{-q/2}^{+q/2} e^2 de = \frac{q^2}{12}.$$

La puissance P_e de ce processus aléatoire, échantillonné à la fréquence F_e , est égale à sa variance. L'hypothèse de bruit blanc donne une densité spectrale de puissance constante sur tout le spectre. Il en résulte :

$$P_e = \int_{-F_e/2}^{+F_e/2} dsp_e df = \frac{q^2}{12} \text{ et } dsp_e = \frac{q^2}{12F_e}$$

La FIGURE 9.6 donne l'allure du spectre du signal échantillonné et du bruit introduit par la quantification. Pour analyser l'influence de la quantification sur la qualité du signal, nous utilisons le rapport signal sur bruit (SNR : *Signal Noise Ratio*) :

$$SNR = \frac{\text{puissance du signal}}{\text{puissance du bruit}} = \frac{\int_{-F_e/2}^{+F_e/2} |E(f)|^2 df}{\int_{-F_e/2}^{+F_e/2} dsp_e df}$$

(en supposant être à la limite de la fréquence de Nyquist $B = F_e/2$)

Avec une tension d'entrée sinusoïdale d'amplitude Amp et donc d'excursion $2 \cdot Amp$, la puissance du signal est $P_s = \frac{Amp^2}{2}$. Si la pleine échelle du convertisseur est une tension V_{ref} , alors la puissance du bruit de quantification est

$$P_e = \frac{q^2}{12} = \frac{V_{ref}^2}{12 \cdot 2^{2n}}$$

Ceci permet de déduire le rapport signal sur bruit :

$$SNR = \frac{3}{2} \cdot 2^{2n} \cdot \left(\frac{2 \cdot Amp}{V_{ref}} \right)^2$$

soit en décibel :

$$SNR_{dB} = 10 \log(SNR) = 1,76 + 6,02n + 20 \log \left(\frac{2 \cdot Amp}{V_{ref}} \right).$$

Cette relation montre l'équivalence entre un gain de 6 dB de rapport signal sur bruit et 1 bit de plus en résolution (en numérique, la résolution indique le nombre de bits significatifs avec lequel sont représentés les nombres).

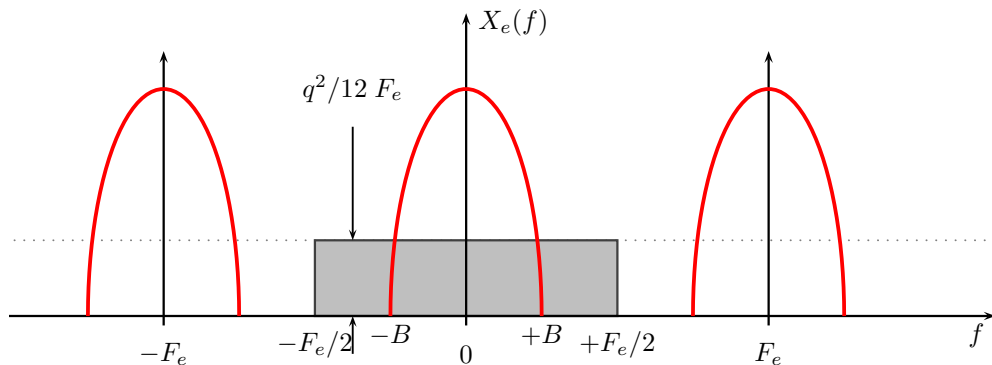


FIGURE 9.6 – Spectre du signal et du bruit de quantification

L'influence du suréchantillonnage n'est pas étudiée dans ce cours. Elle est traitée dans le cadre de l'étude des convertisseurs à modulation sigma-delta.

Ces définitions vont nous aider dans la description des architectures des convertisseurs.

9.3.2 Etude des principaux convertisseurs analogique-numérique

Un grand nombre de techniques de Conversion Analogique-Numérique ont été développées pour une grande diversité d'applications. Le choix d'une de ces techniques dépend très étroitement de l'application particulière. Dans certains cas, le paramètre important est la précision, dans d'autres c'est la rapidité. Lorsque les deux paramètres sont exigés, il faut aboutir à un compromis. nous pouvons classer les CAN en trois familles essentielles :

- les CAN parallèles ou flash réalisent la conversion en une période d'horloge ;
- les CAN à approximations successives procèdent à des essais successifs pour arriver à la solution ;
- les CAN à largeur d'impulsion modulée (charge ou décharge d'une capacité durant le cycle de conversion).

Les CAN parallèles ou "flash" :

Ce sont les plus rapides. La FIGURE 9.7 donne le schéma de principe pour un convertisseur 3 bits. Ce type de convertisseur utilise un comparateur analogique séparé pour chaque niveau de quantification. Pour n bits de résolution, $2^n - 1$ comparateurs sont nécessaires. La complexité du système croît donc très vite avec le nombre de bits. L'opération de conversion est effectuée en un seul cycle d'horloge, d'où son nom de convertisseur "flash".

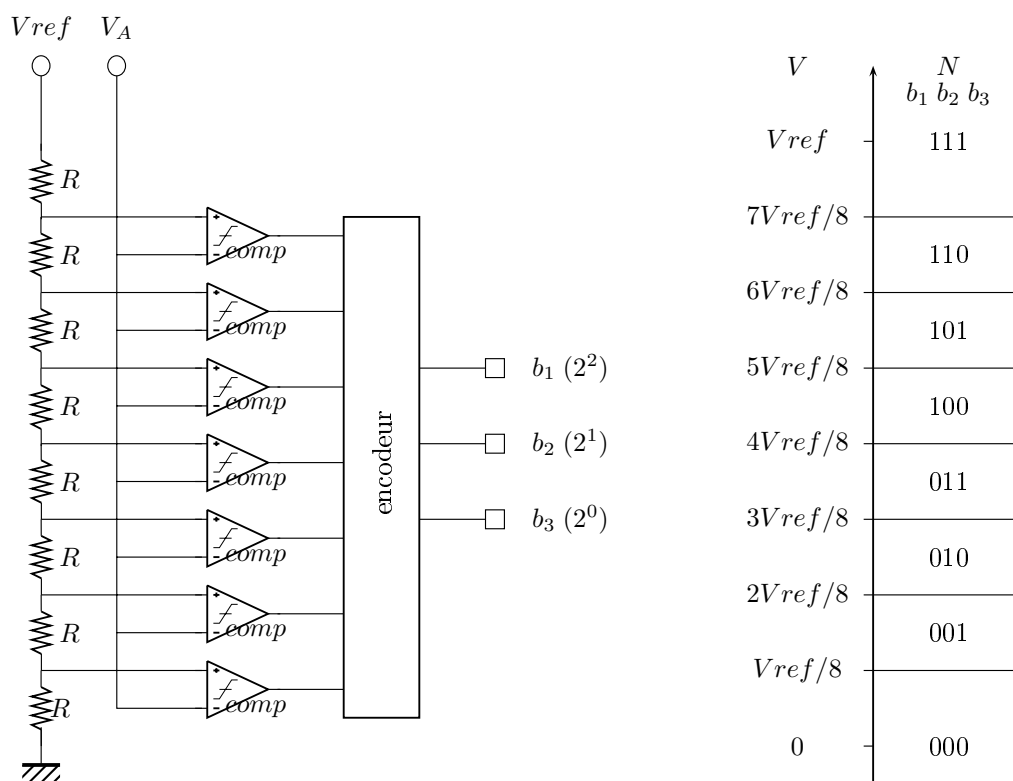


FIGURE 9.7 – CAN "flash"

La plus large gamme d'applications de ce type de convertisseurs est le traitement du signal vidéo. Ils sont utilisés dans la compression de bande vidéo, la transmission vidéo numérique, l'analyse de signal radar notamment. Ces applications requièrent des vitesses de conversions dans la gamme de 50MHz à 1GHz voire au-delà.

