TELECOM ParisTech

Institut Mines-Telecom

# Filtrage Numérique

Chadi Jabbour

SE208 Electronique pour les systèmes embarqués

# Plan

Caractéristiques et propriétés des filtres numériques

Types de Filtres

Synthèse des filtres

Décimation et interpolation

Conclusion



TELECOM ParisTech

# Plan

# Systèmes Discrets

- Caractérisé par une relation entrée sortie $y(n) = f[x(n)]$
- Les valeurs en entrée et en sortie ne sont connues qu'à des instants discrets
- L'intervalle de temps qui sépare deux de ces instants est la période d'échantillonnage Te

# Linéarité et invariance

## Système linéaire

$$f[ax1(n) + bx2(n)] = af[x1(n)] + bf[x2(n)]$$

La réponse à une somme d'excitations est la somme des réponses partielles aux excitations

## Système invariant

$$y(n) = f[x(n)] \Longrightarrow y(n-k) = f[x(n-k)]$$

Si la séquence d'entrée est retardée de kTe, la séquence de sortie sera également retardée de kTe

# Causalité

- Signal causal: $x(n) = 0$ si $n < 0$
- Système causal: $x(n)$ est causal $\Longrightarrow$ y(n) est causal
- La réponse ne précède jamais l'entrée (temps de propagation positif)
- Exemples de signaux causaux discrets:
  - Impulsion unité ($\delta(n)$=1 pour n=0, $\delta(n)$=0 sinon)
  - Echelon unitaire ($u(n)$=1 pour n$\geq$ 0, $u(n)$=0 sinon)

# Relation entrée sortie : produit de convolution discret

Définition:

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

**Propriétés:**

Commutativité $h(n) * x(n) = x(n) * h(n)$

Distributivité $h(n) * [e(n) + x(n)] = h(n) * e(n) + h(n) * x(n)$

Elément neutre $h(n) * \delta(n) = h(n)$

Décalage $h(n) * \delta(n-k) = h(n-k)$

# Transformée en $\mathcal{Z}$

Définition pour une entrée $x(n)$ causale:

$$TZ[x(n)] = X(\mathcal{Z}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\mathcal{Z}^{-n}$$

Transformée en $\mathcal{Z}$ de la sortie du filtre

$$Y(\mathcal{Z}) = \sum_{n}\sum_{k} x(k)h(n-k)\mathcal{Z}^{-n} = \sum_{n}\sum_{k} x(k)h(n-k)\mathcal{Z}^{-(n-k)-k}$$

$$Y(\mathcal{Z}) = \sum_{k} x(k)\mathcal{Z}^{-k}\sum_{n-k} h(n-k)\mathcal{Z}^{-(n-k)} = X(\mathcal{Z}).H(\mathcal{Z})$$

La convolution dans le domaine temporel se traduit par une multiplication dans le domaine des $\mathcal{Z}$

# Systèmes continus à systèmes discrets

| Temps continu | Temps Discret |
|---|---|
| $h(t)$ réponse impulsionnelle | $h[n]$ réponse impulsionnelle discrète |
| Réponse temporelle<br>$y(t) = x(t) * h(t)$ | Réponse temporelle<br>$y[n] = x[n] * h[n]$ |
| Fonction de transfert en p<br>$H(p)$ | Fonction de transfert en $\mathcal{Z}$<br>$H(\mathcal{Z})_{\mathcal{Z}=e^{p \cdot Te}}$ |
| Domaine complexe<br>$Y(p) = X(p) \cdot H(p)$ | Domaine complexe<br>$Y(\mathcal{Z}) = X(\mathcal{Z}) \cdot H(\mathcal{Z})$ |
| Transformée de Fourier<br>$H(p)_{p=j\omega}$ | Domaine fréquentiel<br>$H(\mathcal{Z})_{\mathcal{Z}=e^{j\omega \cdot Te}}$ |

