

TELECOM
ParisTech



INSTITUT
Mines-Télécom

Bruit dans les systèmes électroniques embarqués

Cours de formation continue
Module SE758

Patricia Desgreys & Hervé Petit

université
PARIS-SACLAY





Plan

- **Introduction, rappels**
- **Bruit fondamentaux**
 - Bruit thermique
 - Bruit de grenaille
 - Bruit en $1/f$
- **Représentation du bruit dans les circuits**
 - Facteur de bruit
 - Sources équivalentes à l'entrée
- **Echantillonnage et quantification du signal**
 - Echantillonnage d'un bruit blanc filtré
 - Gigue d'horloge
 - Bruit de quantification
- **Sources de bruit artificielles**

Bruit

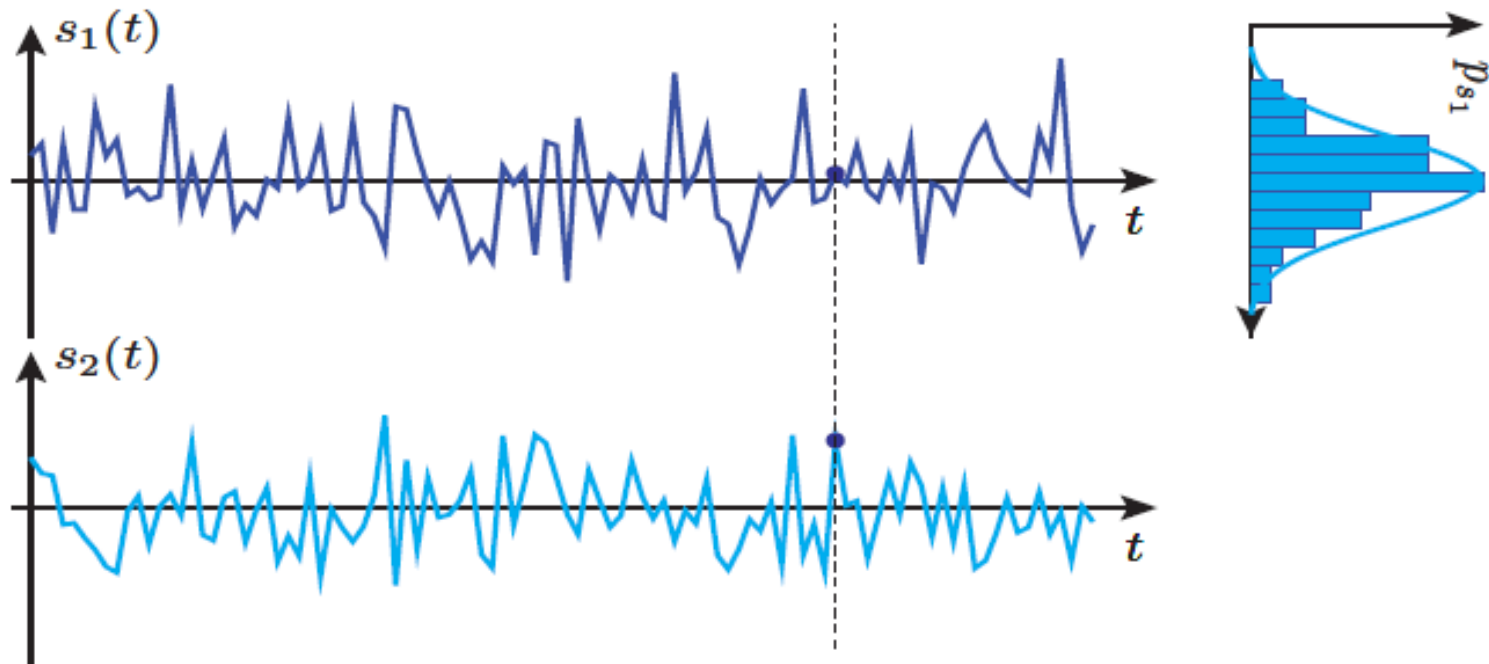
Tout signal parasite qui se superpose au signal utile

On distingue les sources de bruit artificielles et les sources de bruit fondamentales qui ne peuvent être totalement éliminées.

Pour les sources artificielles, la diversité des causes rend difficile l'établissement d'un modèle général :

- couplages par l'alimentation
- couplages par le substrat
- rayonnement électromagnétique interne ou externe au système
- ...

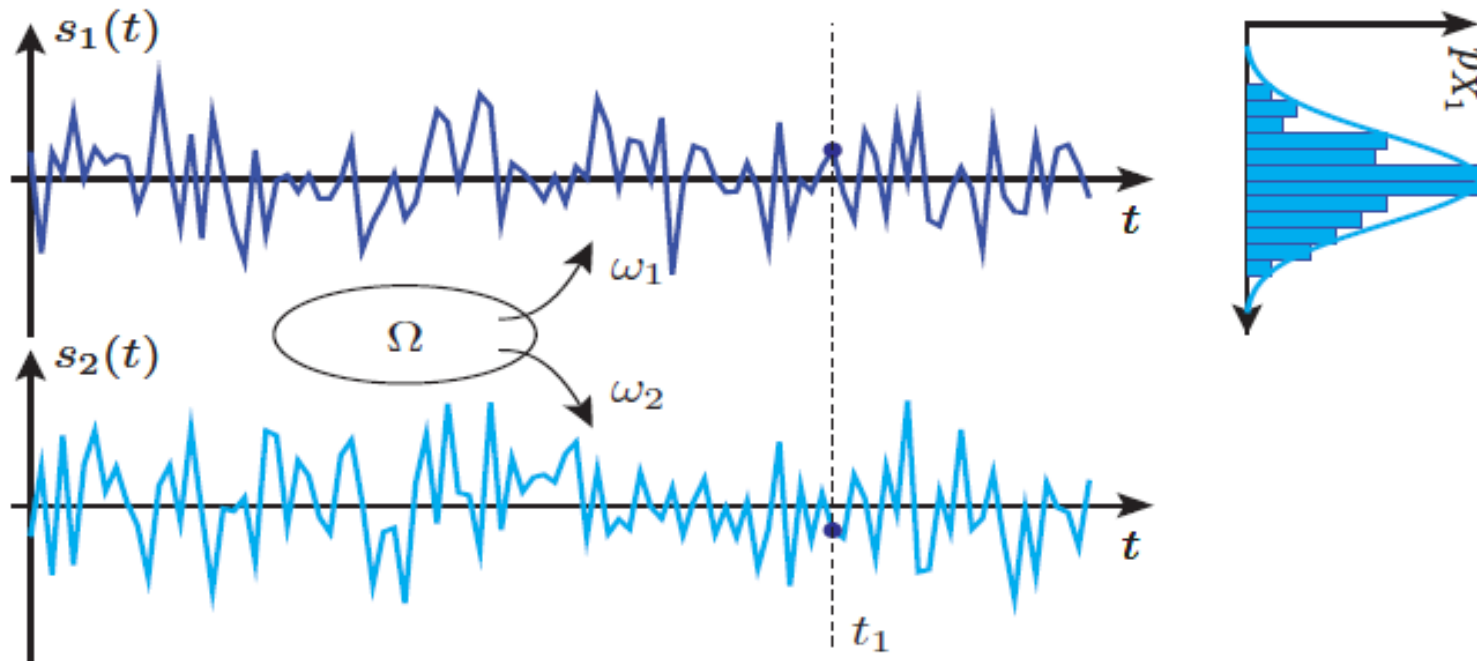
Processus aléatoire : moyennes temporelles