Les CAN à approximations successives

Ces convertisseurs permettent des vitesses plus réduites que les convertisseurs flash mais la complexité matérielle est réduite.

Le schéma de principe est donné FIGURE 9.8. Les différents bits de la décomposition binaire de V_A sont déterminés les uns après les autres, en commençant par le bit de plus fort poids. Pour en comprendre le fonctionnement, on peut se référer à la relation :

$$V_A = V_{ref} \left(\frac{b_1}{2} + \dots + \frac{b_n}{2^n} \right)$$

- instant 1 : on compare V_A à $V_1 = (V_{ref}/2)$. Si V_A est supérieur à $(V_{ref}/2)$, on sait que $b_1 = 1$ et il faut ajouter $(V_{ref}/4)$; si V_A est inférieur à $(V_{ref}/2)$, on sait que $b_1 = 0$ et il faut remplacer $(V_{ref}/2)$ par $(V_{ref}/4)$.
- instant 2 : on compare V_A à $(V_{ref}/4)$ ou $(3V_{ref}/4)$, selon le résultat précédent, soit à $V_2 = b_1(V_{ref}/2) + (V_{ref}/4)$. Si V_A est supérieur à V_2 , $b_2 = 1$ et on ajoute $(V_{ref}/8)$; si V_A est inférieur à V_2 , $b_2 = 0$ et on remplace $(V_{ref}/4)$ par $(V_{ref}/8)$.
- on continue ainsi en essayant les différentes tensions jusqu'à $(V_{ref}/2^n)$.

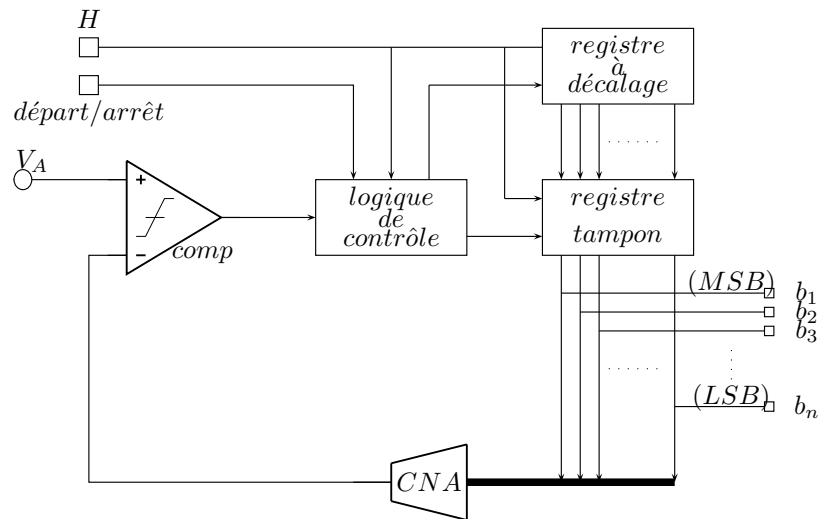


FIGURE 9.8 – CAN à approximations successives

Les trois éléments essentiels d'un convertisseur à approximations successives sont :

- le CNA qui génère les tensions pondérées ;
- le comparateur qui compare V_A aux différentes tensions ;
- la logique de commande et de contrôle qui traite le signal de sortie du comparateur.

Le CAN à approximations successives est un CAN série puisque qu'on élabore un bit à chaque étape, il faut n périodes d'horloge pour obtenir une précision de n bits.

Les CAN à largeur d'impulsion modulée

Ce sont des convertisseurs indirects. Le signal analogique est tout d'abord converti en impulsion dont la durée est proportionnelle à la tension analogique V_A comme indiqué FIGURE 9.9.

Avant le départ du cycle de conversion, le compteur est remis à zéro et l'interrupteur S_1 est fermé (charge de C_1 nulle). Le cycle de conversion démarre avec l'ouverture de S_1 et le courant I_1 génère une rampe de tension aux bornes de C_1 . Pendant ce temps, le compteur compte les cycles d'horloge. Quand la rampe linéaire atteint la tension V_A , le comparateur change d'état et arrête le comptage, le cycle est terminé. L'état du compteur est l'équivalent numérique de la tension V_A . En effet il faut N'_T impulsions pour atteindre V_{ref} et N' pour

atteindre V_A , on a la relation :

$$N' = N'_T(V_A/V_{ref})$$

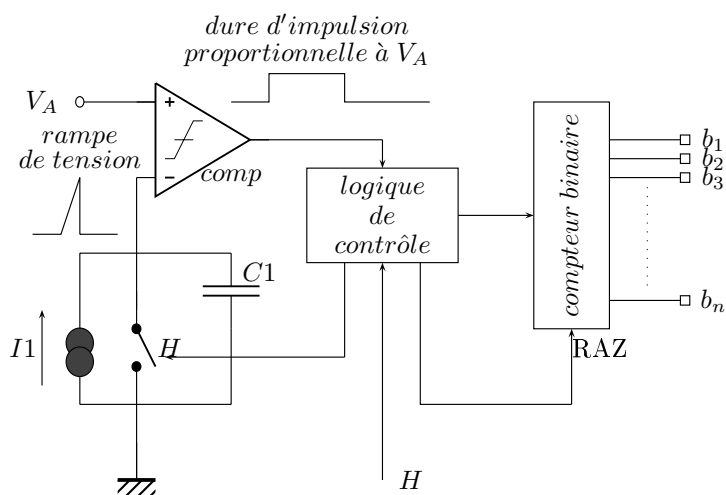


FIGURE 9.9 – CAN à rampe

La FIGURE 9.10 représente le CAN simple rampe et la figure FIGURE 9.11 le chronogramme associé. La différence avec le schéma de base est la présence de $(-V_i)$ et du comparateur 1. Au départ de la conversion S_1 est ouvert et C_1 se charge avec une rampe de pente $1/R_1C_1$, à partir de $-V_i$. Au passage à zéro, le comparateur 1 bascule et déclenche le compteur. Le comptage se termine lorsque le comparateur 2 bascule, donc lorsque la sortie de l'intégrateur passe par V_A .

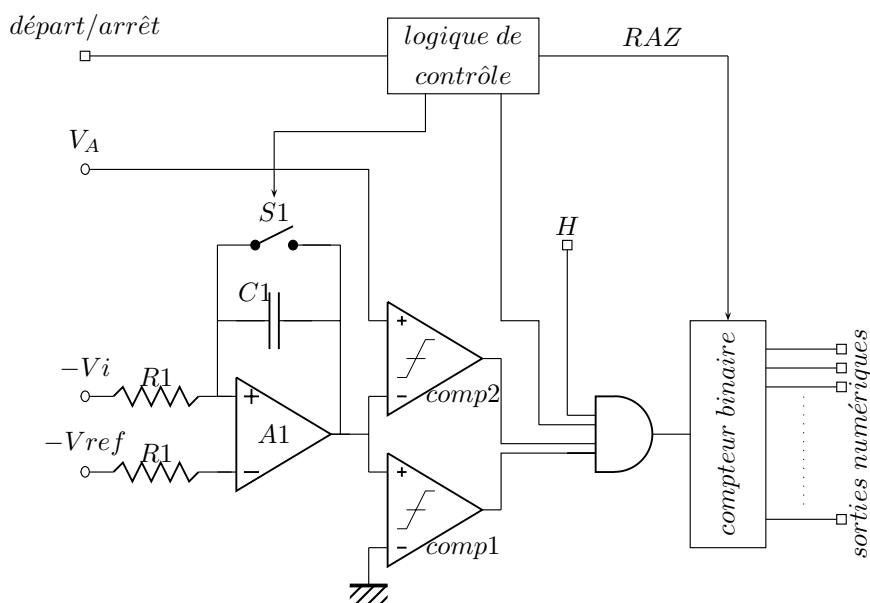


FIGURE 9.10 – CAN simple rampe

L'inconvénient de ce convertisseur est que la précision dépend très fortement de la valeur du produit $R_1 \times C_1$. Pour éviter ce problème, on utilise la technique de conversion double rampe.