# Stabilité

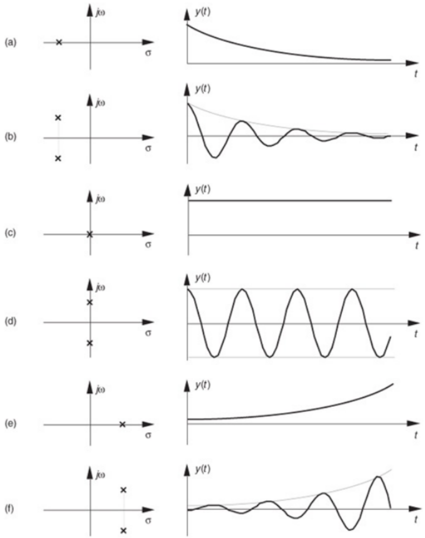
## Stablilité dans le domaine temporel

Un filtre $h(n)$ est stable si et seulement si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mid h(n) \mid < \infty$

## Stablilité dans le domaine des $\mathcal{Z}$

Un filtre $H(\mathcal{Z})$ est stable si et seulement tous ses poles sont à l'intérieur du cercle unité

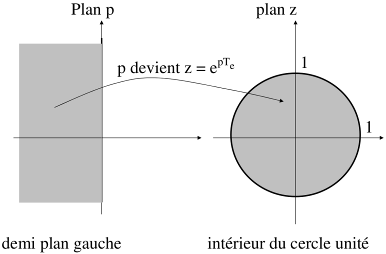
# Stabilité temps continu





TELECOM ParisTech

# Stabilité équivalence temps continu- discret



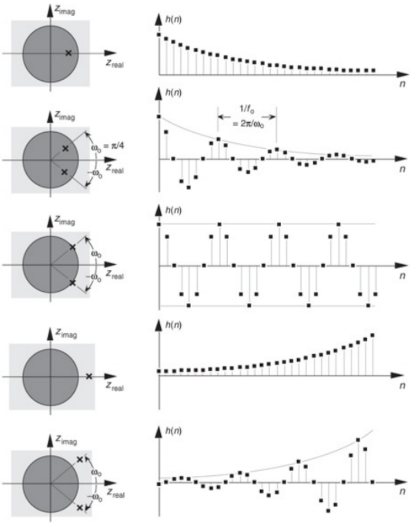

Un système de fonction de transfert H(p) est stable si les pôles sont à partie réelle négative

$$p = \sigma + j\omega \Longrightarrow \mathcal{Z} = e^{(\sigma + j\omega)Te} = e^{\sigma Te} \cdot e^{j\omega Te}$$

$$\sigma < 0 \Longrightarrow | e^{pTe} | < 1$$

# Stabilité temps discret

(a)
(b)
(c)
(d)
(e)



# Stabilité exemples

a) Calculer les réponses impulsionnelle et indicielle pour le filtre 1 sur 10 cycles. Déduisez-en si le filtre est stable ou instable

b) Etudier la stabilité des 4 filtres en analysant leurs poles.

c) Simuler les 4 filtres sous scilab et comparer vos résultats à ceux de la question précédente

1. $H(z) = \frac{1}{1-2\mathcal{Z}^{-1}}$
2. $H(z) = \frac{1+0.2\mathcal{Z}^{-1}}{1-0.8\mathcal{Z}^{-1}}$
3. $H(z) = \frac{1}{1+2\mathcal{Z}^{-1}}$
4. $H(z) = \frac{1+7\cdot\mathcal{Z}^{-1}}{1-0.3\mathcal{Z}^{-1}+0.5\mathcal{Z}^{-2}}$

# Plan

# Relation Entrée-sortie

Il existe trois approches principales pour exprimer la relation entrée-sortie d'un filtre:

- Equation aux différences
- Convolution avec la réponse impulsionnelle
- Produit avec la transformée en $\mathcal{Z}$

# 1ere approche: Equation aux différences

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

en normalisant $a_0$ à 1, ça donne

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

| $N > 1$ | $N = 0$ |
|---|---|
| Filtre à réponse récursive | Filtre à réponse non-récursive |
| $y(n)$ dépend de $y(n-k)$ | $y(n)$ ne dépend pas de $y(n-k)$ |
| Infinité de termes $x(n-k)$ | Nombre fini de terme $x(n-k)$ |
| La réponse impulsionnelle est infinie (RII, ou IIR en anglais) | La réponse impulsionnelle est finie (RIF, ou FIR en anglais) |