Une réalisation du processus aléatoire est une fonction du temps $s(t)$:

$$\overline{s(t)^n} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T s(t)^n dt$$

Processus aléatoire : moyennes d'ensemble



En $t = t_1$, on a une variable aléatoire $X_1 = X(t_1)$ de densité p_{X_1} :

$$E\{X_1^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} u^n p_{X_1}(u) du$$

Variable aléatoire gaussienne

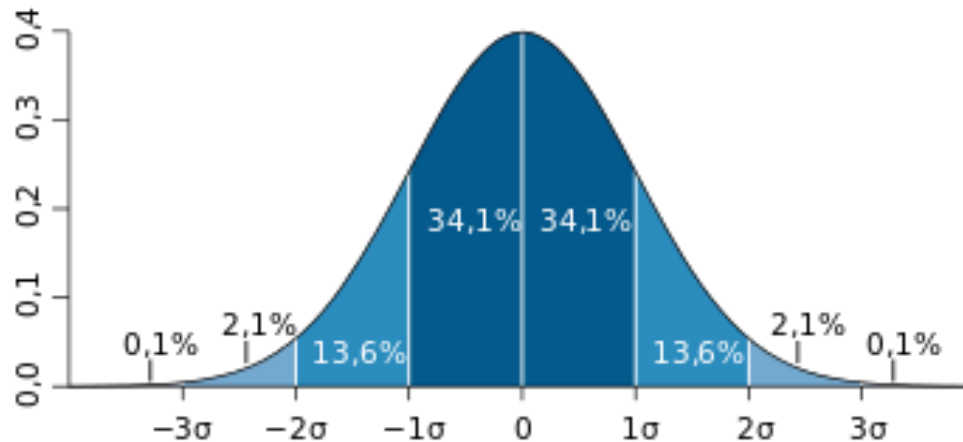
- Soit X_1, X_2, \dots une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité, indépendantes et identiquement distribuées suivant la même loi D . Supposons que l'espérance μ et l'écart-type σ de D existent et soient finis avec $\sigma \neq 0$.
- Considérons la somme : $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Théorème de la limite centrale

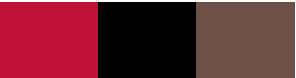
La distribution de la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes tend vers une loi de Gauss :

$$\mathcal{N}_{(\mu;\sigma)}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Variable aléatoire gaussienne



- La loi normale, souvent appelée la « courbe en cloche »
- 99,6 % des valeurs de X dans une largeur de $\pm 3\sigma$ autour de la valeur nominale.



Densité spectrale de puissance

- Le processus est stationnaire si les moments statistiques sont indépendants du temps :

$$\mu = E\{X(t)\} \quad , \quad R(\tau) = E\{X(t) \cdot X(t + \tau)\}$$

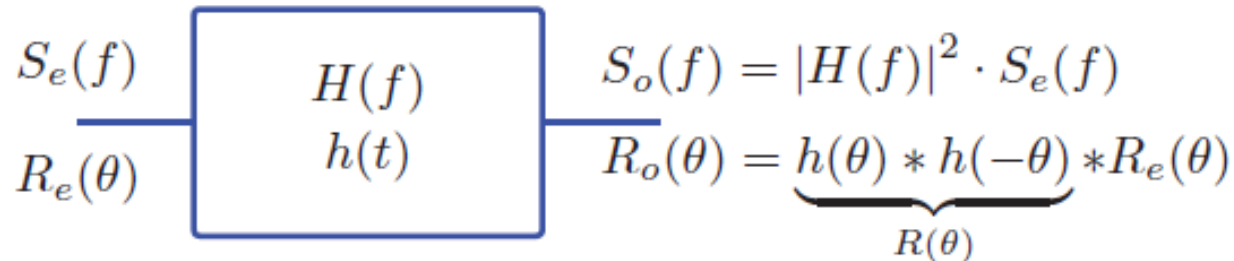
- Un **processus ergodique** est un processus aléatoire pour lequel les moyennes temporelles se confondent avec les moyennes d'ensemble.

$$\mu = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T X(t) dt \quad , \quad R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T X(t) \cdot X(t + \tau) dt$$

- On définit la **densité spectrale de puissance** (en V^2/Hz , A^2/Hz , ou W/Hz) comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation :

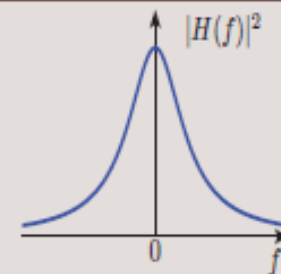
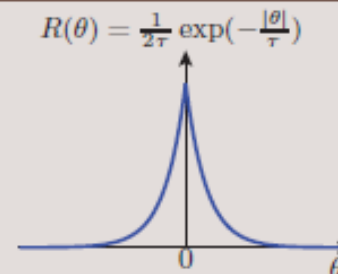
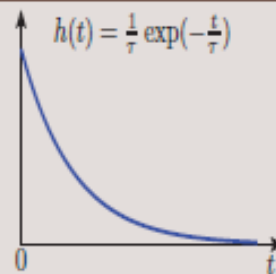
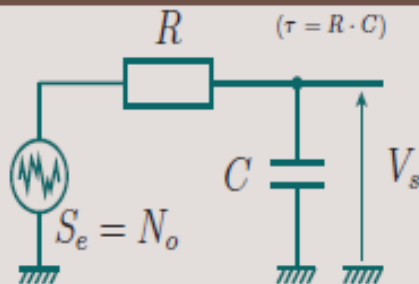
$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot \exp(-j2\pi f \tau) d\tau \quad , \quad \sigma^2 = R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df$$