La conversion se déroule en deux phases :

- en phase 1 l'intégration se fait avec $-V_A$ et la pente de la rampe est : $\frac{dV_x}{dt} = \frac{V_A}{R_1 C_1}$ et on compte 2^n cycles d'horloge
- en phase 2, l'intégration se fait avec V_{ref} et la pente de la rampe est :

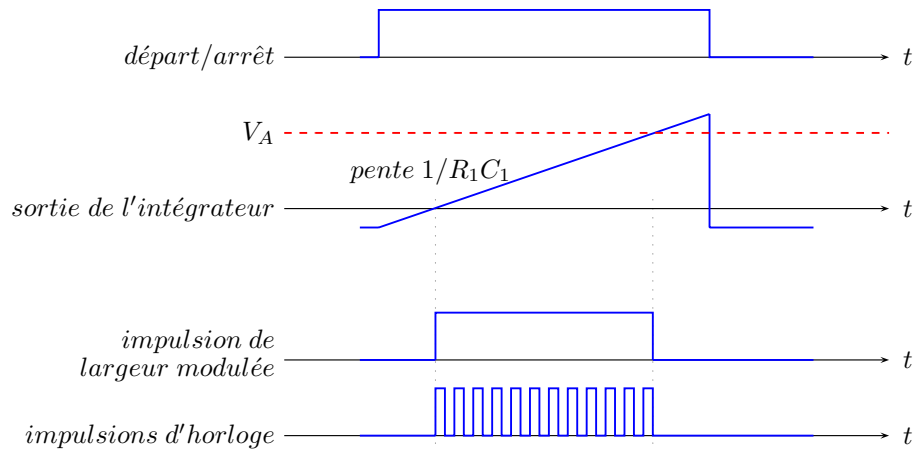


FIGURE 9.11 – Chronogramme d'un CAN simple rampe

$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{V_{ref}}{R_1 C_1}$, les impulsions d'horloge comptées : N' sont données par la relation :

$N' = 2^n (\frac{V_A}{V_{ref}})$, N' nombre entier. On s'affranchit ainsi de l'imprécision sur le produit $R_1 C_1$. Mais le cycle de conversion dure $(2^n + N')T_H$.

La résolution peut atteindre 20 bits. Des architectures quadruple rampes sont parfois utilisées pour atteindre les résolutions les plus élevées. Les deux rampes supplémentaires servent alors à un calibrage à partir d'une valeur connue avant l'acquisition proprement dite. Cette architecture, autrefois très largement répandue notamment pour des applications en instrumentation, est souvent avantageusement remplacée aujourd'hui par des convertisseurs à modulation sigma-delta et sur-échantillonnage. Ceux-ci permettent d'atteindre les mêmes résolutions tout en nécessitant moins de calibrage.

Remarque :

Les trois architectures de CAN présentés dans ce cours, sont les principales architectures dites « classiques ». Nous pouvons encore ajouter le CAN à transfert de charges, non traité ici.

9.3.3 Exemples

Le tableau TABLE 9.1 donne quelques exemples de caractéristiques de convertisseurs analogique-numérique.

Architecture	Débit(éch./sec)	ENOB	P(mW)
Flash	$1,3 \times 10^9$	5	600
Approximation successive	3×10^6	14	110
Double rampe	3	22	900

TABLE 9.1 – Exemples de caractéristiques de C.A.N.

Les caractéristiques des convertisseurs sont souvent associées au sein d'une fonction de mérite liant la puissance consommée P , la résolution effective en nombre de bits $ENOB$ et la bande passante admissible BW .

Cette équation est de la forme : $FdM = \frac{P(mW)}{BW(MHz) \times 2^{ENOB}}$

où FdM représente une énergie exprimée en pJ .

Pour une largeur de bande donnée, FdM représente l'énergie nécessaire à l'obtention d'1bit de résolution. Réduire cette figure de mérite est en permanence un défi pour les chercheurs et développeurs de convertisseurs. Cette figure de mérite permet de comparer les performances de différentes architectures de convertisseurs ou de plusieurs convertisseurs basés sur une même architecture. Le nombre effectif de bits est calculé en fonction du rapport signal

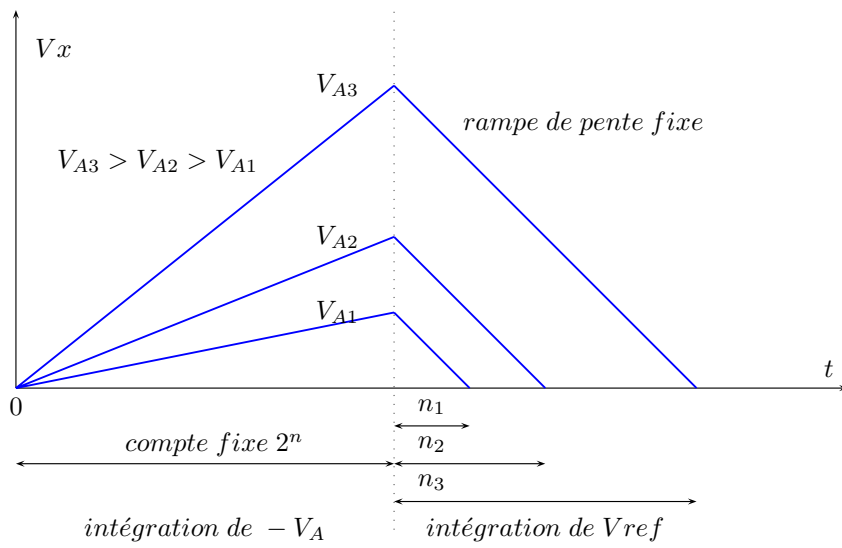
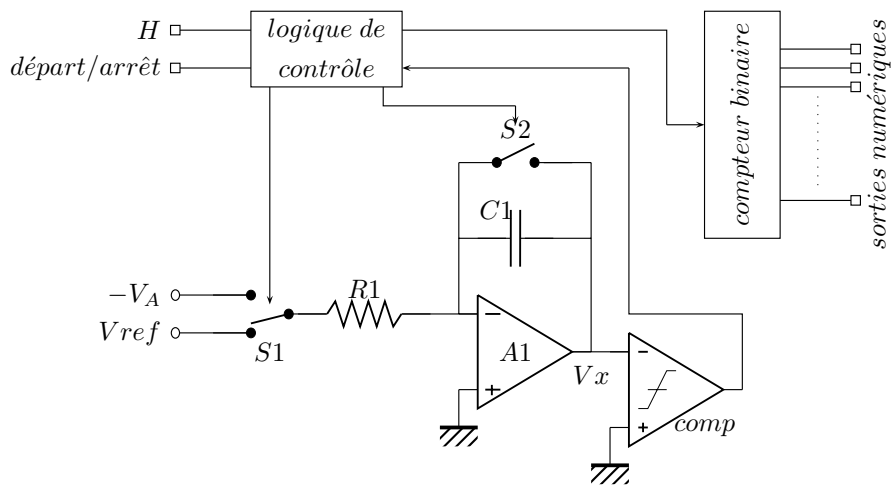


FIGURE 9.12 – CAN double rampe

sur bruit de quantification et distorsion. Les distorsions induites par la conversion jouent en effet un rôle fondamental pour de nombreuses applications.