# 2eme approche: Réponse impulsionnelle

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

si $h(n) \neq 0$ pour $n_0 \leq n < n_0 + N - 1$ et $h(n) = 0$ sinon
$\Longrightarrow$ le filtre a une réponse impulsionnelle de longueur $N$, il s'agit donc d'un FIR

si $h(n) \neq 0$ pour $n > n_0$
$\Longrightarrow$ le filtre a une réponse impulsionnelle infinie, il s'agit donc d'un IIR

# 3eme approche: Fonction en $\mathcal{Z}$

A partir de l'équation aux différences

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

on peut calculer la transformée en $\mathcal{Z}$

$$H(\mathcal{Z}) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r \mathcal{Z}^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \mathcal{Z}^{-k}}$$

# 3eme approche: Fonction en $\mathcal{Z}$

3 types de filtres peuvent être distingués

- Filtre non récursif (FIR)

$$H(\mathcal{Z}) = \sum_{r=0}^{M} b_r \mathcal{Z}^{-r}$$

- Filtre purement récursif (IIR-cas particulier)

$$H(\mathcal{Z}) = \frac{b_0}{\sum_{k=0}^{N} a_k \mathcal{Z}^{-k}}$$

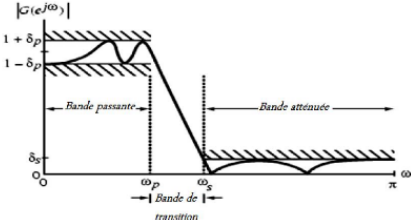
- Filtre récursif à moyenne ajustée (IIR-cas général)

$$M > 0 \quad \& \quad N > 1$$

# Plan

# Synthèse des filtres

Synthétiser un filtre revient à déterminer les coefficients $a_k$ et $b_r$ pour lesquels la réponse fréquentielle du filtre satisfait le gabarit donné.




## Approche

Partant d'un filtre analogique (Butterworth, Bessel, elliptic,...), le problème revient à établir un passage entre la transformée de Laplace et la transformée en $\mathcal{Z}$

La relation exacte $\mathcal{Z} = e^{pTe}$ donne $pTe = ln(\mathcal{Z})$

# Problématique et solution

## Problématique

En effectuant cette transformation, il est impossible d'obtenir une équation aux différences à partir de la fonction de transfert $H(p)$, puisque $H(\mathcal{Z})$ ne sera pas un rapport de polynômes en $\mathcal{Z}^{-1}$ mais une fonction de $ln(\mathcal{Z})$

## Solution

Partir d'un filtre analogique continu, utiliser une approximation sur la fonction de conversion $p$ à $\mathcal{Z}$ pour avoir un résultat similaire sur une plage de fréquence

# 1ere méthode: Invariance de la dérivée ou méthode de Euler

Dérivée en temporel

$$\frac{dx}{dt} \simeq \frac{x(t) - x(t - Te)}{Te} \simeq \frac{x(n) - x(n-1)}{Te}$$

Ce qui donne dans le domaine des $\mathcal{Z}$, $X(\mathcal{Z})\frac{1-\mathcal{Z}^{-1}}{Te}$

Par ailleurs, la transformée en p d'un dérivateur vaut $p$

Donc le passage entre $p$ et $\mathcal{Z}$ est donné par:

$$p \longrightarrow \frac{1 - \mathcal{Z}^{-1}}{Te}$$



TELECOM ParisTech

# Exemple

Filtre passe bas du premier ordre

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$$

# 2eme méthode: Invariance de l'intégrale ou transformation bilinéaire

Soit $y(t)$ l'intégrale de la fonction $x(t)$
On cherche à obtenir une approximation de cette intégrale en utilisant les échantillons de x(t).