Filtrage d'un processus aléatoire

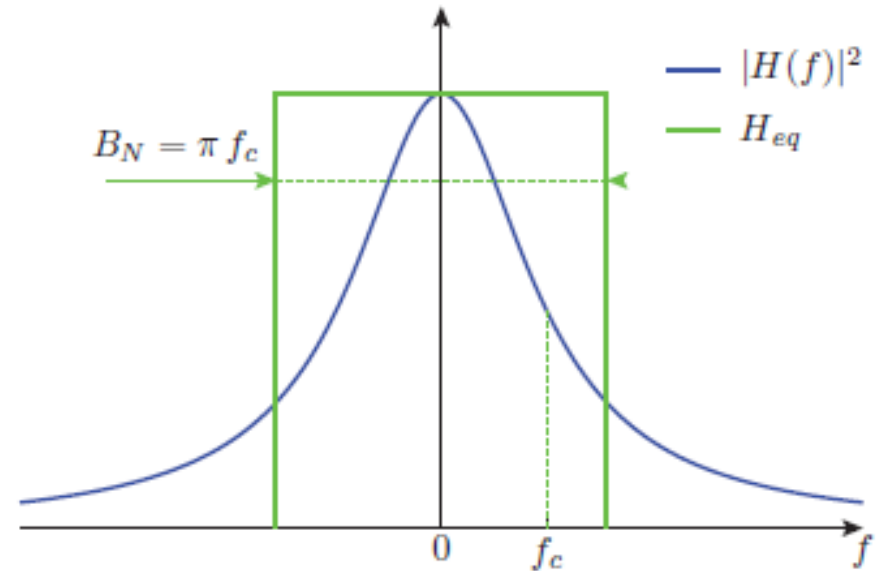
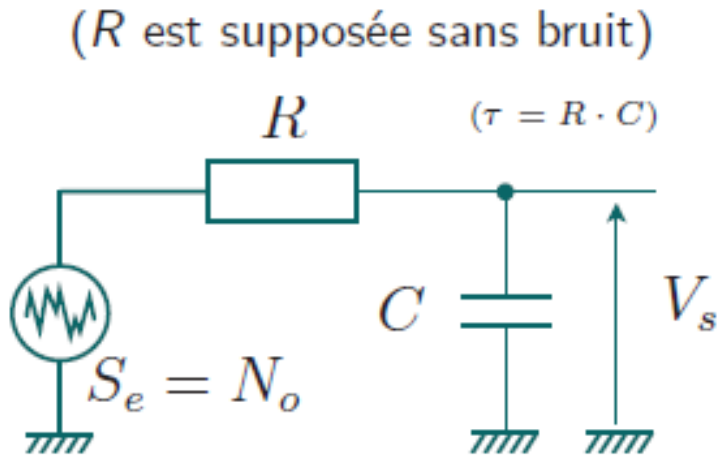


Remarque : Le caractère gaussien d'un processus aléatoire est conservé par filtrage linéaire.

Exemple : Filtrage passe-bas d'un bruit blanc, $R_e(\theta) = N_o \cdot \delta(\theta)$



Exemple de calcul du bruit : *circuit RC*



$$f_c = \frac{1}{2\pi\tau} \quad H(f) = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_c}} \quad |H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$$

Bande équivalente de bruit :

$$B_N = \frac{1}{|H(f)|_{\max}^2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

$$P_s = E\{V_s^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_e \cdot |H(f)|^2 df = N_o \cdot B_N = \frac{N_o}{2RC} \quad [V^2]$$

Plan

- **Introduction, rappels**
- **Bruit fondamentaux**
 - Bruit thermique
 - Bruit de grenaille
 - Bruit en $1/f$
- **Représentation du bruit dans les circuits**
 - Facteur de bruit
 - Sources équivalentes à l'entrée
- **Echantillonnage et quantification du signal**
 - Echantillonnage d'un bruit blanc filtré
 - Gigue d'horloge
 - Bruit de quantification
- **Sources de bruit artificielles**

Bruit thermique

- Ce bruit (découvert par Johnson en 1926) est dû à l'agitation thermique des électrons dans les conducteurs électriques. La densité spectrale de bruit thermique est donnée par (thermodynamique statistique) :

$$S_{th} = \frac{1}{2} \frac{h|f|}{\exp\left(\frac{h|f|}{kT}\right) - 1} \quad \begin{array}{l} h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s} , \text{ C}^{\text{te}} \text{ de Planck} \\ k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} , \text{ C}^{\text{te}} \text{ de Boltzmann} \end{array}$$

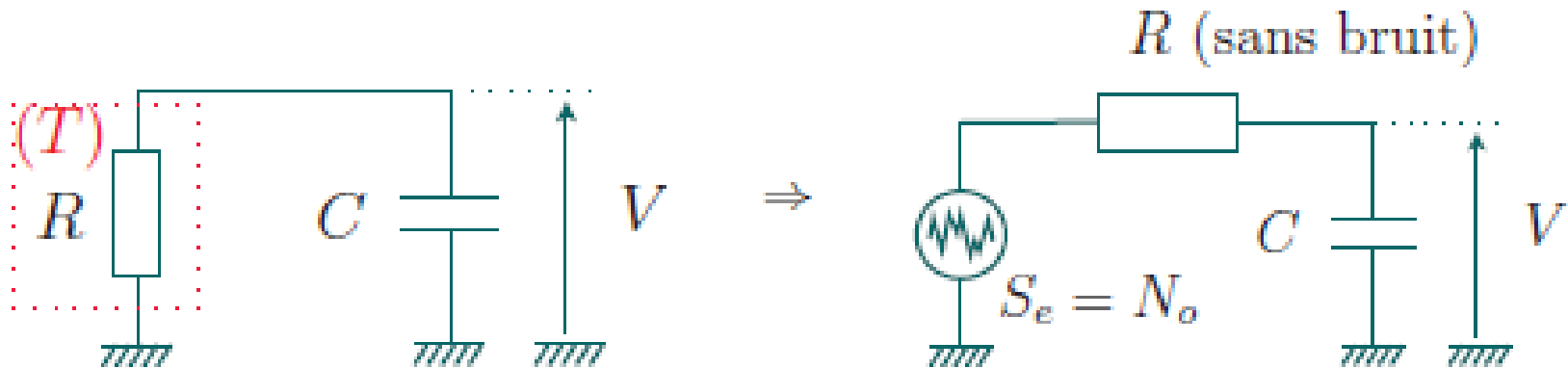
Aux fréquences telles que $hf \ll kT$ ($f < 250 \text{ GHz}$) : $S_{th} \approx kT/2$

Dans une bande de fréquences B , on a une puissance $P_{th} = kTB$
(DECT : $B = 1,4 \text{ MHz}$, $P = 5,8 \cdot 10^{-15} \text{ W}$, $P = -112,4 \text{ dBm}$ à 300° K)

- **La statistique de ce bruit est gaussienne** (multitude de perturbations élémentaires)

Remarque : on associe souvent à une source de bruit (non nécessairement thermique), de puissance P_n dans une bande de fréquences B , une température de bruit T_e telle que $P_n = k T_e B$.

Bruit thermique d'une résistance



A l'équilibre thermodynamique un système dynamique a, en moyenne, une énergie potentielle égale à $\frac{kT}{2}$ par degré de liberté :

$$\frac{1}{2} C \sigma_v^2 = \frac{1}{2} kT \quad \sigma_v^2 = \frac{kT}{C} = \frac{N_o}{2RC} \quad \Rightarrow \quad S_e = N_o = 2kTR$$

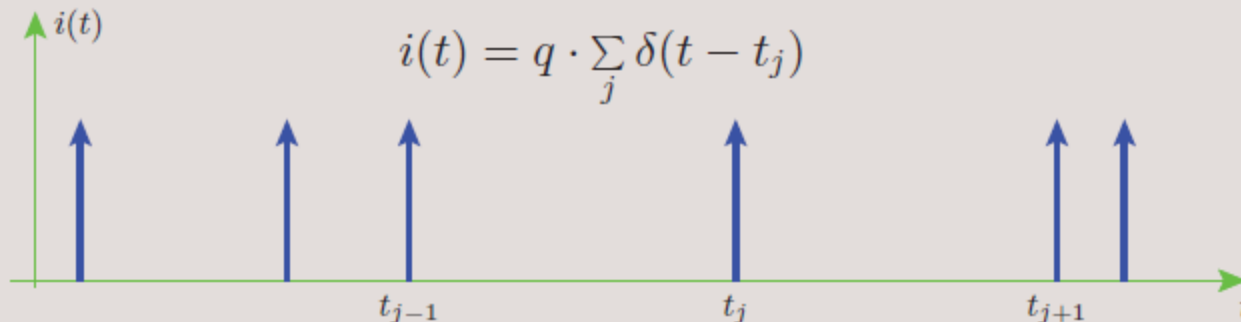
de même : $S_i = \frac{2kT}{R}$, Exemple : $C = 1 \text{ pF}$, $\sigma_v = \sqrt{\frac{kT}{C}} = 64 \mu\text{V}$

Bruit de grenaille (shot noise)

- Ce bruit est lié au caractère granulaire de l'électricité. Il a été décrit par Schottky en 1918 en étudiant l'effet corpusculaire du courant d'électrons dans une diode à vide.
- Dans les composants suivants : transistor bipolaire, diode en régime de saturation inverse, cellule photoélectrique, . . .