La suite de ce chapitre traite de façon assez complète des Convertisseurs Numérique-Analogique. Cette partie n'est pas directement au programme du cours, mais est là pour compléter ce chapitre sur la conversion.

9.4 Conclusions sur la Conversion

Les deux paramètres importants dans le choix d'un convertisseur sont la résolution et la précision d'un côté et la rapidité de l'autre. Ces deux paramètres ne sont pas compatibles.

Si l'on souhaite des convertisseurs très rapides, on utilise les CNA ou CAN parallèles. La conversion se fait en une période d'horloge mais la résolution est vite limitée par la complexité du circuit. Les applications principales sont dans le domaine de la vidéo. La technologie est bipolaire ou MOS.

Si l'application impose une grande résolution et une bonne précision, il faut choisir des convertisseurs à largeur d'impulsion modulée (ou indirects). Le temps de conversion sera au moins de 2^n périodes d'horloge. Les applications principales sont dans l'instrumentation basses fréquences. Ils sont normalement fabriqués en technologie CMOS.

Un bon compromis entre les deux paramètres est obtenu avec les CAN à approximations successives et les CNA séries. Leurs domaines d'applications sont les télécommunications, les interfaçages avec les microprocesseurs. Le temps de conversion est d'environ n périodes d'horloge. La technologie employée est du CMOS ou du bipolaire suivant la vitesse souhaitée.

Ce chapitre a traité des convertisseurs "classiques" dits sans mémoire. En effet on ne tient pas compte de l'évolution du signal d'entrée avant la prise de l'échantillon. Il existe les convertisseurs de type $\Sigma\Delta$ qui sont à mémoire et qui donnent d'excellents résultats. Ils sont présentés dans d'autres modules d'enseignement.

9.5 Exercice : Chaîne de Conversion

On désire numériser un signal de 80 MHz de bande avec une résolution de 69 dB (Fig. 9.13).

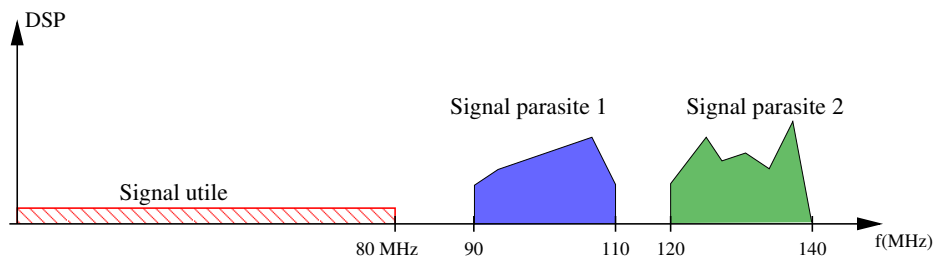


FIGURE 9.13 – Densité spectrale de puissance du signal

Question 9.5.1 Donner la fréquence d'échantillonnage minimale F_{e-min} qu'on pourra utiliser et expliquer pourquoi il sera nécessaire d'utiliser un filtre anti-repliement avant cette phase d'échantillonnage.

En se basant sur l'analyse des puissances des interféreurs et du signal utile, on a déterminé qu'une atténuation minimale A_{min} de 80 dB doit être appliquée à tous les interféreurs. Dans la bande d'intérêt, l'ondulation maximale acceptée est $A_{max} = 1$ dB.

Question 9.5.2 Donner un gabarit d'affaiblissement possible pour le filtre anti-repliement pour F_{e-min} .

Question 9.5.3 Que deviendra le gabarit d'affaiblissement du filtre si on prend $F_e = 200 \text{ MHz}$? Quels sont les avantages et inconvénients des deux solutions étudiées ?

Pour des raisons liées à l'implémentation, on désire que notre convertisseur analogique numérique (CAN) ait une dynamique d'entrée de 1 à 4V.

Question 9.5.4 Pour un signal d'entrée de moyenne 2.5 V et d'amplitude 1 V, déterminer l'expression en dB du SNR en sortie du CAN. Déduisez-en le nombre de bits nécessaires pour assurer la résolution requise.

9.6 Exercice : Conversion incrémentale

Le schéma de principe est représenté sur la FIGURE 9.14.

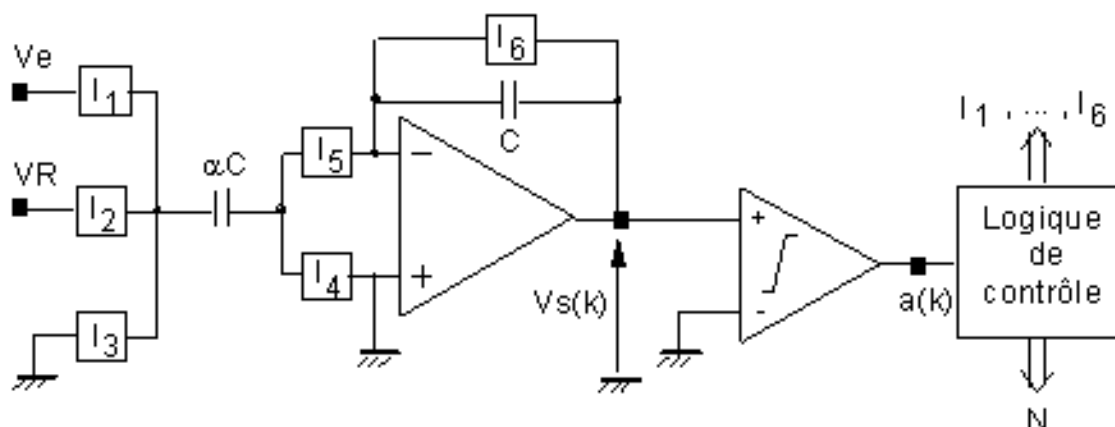


FIGURE 9.14 – Convertisseur incrémental

Une conversion est constituée d'une phase d'initialisation ($I_6 = 1$) et d'un certain nombre de cycles d'"intégration" indicés k durant lesquelles la tension à convertir V_e est constante.

V_R est la tension de référence du convertisseur.

Chaque cycle d'intégration est composée de 4 phases représentées sur la FIGURE 9.15.

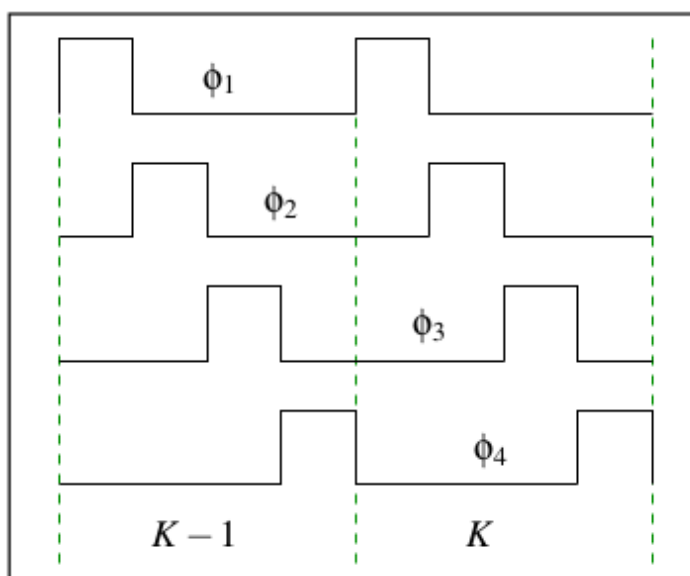


FIGURE 9.15 – Chronogramme des phases

La commande des interrupteurs est donnée dans les tableaux ci-après.