On l'approxime par l'aire des trapèzes formés en joignant les échantillons entre eux.

$$y(n) = y(n-1) + \frac{Te}{2}(x(n) + x(n-1))$$

$$Y(\mathcal{Z})(1 - \mathcal{Z}^{-1}) = \frac{Te}{2} X(\mathcal{Z})(1 + \mathcal{Z}^{-1})$$

$$\frac{Y(\mathcal{Z})}{X(\mathcal{Z})} = \frac{Te}{2} \frac{1 + \mathcal{Z}^{-1}}{1 - \mathcal{Z}^{-1}}$$


TELECOM ParisTech

# 2eme méthode: Invariance de l'intégrale ou transformation bilinéaire

Par ailleurs, la transformée en p d'un intégrateur vaut $\frac{1}{p}$

Donc le passage entre $p$ et $\mathcal{Z}$ est donné par:

$$p \longrightarrow \frac{2}{Te}\frac{1-\mathcal{Z}^{-1}}{1+\mathcal{Z}^{-1}}$$

Cette transformation est nommée transformation bilinéaire

# 3eme méthode: Transformée de Fourier Inverse

Partons de la réponse fréquentielle idéale $H(j\omega)$ du filtre voulu et calculons sa transformée de Fourier inverse pour déterminer la réponse impulsionnelle

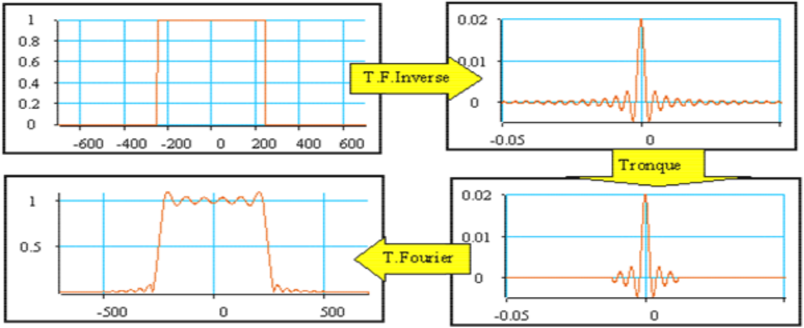
## Problématique

La transformée de Fourier inverse d'une fonction bornée en fréquence donne une fonction non limitée dans le temps.On obtient donc une fonction $h(n)$ avec une infinité de termes

## Solution "simple"

Le plus simple est de tronquer cette réponse idéale et de ne garder que la partie centrale qui comprend les valeurs les plus grandes.

# Problème de la solution “simple”




On constate alors l’apparition d’ondulations importantes autour de la réponse en fréquence idéale. En effet la transformée de Fourier d’une fonction limitée dans le temps est une fonction non limitée en fréquence

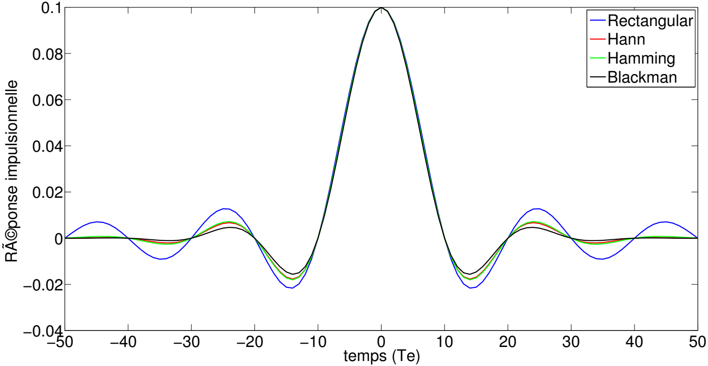
# Apodisation

Pour réduire ces ondulations, il faut "arrondir les angles" de la fenêtre temporelle qui effectue la troncature en utilisant une fenêtre d'apodisation

| Fenêtre<br>(valeurs pour $0 \le n < N - 1$) | Demi-largeur de bande du lobe principal à la base | Atténuation<br>$20\log\left\|\frac{H(f_{lobe1})}{H(0)}\right\|$ |
|---|---|---|
| Rectangulaire :<br>$w = 1$ | $\frac{1}{N}$ | -13,5 dB |
| Bartlett : $w = \frac{2n}{N-1}$ si $0 \le n \le \frac{N}{2} - 1$<br>(N pair) $w = \frac{2(N-n-1)}{N-1}$ si $\frac{N}{2} \le n \le N-1$ | $\frac{2}{N}$ | -26,5 dB |
| Hanning : $w = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\pi \frac{n}{N-1})\right)$ | $\frac{2}{N}$ | -31,5 dB |
| Hamming : $w = 0{,}54 - 0{,}46\cos(2\pi \frac{n}{N-1})$ | $\frac{2}{N}$ | -44,0 dB |