Modélisation

On assimile le courant à une suite d'impulsions indépendantes de charge élémentaire q dont les instants d'apparition suivent une loi de Poisson :



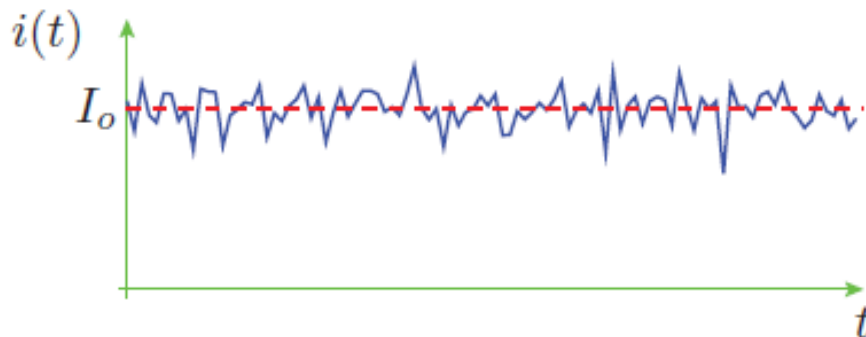
Bruit de grenaille

On a, en moyenne, λ charges par seconde et le nombre de charges pendant une durée T suit une loi discrète de Poisson :

$$p_n = \frac{(\lambda T)^n}{n!} \exp(-\lambda T) \quad , \quad m = \sigma^2 = \lambda T$$

On filtre ce train d'impulsions par un filtre idéal de bande B . On peut alors considérer les échantillons du courant i_k pris à des intervalles de temps distants de $T = \frac{1}{2B}$. On a :

$$I_o = E\{i_k\} = \frac{q}{T} E\{n_k\} = \lambda q \quad , \quad \text{Var}(i_k) = \left(\frac{q}{T}\right)^2 \text{Var}(n_k) = \frac{\lambda q^2}{T} = 2 q B I_o$$



$$S_i = q I_o \quad q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Statistique : loi de Gauss

Bruit en 1/f

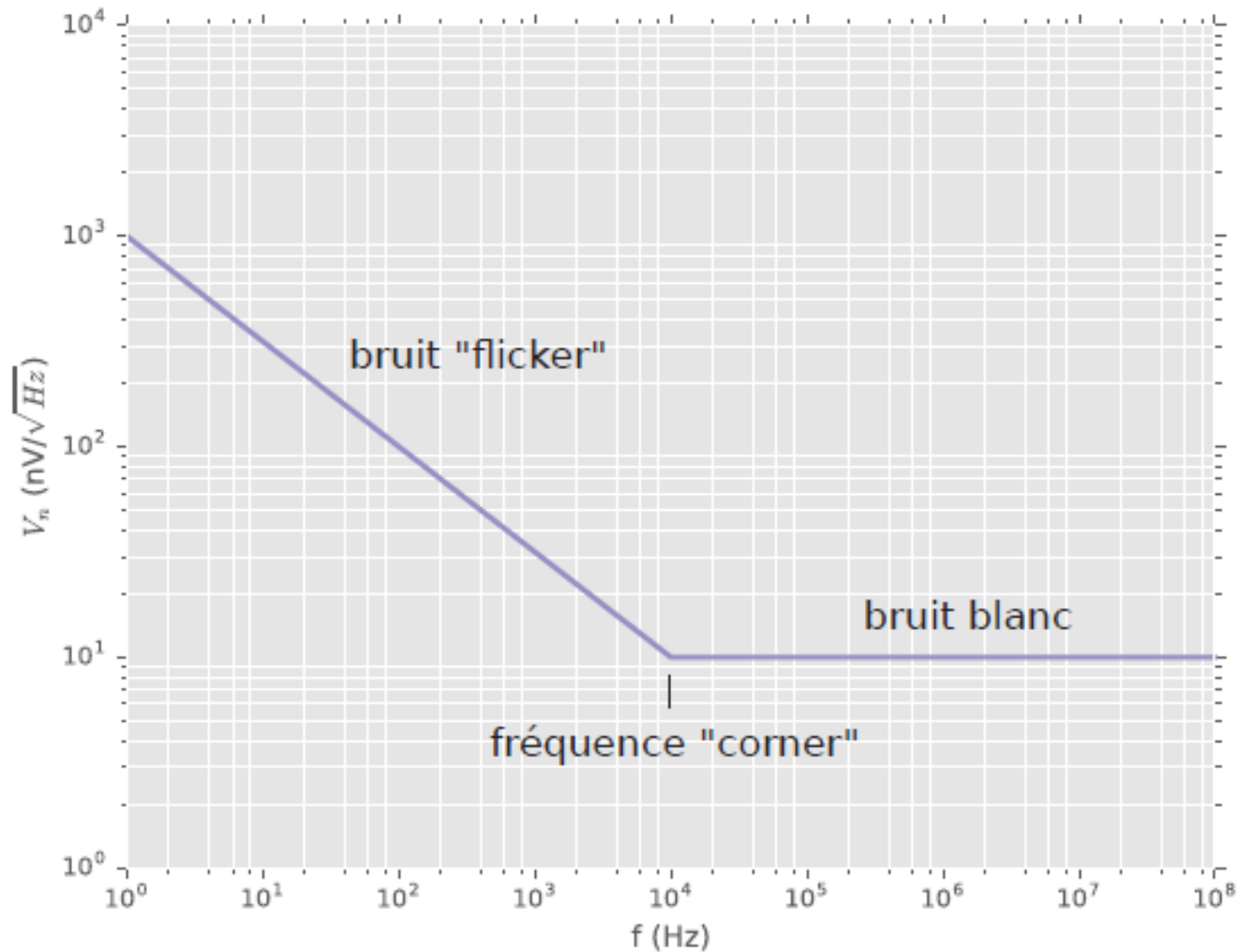
- Ce comportement avec une densité spectrale de puissance en $1/f^\alpha$ ($\alpha = 0,8 - 1,4$) a été observé sur plus de 6 ordres de grandeur de la fréquence dans les résistances à film mince indépendamment du matériau utilisé.
- Les phénomènes physiques où il intervient sont nombreux : résistance d'un semiconducteur, battement cardiaque, bruit sismique, oscillations de l'axe terrestre, activité solaire, . . .
- La densité de probabilité est gaussienne

Remarque : Si un tel processus est considéré comme stationnaire sa puissance tend vers l'infini quand f tend vers zéro :

$$P = \int_{f_1}^{f_2} \frac{k}{f} df = k \cdot \ln \left(\frac{f_2}{f_1} \right)$$

Pour observer 16 décades inférieures au hertz il faut 320 millions d'années !