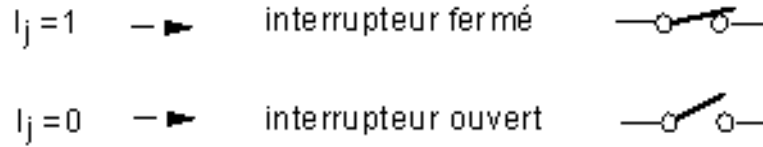
On note $V_s^i(k)$ la tension de sortie de l'amplificateur opérationnel à la fin de la phase Φ_i et $V_s(k)$ la tension en fin de cycle k ($V_s(k) = V_s^4(k)$).

$a(k)$ est un élément binaire associé à la tension de sortie $V_s^2(k)$ tel que :

— $a(k) = 1$ si $V_s^2(k) > 0$;

— $a(k) = 0$ si $V_s^2(k) < 0$.

A chaque interrupteur est associé une variable binaire I_j telle que :



	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	$a = 0$	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	$a = 1$	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
ϕ_1	1	0	0	1	0	ϕ_3	0	1	0	1	0	ϕ_3	0	0	1	1	0
ϕ_2	0	0	1	0	1	ϕ_4	0	0	1	0	1	ϕ_4	0	1	0	0	1

TABLE 9.2 – Commande des interrupteurs

L'analyse des transferts de charge, traitée dans l'exercice 5.6.3, donne les relations suivantes :

$$V_s^2(k) = V_s(k-1) + \alpha V_e$$

$$V_s(k) = V_s^4(k) = V_s^2(k) - \alpha \cdot VR \cdot (a(k) - \bar{a}(k))$$

Question 9.6.1 Sachant que $-VR < Ve < VR$, $VR > 0$ et $V_s(0) = 0$, montrer par récurrence que pour tout k : $-\alpha VR < V_s(k) < \alpha VR$

Après une phase d'initialisation ($I_6 = 1$), on effectue $2p$ cycles d'intégration.

Question 9.6.2 Calculer $V_s(2p)$.

Question 9.6.3 Montrer avec l'encadrement précédent que l'on peut écrire : $-q/2 < Ve - Nq < q/2$

Question 9.6.4 Expliciter q et N .

La résolution en nombre de bits est donnée par $\log_2((\max Ve - \min Ve)/q) = n$.

Question 9.6.5 Déterminer $n = f(p)$.

Considérons l'exemple suivant : $VR = 10V$, $Ve = 6V$, $\alpha = 1/2$ et $n = 4$ bits soit $2p = 16$.

Question 9.6.6 Faire le diagramme des temps de V_s sur 16 cycles d'intégration.

9.7 Bibliographie

- [1] W. R. Bennett. Spectra of quantized signals. *Bell Systems Technical Journal*, Jul 1948.
- [2] P. Jespers. *Integrated Converters : D to A and a to d Architectures, Analysis and Simulation*. Oxford University Press, Jan 2001.
- [3] F Maloberti. *Data Converters*. Springer, 2007.
- [4] R. Schreier and G. Temes. *Understanding Delta-Sigma Data Converters*. Wiley-Interscience, 2005.

TP conversion

Chapitre 10

Travaux pratiques : Conversion analogique-numérique

10.1 Introduction

Dans les TP précédents, nous avons implémenté dans le domaine analogique des effets musicaux tels que la distortion, le Tremolo et l'effet WahWah. D'autres phénomènes tels que l'octaver¹ ou l'écho s'implémentent plus facilement dans le domaine numérique. Un élément clé d'une telle chaîne est le convertisseur analogique-numérique (CAN) et sera ainsi le sujet principal de ce TP

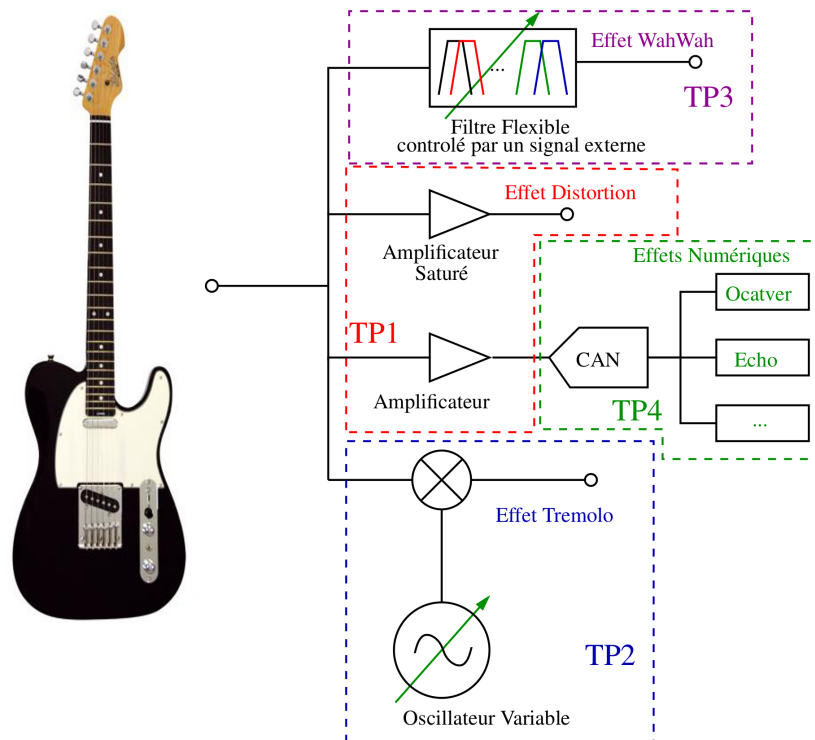


FIGURE 10.1 – Effets musicaux sur la guitare électrique

Pour rappel, le signal de la guitare a une bande passante de 20 KHz et nous souhaitons le numériser avec un SNR minimum de 90 dB afin de garantir une bonne qualité audio pour le signal. Pour respecter le théorème d'échantillonnage, il faut échantillonner ce signal au moins à 40 KE/s (kilo-échantillons/s).

1. L'octaver est un effet audio qui a pour but de transposer à une ou plusieurs octaves en dessous ou au-dessus la tonalité du signal entrant.