# Apodisation

Exemple pour filtre passe bas avec un fréquence de coupure à 0.1 *Fe*

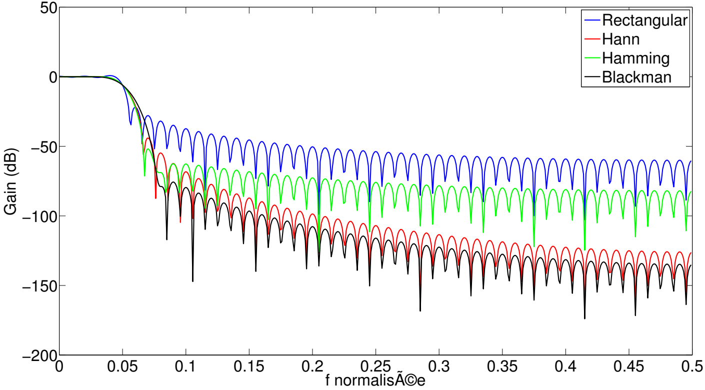




TELECOM ParisTech

# Apodisation

Exemple pour filtre passe bas avec un fréquence de coupure à 0.1 *Fe*






TELECOM ParisTech

# Plan





TELECOM ParisTech

# Décimation

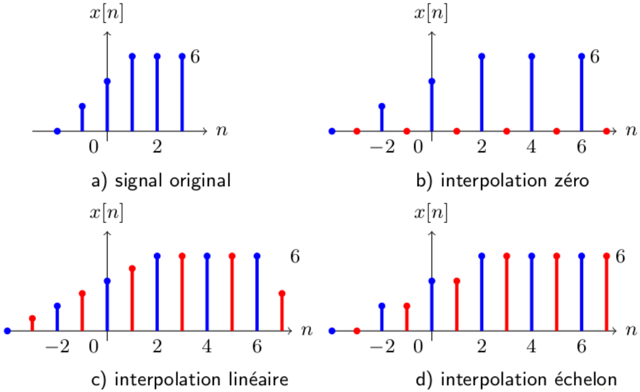
- La décimation est la compression d'un signal
- Elle correspond à réduire son taux d'échantillonnage
- Exemple : soit un signal $x(n) = y(2n)$
  - $y(n) = x(2n)$ est une version compressée de $x(n)$
  - Elle correspond à prendre un échantillon sur 2 de $x(n)$
- On peut perdre de l'information avec la décimation

# Interpolation

- L'interpolation est l'étirement d'un signal.
- Elle correspond à augmenter son taux d'échantillonnage
- Exemple : soit un signal $x(n) = y(2n)$
  - $y(n) = x(n/2)$ est une version allongée de $x(n)$
  - Elle correspond à rajouter un échantillon entre tout échantillon de $x[n]$
- Le signal aura plus d'échantillons que le signal d'origine

# Interpolation

- Il existe plusieurs approches pour faire l'interpolation
- Le choix est un compromis entre la performance et la complexité



# Plan

# Conclusion

- Analyse d'un filtre numérique consiste à extraire les caractéristiques du filtre :
  - La fonction de transfert H(z)
  - La réponse impulsionnelle et indicielle
  - Stabilité
  - Réjection, l'ondulation de la réponse fréquentielle
- La construction des filtres peut se faire à l'aide de méthodes analytiques (Euler, Bilatéral, IFFT)
- La construction des filtres peut se faire aussi à l'aide de méthodes numériques (Least square ou Parks–McClellan)
- Pour éviter le recouvrement spectral pendant la décimation, les composantes supérieures à $\frac{1}{2 \cdot M}$ doivent être filtrées au préalable

# Conclusion FIR vs IIR

| | Filtre IIR | Filtre FIR |
|---|---|---|
| Stabilité | Risque d'instabilité | Pas de rique |
| Méthodes | Transformation d'Euler<br>Transformation bilinéaire | IFFT |
| Nombre de Coefficients | Faible | élevé |
| Complexité | Faible | Faible |
| Phase | Difficile<br>à contrôler | Plutôt Facile<br>à contrôler |