Source de tension de bruit typique



Plan

- **Introduction, rappels**
- **Bruit fondamentaux**
 - Bruit thermique
 - Bruit de grenaille
 - Bruit en $1/f$
- **Représentation du bruit dans les circuits**
 - Facteur de bruit
 - Sources équivalentes à l'entrée
- **Echantillonnage et quantification du signal**
 - Echantillonnage d'un bruit blanc filtré
 - Gigue d'horloge
 - Bruit de quantification
- **Sources de bruit artificielles**

Facteur de Bruit

- Le facteur de bruit à la température conventionnelle $T_0 = 290 \text{ K}$ mesure la dégradation du rapport signal sur bruit dans une chaîne d'amplificateurs :

$$\begin{array}{c} P_{s1} \\ \hline P_{n1} \end{array} \boxed{F, G, P_{ni}} \begin{array}{c} P_{s2} = G P_{s1} \\ \hline P_{n2} = G P_{n1} + P_{ni} \end{array}$$

$$F = \frac{P_{s1}/P_{n1}}{P_{s2}/P_{n2}} = \frac{P_{n2}}{G P_{n1}} = 1 + \frac{P_{ni}}{G P_{n1}} \geq 1$$

Cas d'une chaîne d'amplificateurs :

$$\begin{array}{c} P_{s1} \\ \hline P_{n1} \end{array} \boxed{F_1, G_1, P_{ni1}} \begin{array}{c} P_{s2} \\ \hline P_{n2} \end{array} \boxed{F_2, G_2, P_{ni2}} \begin{array}{c} P_{s3} \\ \hline P_{n3} \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{G, F}$

$$\begin{aligned} P_{s3} &= G_1 G_2 P_{s1} \\ P_{n3} &= F G_1 G_2 P_{n1} \\ &= G_1 G_2 P_{n1} + G_2 P_{ni1} + P_{ni2} \end{aligned}$$

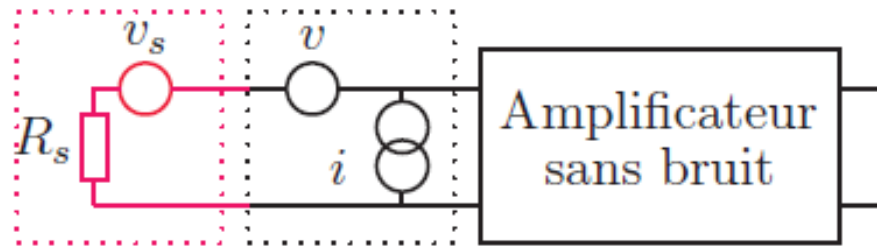
$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1}$$

Cas général :

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \dots + \frac{F_m - 1}{\prod_{i=1}^{m-1} G_i}$$

Sources équivalentes de bruit à l'entrée

$$\sigma_{v_s}^2 = 4kTR_s B$$

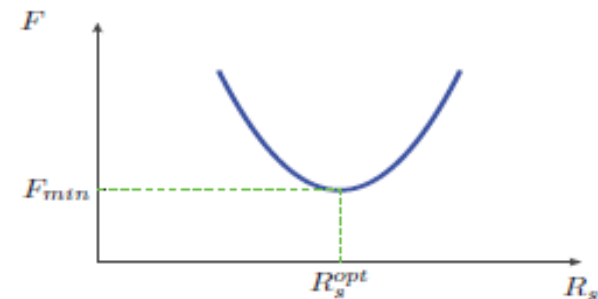


- Les sources équivalentes en entrée étant supposées indépendantes³, on obtient le facteur de bruit :

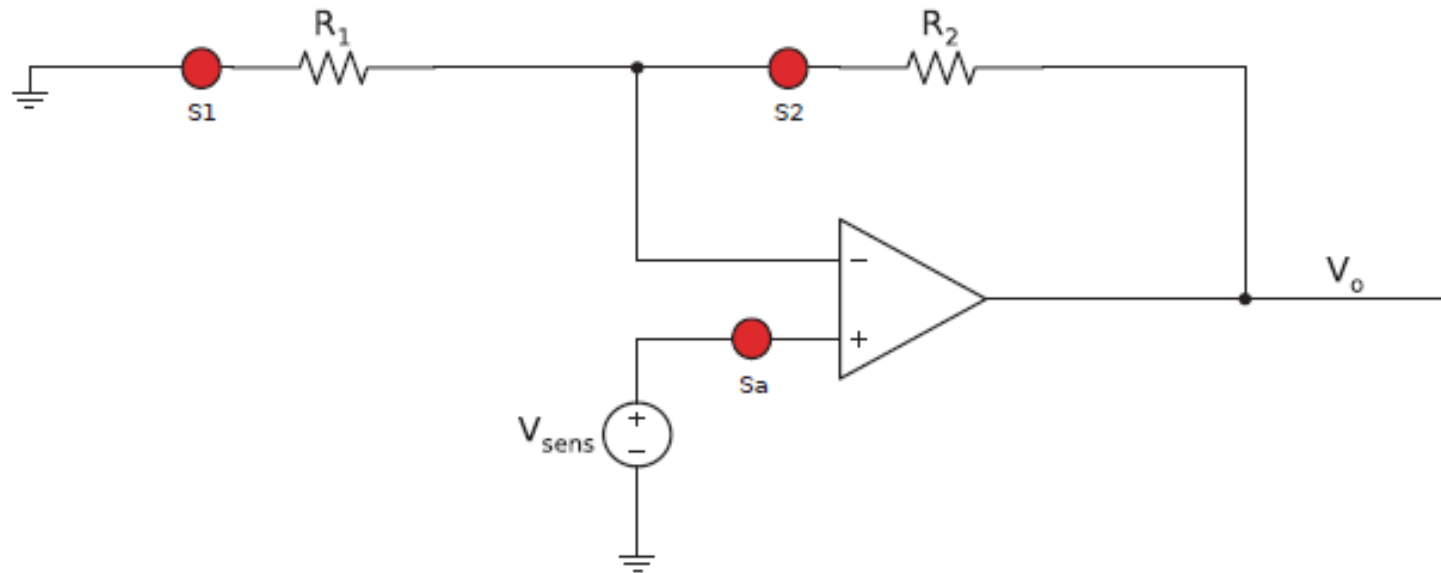
$$F = 1 + \frac{\sigma_v^2 + R_s^2 \sigma_i^2}{4kTR_s B}$$

- Il existe dans ce cas une résistance optimale de source qui correspond au minimum du facteur de bruit :

$$R_s^{opt} = \frac{\sigma_v}{\sigma_i}, \quad F_{min} = 1 + \frac{\sigma_v \sigma_i}{2kTB}$$



Exemple de circuit



La densité spectrale de tension de bruit, référencée à l'entrée est donnée par :