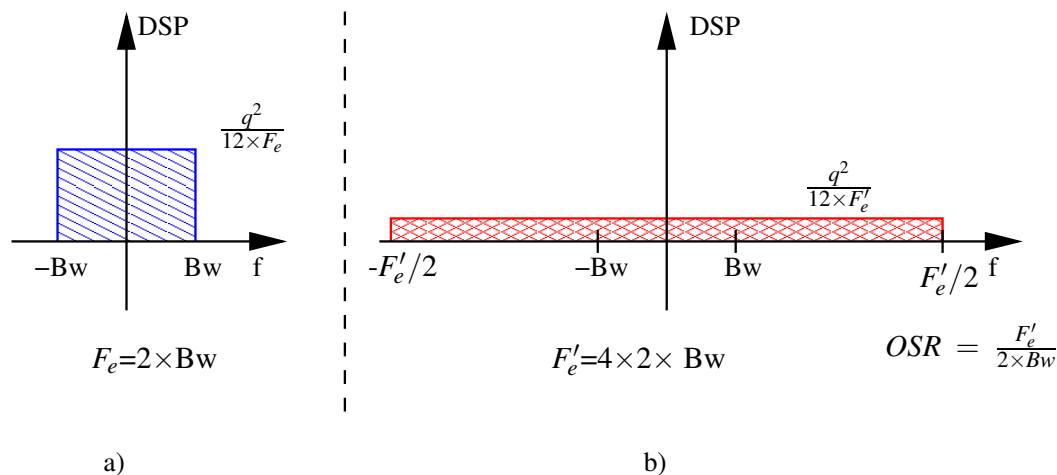


FIGURE 10.2 – Densité spectrale de puissance du bruit de quantification a) pour un scénario sans sur-échantillonnage ; b) pour un $OSR = 4$

Les expérimentations utiliseront le logiciel Octave d’une part et la plateforme d’acquisition ADALM 1000 d’autre part.

10.2 CAN Flash

Dans cette partie, on désire implémenter ce convertisseur en utilisant l’architecture Flash (Voir section 9.3.2). On montre dans le cours que le SNR peut s’exprimer en fonction d’un nombre de bit de quantification n par :

$$SNR_{dB} \approx 6.02n + 1.76$$

Question 10.2.1 Charger le fichier `flash.m` dans l’éditeur de *Octave*. Fixer le nombre de bit n dans le script en utilisant la formule du SNR et visualiser le signal en sortie ainsi que son spectre. Comparer le SNR pratique au SNR théorique.

Question 10.2.2 En vous appuyant sur le cours, discuter les désavantages d’une telle implémentation.

Pour réduire la complexité de notre CAN, on décide de faire du sur-échantillonnage. En d’autres termes, au lieu d’échantillonner le signal à 2 fois la bande passante, en l’occurrence 40 KHz (2×20 KHz), on va échantillonner le signal à OSR (oversampling ratio) fois 40 KHz. Ceci aura pour effet d’étaler le bruit de quantification sur une plage de fréquence plus large comme illustré à la Fig. 10.2, et donc de réduire le niveau de bruit dans la bande utile. On pourra ensuite appliquer un filtrage passe bas dans le domaine numérique pour éliminer le bruit pour les fréquences supérieures à BW .

On peut aussi montrer que lorsqu’il y a sur-échantillonnage, le SNR peut être exprimé en fonction du nombre de bit n et du coefficient de sur-échantillonnage $OSR = \frac{F_s}{2 \times BW}$ par :

$$SNR_{dB} \approx 6.02n + 1.76 + 10 \log_{10}(OSR)$$

Question 10.2.3 En déduire la nouvelle valeur de n nécessaire pour l’obtention de la résolution ciblée avec une fréquence d’échantillonnage de 4 MHz ou un OSR de 100.

Question 10.2.4 Fixer OSR à 100 dans le fichier `flash.m` et n à la valeur obtenue dans la question précédente. Visualiser le signal en sortie ainsi que son spectre. Comparer le SNR pratique au SNR théorique.

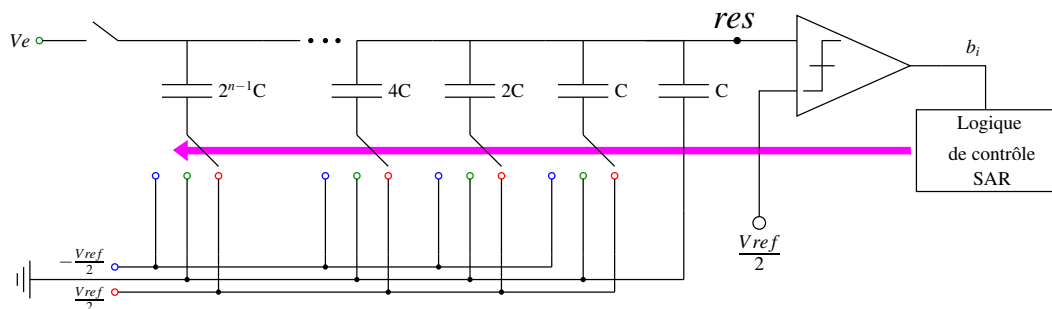


FIGURE 10.3 – Circuit d'un Convertisseur à approximations successives SAR

Ainsi, le sur-échantillonnage permet de réduire la surface du circuit électronique en diminuant le nombre de comparateurs nécessaires à l'obtention du SNR cible. Cette diminution du nombre de composants se fait au coût d'une fréquence d'échantillonnage significativement augmentée (4 MHz en l'occurrence) et n'est pas suffisante pour rendre cette solution utilisable. En fait, les convertisseurs Flash sont plutôt utilisés pour la conversion des signaux large bande (plusieurs centaines de MHz) à faible résolution (6 à 8 bits). Pour la conversion des signaux audio, 2 architectures de CAN sont très largement utilisées, les architectures Sigma Delta et les architectures à approximations successives connues sous le nom d'architectures SAR². Nous proposons d'utiliser cette dernière pour la conversion de notre signal audio.

10.3 Convertisseur à approximations successives SAR

Le principe de fonctionnement de l'architecture SAR, comme son nom l'indique, consiste à réaliser la conversion avec des approximations successives (section 9.3.2). Le script `SAR_principe.m` permet d'illustrer la logique de fonctionnement de ce CAN. Chargez le fichier, pensez à un entier entre 0 et 100, répondez aux questions successives qui apparaissent sur la fenêtre des commandes.

Question 10.3.1 *Quelle est l'approche utilisée par le script et donc par les CAN SAR pour retrouver votre chiffre et combien d'itérations ont été requises pour atteindre cet objectif.*

Pensez à présent à un chiffre entre 0 et 1000, changer dans le script `max` à 1000.

Question 10.3.2 *Combien d'itérations a-t-on eu besoin pour faire la conversion pour cette nouvelle plage de valeur? Proposez une approche théorique qui permet de lier le nombre d'itérations à la plage.*

Une implémentation possible de l'architecture SAR est illustrée dans la figure 10.3. En début de chaque période de conversion, le signal d'entrée V_e est échantillonné en connectant toutes les capacités entre V_e et la masse. La détermination du signal de sortie numérique se fera sur n sous-cycles en allant du bit du poids fort b_1 au bit du poids faible b_n . Pendant ces sous-cycles suivants, V_e est déconnecté et cycle par cycle les capacités sont connectées à $\frac{V_{ref}}{2}$ ou $-\frac{V_{ref}}{2}$ en fonction des sorties b_i . Le calcul du signal de résidu res_i et des bits de sortie se fait suivant les règles suivantes :

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{si } res_i > \frac{V_{ref}}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$res_{i+1} = \begin{cases} res_i - \frac{V_{ref}}{2^{i+1}} & \text{si } b_i = 1 \\ res_i + \frac{V_{ref}}{2^{i+1}} & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Successive Approximation Register

$$res_1 = Ve$$

La valeur analogique équivalente à la sortie numérique est donnée par :

$$y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{Vref}{2^i}$$

Question 10.3.3 *En vous appuyant uniquement sur les équations ci-dessus dans un premier lieu, expliquer pourquoi l'architecture de la figure 10.3 permet d'implémenter une approche similaire que celle suivie dans SAR_principe.m.*

Question 10.3.4 *Déterminer les valeurs de res_i et de b_i pour i de 1 à 4 pour un CAN SAR 4-bit de dynamique 0 à 4 V (Tension de référence $Vref = 4$ V) pour un signal d'entrée Ve de 1.7 V. Calculer aussi l'erreur de quantification.*

Question 10.3.5 *Charger le fichier SAR_statique.m, comparer les résultats obtenus dans la question précédente aux résultats de simulation.*

Question 10.3.6 *Dessiner la configuration finale d'un CAN SAR 4 bit pour un Ve de 1.7 V.*

Les contraintes en vitesse sur le comparateur ainsi que sur le réseau capacitif sont fixées par la durée du sous-cycle.

Question 10.3.7 *Déterminer la durée du sous-cycle pour assurer un signal en sortie de 40 KE/S avec une résolution de 90 dB.*

Question 10.3.8 *Charger le script SAR_dynamique.m qui permet de réaliser une simulation d'un CAN SAR pour une entrée dynamique. Régler la durée du sous-cycle Tsc à la valeur obtenue dans la question précédente. Relever la valeur du SNR.*

Question 10.3.9 *En vous appuyant sur les analyses et simulations faites dans cette section, comparer brièvement l'architecture SAR à celle d'un Flash.*

10.4 Numérisation et effets musicaux

Pour les expérimentations, nous allons utiliser la plateforme ADALM 1000³ illustrée dans la Figure 10.4. Elle intègre deux CANs SAR AD7682 dont les performances sont en adéquation avec nos spécifications. Elle intègre également une partie numérique (micro-contrôleur et interface USB) qui permet de transférer les données numérisées à l'ordinateur. La fréquence d'échantillonnage f_e sera fixée à 40 KHz. Le CAN a une plage d'entrée de 0 à 4 V. Nous allons commencer par tester le CAN SAR avec un signal sinusoïdal. Charger le fichier Acq_Dyn.m qui vous permettra de visualiser le signal de sortie en temporel ainsi que son spectre.

Question 10.4.1 *Appliquer un signal sinusoïdal de fréquence 5 KHz et d'un offset de 2 V à l'entrée du CAN.⁴ Faites varier l'amplitude de 0.25 Vpp à 4 Vpp (en passant par 0.5 Vpp, 1 Vpp et 2 Vpp), relever la valeur du SNDR pour chaque mesure et analyser sa variation en fonction de l'amplitude.*

Nous allons à présent numériser le signal de la guitare⁵. Pour rappel, le signal issu de la guitare a une dynamique de ± 250 mV avec une tension moyenne nulle. Fréquemment,

3. (<https://wiki.analog.com/university/tools/m1k>)

4. Pour cette manipulation, connectez le générateur à une des entrées BNC de la maquette et connectez la sortie "pointe" correspondante à l'entrée CH A.

5. Si vous n'êtes pas à l'aise avec une guitare, vous pouvez utiliser le signal audio pré-enregistré sur le générateur. Pour ce faire, aller dans le mode *Arb* \rightarrow *Arb Waveform Menu* \rightarrow *user1*. Fixer la période à 5.7 secondes.

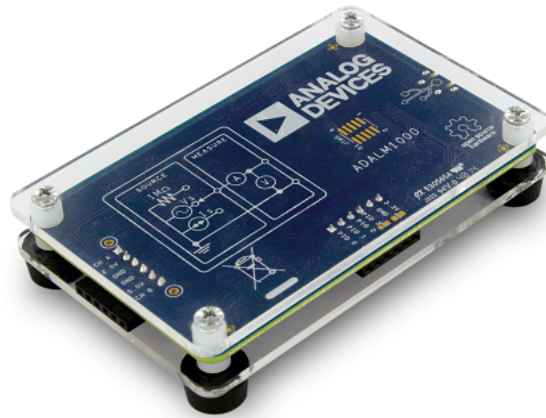


FIGURE 10.4 – Adalm 1000

ce signal pourrait avoir des composantes sur un spectre allant de 50 Hz à 20 KHz. Afin de solliciter toute la dynamique du CAN (0 à 4 V, nous utiliserons l'amplificateur conçu dans le TP1 (figure 10.5) qui permet d'amplifier le signal de la guitare par environ un facteur 7 et de le centrer autour de 2 V. Un circuit identique a été disposé sur la breadboard de la maquette de l'ADALM. L'impédance d'entrée du CAN est de 1 M Ω permettant ainsi de directement connecter l'amplificateur sans passer par un circuit tampon (driver). Notez aussi que la capacité $C1$ a été modifiée, 100 nF au lieu de 10 nF, afin de résoudre le problème de la fréquence de coupure basse relevé pendant le TP1. Avec cette nouvelle valeur de capacité, la fréquence de coupure est de 34 Hz comparée à 340 Hz pour une capacité de 10 nF.

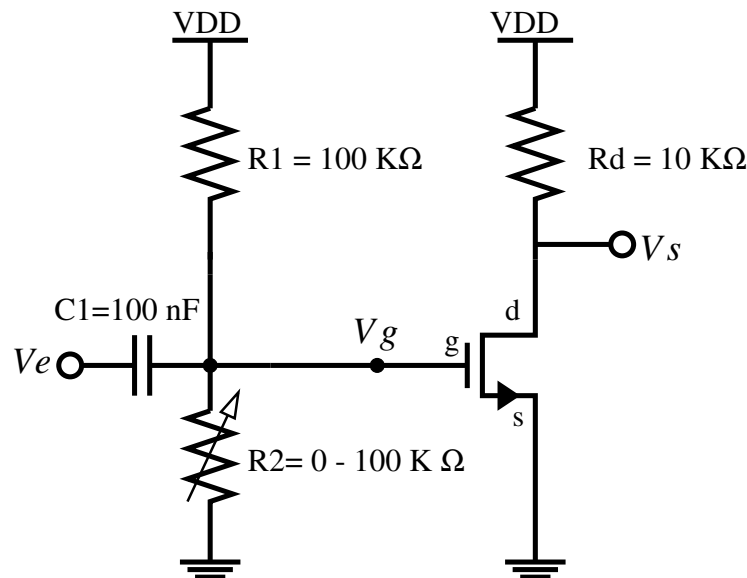


FIGURE 10.5 – Montage amplificateur avec réseau d'entrée

Question 10.4.2 Charger le fichier *Acq_Guitare.m*. La variable *Compteur* vous permet de régler le retard entre le lancement du programme et le début de l'acquisition. La durée de l'enregistrement est fixée à 12.5 s. Si vous souhaitez ré-écouter votre acquisition, il vous suffit de taper *soundsc(y, fe)*; dans votre console. Une fois que vous êtes satisfaits de votre enregistrement, fixez la variable *Acquisition* à 0 pour arrêter de faire de nouvelles acquisitions.

Le premier effet musical que nous allons mettre en place est l'octaver. L'effet voulu est de

transposer le signal vers une octave inférieure ou supérieure. La fonction `smbPitchShift` permet d'implémenter cet effet.

Question 10.4.3 *Tester la fonction `smbPitchShift`. Ajuster la variable `shift` à 0.5 pour transposer à l'octave en dessous et à 2 pour l'octave au dessus. Une note `do` de la 5eme octave a son harmonique principal à une fréquence f_{do} 1046.5 Hz et des harmoniques à des multiples de cette fréquence. Quelle serait la composition fréquentielle du signal dans le cas d'une transposition vers le haut ou vers le bas.*

Question 10.4.4 *Implémenter un autre effet musical tel que l'écho en expliquant l'approche suivie pour le faire.*

Chapitre 11

Travaux Dirigés : MoDem ADSL

11.1 Généralités

L'ADSL offre des services numériques rapides sur le réseau cuivré existant en superposition et sans interférence avec le service téléphonique analogique traditionnel. La figure 11.1 présente les bandes de fréquence occupées par les différents services :

- Le service téléphonique classique occupe la bande 0 à 4 kHz.
- Le service multimédia ADSL en liaison montante occupe 27 canaux de largeur 4,3 kHz à partir de 25 kHz.
- Le service multimédia ADSL en liaison descendante occupe 223 canaux de largeur 4,3 kHz jusqu'à la fréquence maximale de 1,1 Mhz.