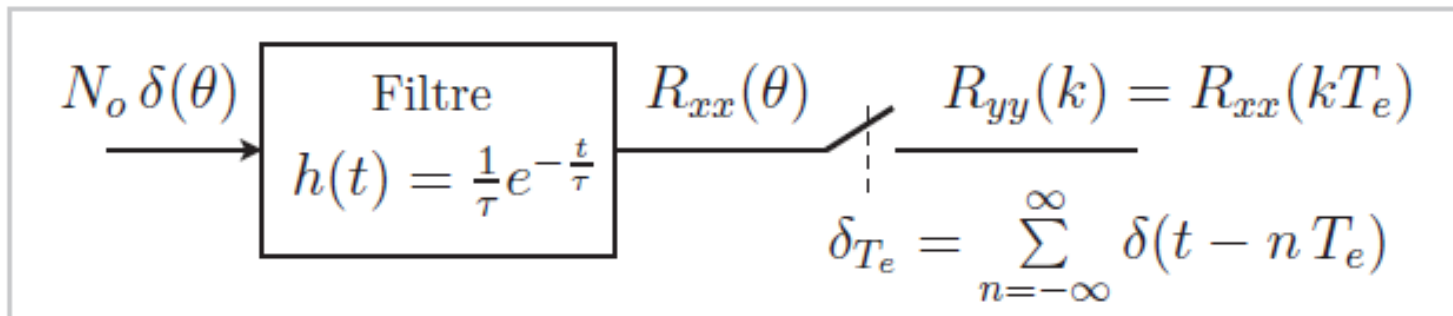
$$S_v = S_a + 2kT \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Plan

- **Introduction, rappels**
- **Bruit fondamentaux**
 - Bruit thermique
 - Bruit de grenaille
 - Bruit en $1/f$
- **Représentation du bruit dans les circuits**
 - Facteur de bruit
 - Sources équivalentes à l'entrée
- **Echantillonnage et quantification du signal**
 - Echantillonnage d'un bruit blanc filtré
 - Gigue d'horloge
 - Bruit de quantification
- **Sources de bruit artificielles**

Echantillonnage d'un bruit blanc filtré

On échantillonne de manière idéale (période T) un bruit blanc de densité spectrale N_o filtré par un filtre passe-bas du premier ordre de réponse impulsionnelle $h(t) = \frac{1}{\tau} \exp(-\frac{t}{\tau})$



On cherche la densité spectrale du signal échantillonné $S_y(f)$

La fonction d'autocorrélation en sortie du filtre passe-bas est donnée par⁴

$$R_{xx}(\theta) = N_o \delta(\theta) * h(\theta) * h(-\theta) = \frac{N_o}{2\tau} \exp\left(-\frac{|\theta|}{\tau}\right)$$

Echantillonnage d'un bruit blanc filtré

La fonction d'autocorrélation discrète est obtenue par échantillonnage de R_{xx} avec la période T :

$$R_{yy}(k) = R_{xx}(k T) = \frac{N_o}{2\tau} \exp\left(-\frac{|k T_e|}{\tau}\right)$$

La densité spectrale de puissance de la suite échantillonnée s'obtient par transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation R_{yy} :

$$\begin{aligned} S_y(f/f_e) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{yy}(k) \exp\left(-j 2 \pi k \frac{f}{f_e}\right) \\ &= \frac{N_o}{2\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|k T_e|}{\tau}\right) \exp\left(-j 2 \pi k \frac{f}{f_e}\right) \end{aligned}$$

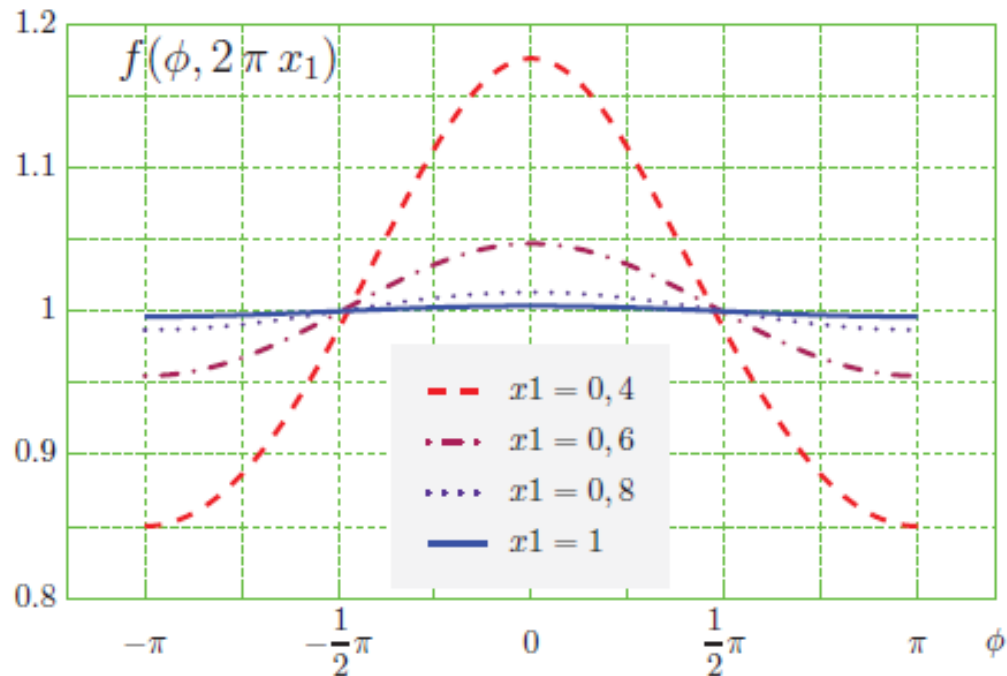
où $f_e = \frac{1}{T}$ est la fréquence d'échantillonnage. En utilisant la fonction $f(\phi, \phi_1)$ ⁵, on obtient :

$$S_y(f/f_e) = \frac{N_o}{2\tau} \cdot f(\phi, \phi_1) \quad \text{avec} \quad \phi = 2 \pi \frac{f}{f_e}, \quad \phi_1 = \frac{T_e}{\tau}$$

Formulaire (4) (5)

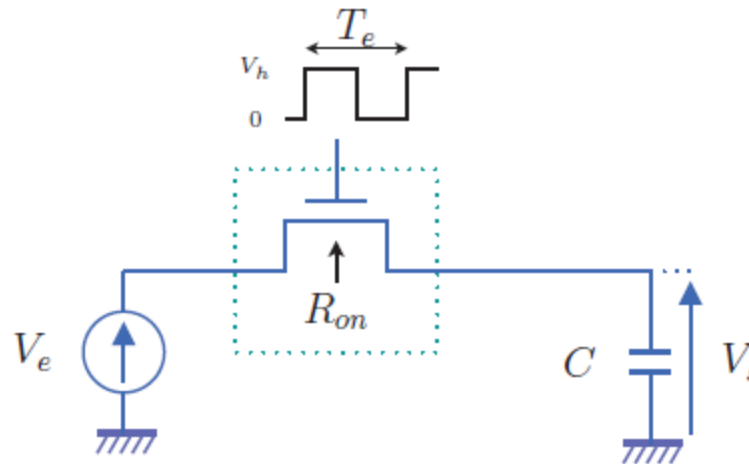
$$h(\theta) = \frac{U(\theta)}{\tau} \exp\left(-\frac{\theta}{\tau}\right) \Rightarrow h(\theta) * h(-\theta) = \frac{1}{2\tau} \exp\left(-\frac{|\theta|}{\tau}\right)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-|m\phi_1|} e^{-jm\phi} = \frac{\sinh(\phi_1)}{\cosh(\phi_1) - \cos(\phi)} = f(\phi, \phi_1)$$



Circuit échantillonneur

- On va utiliser le résultat précédent pour calculer la puissance de bruit (en V^2) dans une bande B telle que $B T_e < 1/2$ à la sortie du circuit échantillonneur suivant :



- Le transistor MOS, utilisé en commutateur, est caractérisé par une résistance R_{on} dans le mode d'échantillonnage et par un circuit ouvert en phase de maintien. Pour que la charge de la capacité soit quasi-complète, la période d'échantillonnage T_s est choisie telle que $T_e > 7 \tau$ avec $\tau = R_{on} C$.

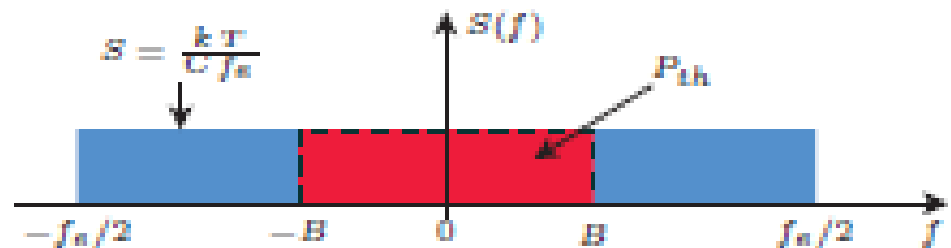
Circuit échantillonneur

- On retrouve, en phase d'échantillonnage, le schéma de filtrage passe-bas d'un bruit blanc par un filtre du premier ordre avec $\tau = R_{on}C$. Le bruit blanc est constitué du bruit thermique de la résistance de canal : $N_o = 2 k T R_{on}$
- D'autre part, $T_e > 7\tau$ correspond à $\Phi_1 > 5$ pour la fonction $f(\Phi, \Phi_1)$. Pour cette valeur on a pratiquement $f(\Phi, \Phi_1) \approx 1$. D'où la densité spectrale en sortie :

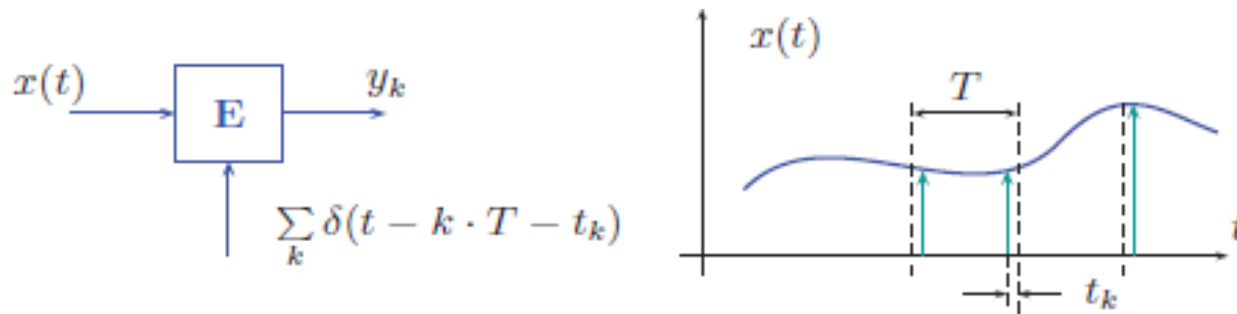
$$S_y(f) = \frac{N_o}{2\tau} \cdot \frac{1}{f_c} = \frac{k T}{C} \cdot \frac{1}{f_c}$$

Dans une bande B , on a une puissance de bruit :

$$P_{th} = \int_{-B}^B S_y(f) df = \frac{k T}{C} \cdot \frac{2B}{f_c}$$



Gigue et échantillonnage



On a approximativement :

$$y_k \approx x(k T) + x'(k T) \cdot t_k = x(k T) + e_k$$

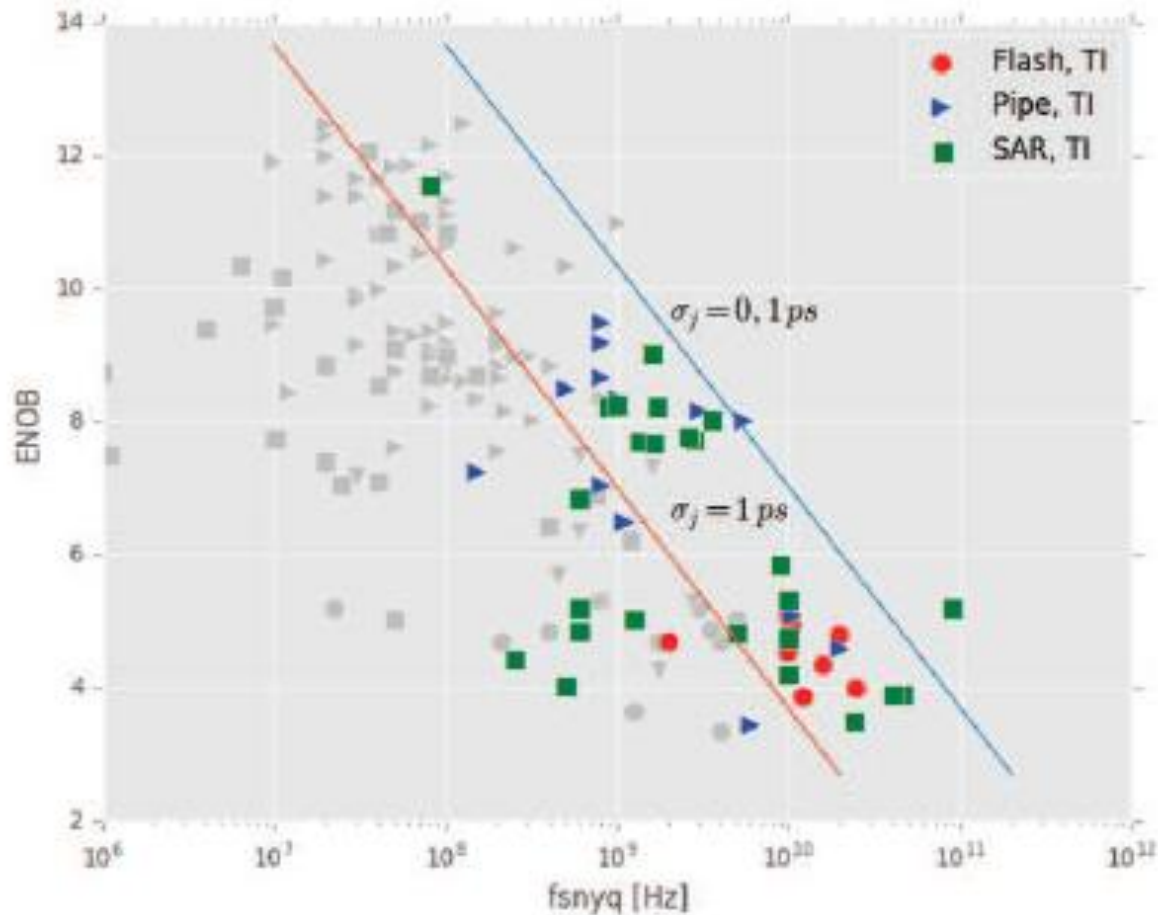
d'où [2] :

$$R_e(n) = -R_x''(n T) \cdot R_j(n) \quad \text{avec} \quad R_j(n) = E\{t_k \cdot t_{k+n}\}$$

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{R_x(0)}{-R_x''(0) \cdot R_j(0)} \quad \text{cas sinusoidal : } \boxed{SNR_j = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\omega \sigma_j} \right)}$$

[2] D. Dalt, M. Harteneck, C. Sander et A. Wiesbauer : On jitter Requirement of the Sampling Clock for Analog-to-Digital Converters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I : Fundamental Theory and Applications*, 2002.