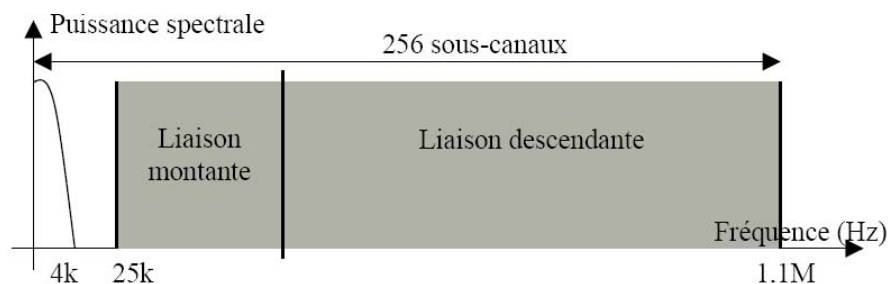


FIGURE 11.1 – Allocation des fréquences pour les signaux transmis sur une paire torsadée

Cette répartition des canaux permet au client de recevoir du serveur bien plus d'informations qu'il est capable d'en générer. Chaque sous-canal présente une modulation d'amplitude en quadrature (QAM) sur 2^N niveaux, N variant entre 2 et 15 pour la liaison descendante et entre 2 et 6 pour la liaison montante. Une plus grande précision est transmise en liaison descendante car le signal atténué en bout de ligne est moins soumis à la diaphonie chez le client qu'au niveau du central téléphonique. La superposition des signaux de l'ensemble des canaux génère un symbole DMT (Discrete Multi Tone) et la durée de chaque symbole est fixée à $250\mu s$.

Question 11.1.1 *Quel est le débit théorique maximal de la ligne (en liaison montante et descendante) ?*

Les débits réels sont fixés par autotest en fonction de l'état de la ligne. Certains sous-canaux peuvent être inutilisables ou le nombre de niveaux par sous-canal peut être réduit. La qualité suffisante pour qu'un symbole DMT puisse contenir 15 bits par sous-canal correspond à un SNR par canal de 80dB. Le SNR (Signal to Noise Ratio) correspond au rapport entre la puissance utile d'un sous canal et la puissance du bruit à la même fréquence.

11.2 Numérisation d'un signal ADSL liaison descendante

Nous étudions la transmission de données du central téléphonique vers le particulier sur la boucle locale. Le signal circule sur une paire torsadée en cuivre et l'information complète véhiculée est prélevée grâce à un coupleur. A partir de là, le signal analogique doit être numérisé car l'ensemble du traitement de démodulation est effectué en numérique.

Question 11.2.1 *Sachant que le signal prélevé en bout de ligne est atténué et bruité, quels sont les trois éléments fondamentaux que contient la chaîne de numérisation ?*

11.3 Filtrage

Un filtre (splitter) est utilisé pour séparer les signaux ADSL liaison descendante des signaux POTS (Plain Old Telephone Service). L'atténuation fournie en bande atténuée doit réduire le signal téléphonique classique de 60dB. L'atténuation maximale autorisée dans la bande passante est de 1 dB.

Question 11.3.1 *Déterminer le gabarit du filtre de sélection de bande.*

Question 11.3.2 *Pour réaliser ce filtrage, on utilise un filtre actif passe-haut Butterworth d'ordre n . Montrer que l'atténuation de ce filtre à la fréquence f , $A(f)$, peut se mettre sous la forme :*

$$A(f) = 10 \cdot \log_{10} \left(1 + \left(\frac{f_0}{f} \right)^{2n} \right)$$

Question 11.3.3 *Déterminer les valeurs de f_0 et n (entier) pour respecter le gabarit voulu.*

Question 11.3.4 *Justifier que la bande transmise en hautes fréquences par le filtre réel n'est pas infinie.*

11.4 Amplification

Les standards ADSL définissent les niveaux de puissance des signaux transmis en liaison descendante. Les puissances reçues dans les 223 sous-canaux sont quasiment identiques et comprises entre -56dBm/Hz et -44dBm/Hz en fonction de la longueur de la boucle. Le bruit thermique de la paire torsadée est le bruit minimal pour l'ADSL :

$$N_{AWGN} = -140dBm/Hz$$

L'objectif de l'amplificateur est de ramener la puissance totale des symboles DMT au niveau de la pleine échelle du convertisseur. La pleine échelle du convertisseur correspond à une puissance de 16,8 dBm.

Question 11.4.1 *Justifier que l'amplificateur de la chaîne de numérisation est un amplificateur à gain programmable (PGA). Quelle est la plage des valeurs du gain en dB ?*

Question 11.4.2 *D'autre part, nous utilisons un amplificateur faible bruit (LNA). En supposant qu'il est le seul élément qui détériore le rapport signal sur bruit dans la chaîne de numérisation, quel est son facteur de bruit maximal ? Le facteur de bruit d'un composant est le rapport entre le SNR en entrée du composant et le SNR en sortie du composant.*

11.5 Conversion

Un convertisseur analogique numérique (CAN) assure la numérisation des symboles DMT. Vu le faible rapport entre la fréquence maximale du signal et sa bande passante, on décide de faire la numérisation sans transposition de fréquence.

Question 11.5.1 *Quelle est la fréquence minimale pour l'échantillonnage du signal en entrée ?*

Dans le budget de bruit du système, 50% sont alloués au CAN.

Question 11.5.2 *Calculer la résolution minimale (en dB) requise pour le CAN.*

Dans le budget du CAN, 30% sont alloués au bruit de quantification. (Les 70 % restants sont alloués aux autres imperfections et bruit du CAN).

Question 11.5.3 *Calculer le nombre de bits de quantification nécessaire pour le CAN.*

Nous proposons de réaliser le CAN à partir de la cellule de conversion représentée sur la figure 11.2. La résolution des deux convertisseurs est de Mbits.

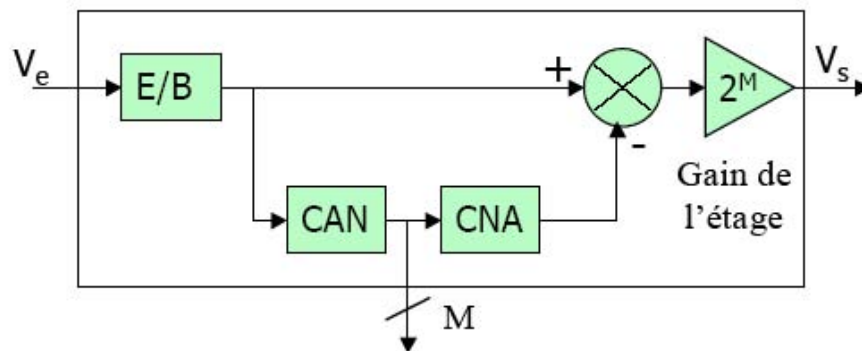


FIGURE 11.2 – Etage de conversion

Question 11.5.4 *Proposer une architecture possible pour le CAN en utilisant comme cellule de base la cellule de la figure 11.2.*