Impact de la gigue sur les CAN [3]



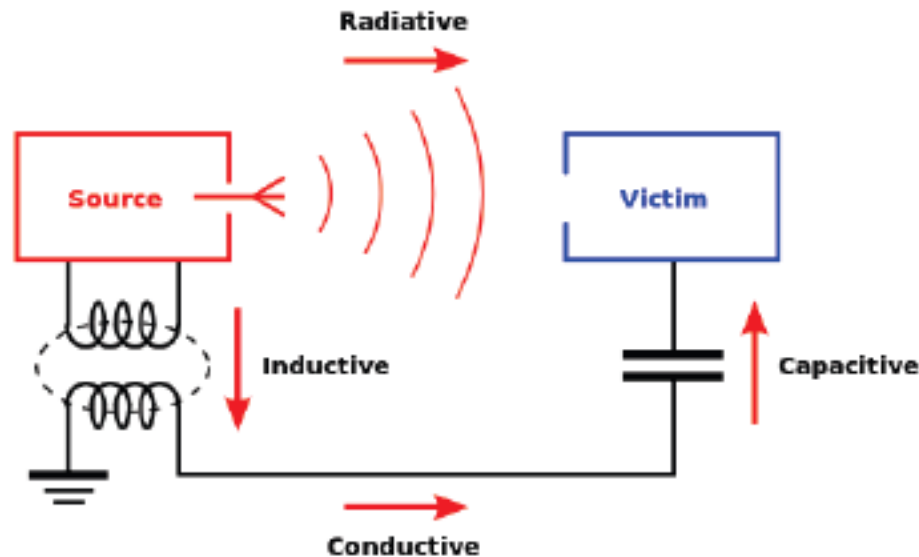
[3] B. Murmann : Adc performance survey 1997-2015. <http://www.stanford.edu/~murmman/adcsurvey.html>. available online.

Plan

- **Introduction, rappels**
- **Bruit fondamentaux**
 - Bruit thermique
 - Bruit de grenaille
 - Bruit en $1/f$
- **Représentation du bruit dans les circuits**
 - Facteur de bruit
 - Sources équivalentes à l'entrée
- **Echantillonnage et quantification du signal**
 - Echantillonnage d'un bruit blanc filtré
 - Gigue d'horloge
 - Bruit de quantification
- **Sources de bruit artificielles**

Sources d'interférence

- Le mode de couplage entre la source d'interférence et le système peut être par conduction ou par rayonnement : champ électrique, champ magnétique, champ électromagnétique (EM).



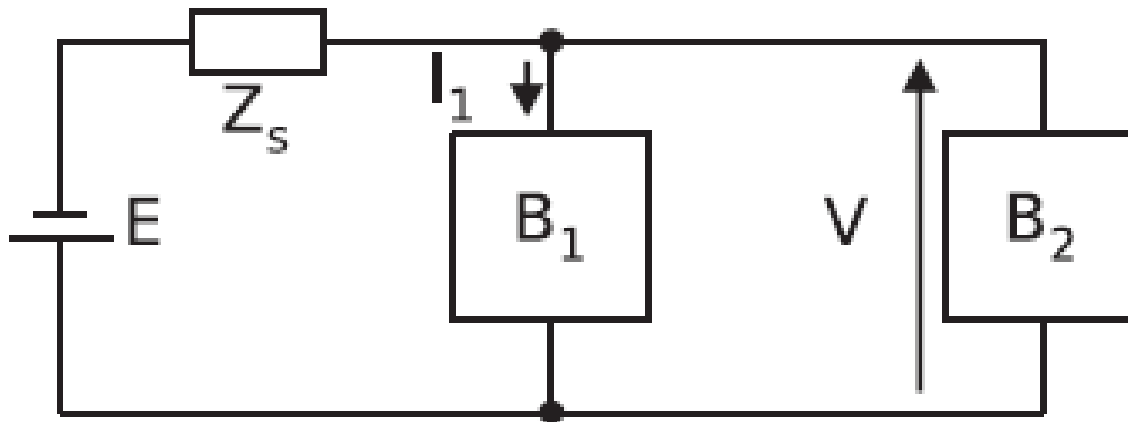
source : [Wikipedia-EMI](#)

Règles pour réduire les interférences

- Agir sur la source d'interférence : filtrage,...
- Réduire le couplage entre la source et le système de mesure :
 - éloigner la source du récepteur **utilisation d'un blindage** (surface conductrice englobant le récepteur et imperméable à une onde EM si l'épaisseur est environ 10 fois l'épaisseur de peau)
 - **filtrage** dans le cas d'un couplage par conduction
 - . . .
- Améliorer l'immunité au bruit du système de mesure :
 - utilisation de **signaux différentiels** (immunité au champ électrique et au couplage capacitif)
 - connexions en **paires torsadées** (immunité au champ magnétique)
 - . . .

Exemple : couplage par conduction

- Couplage par l'alimentation commune :

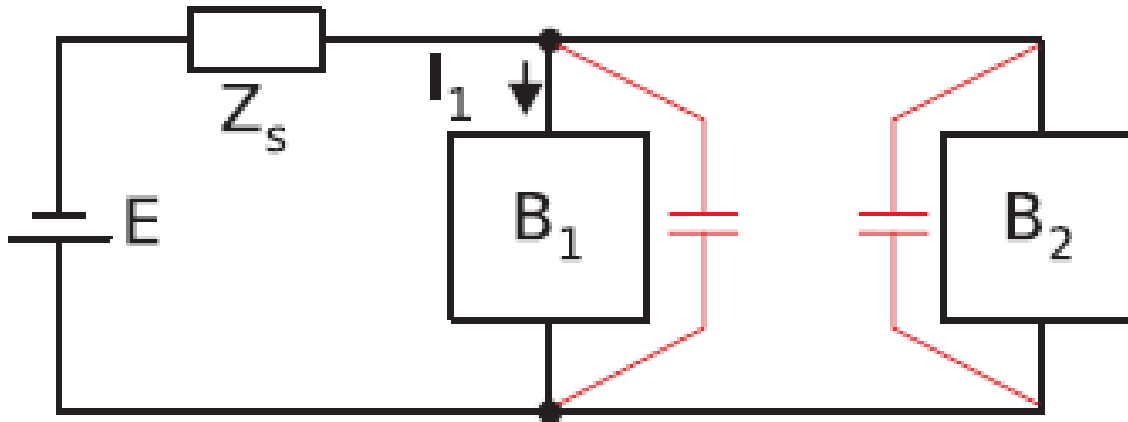


remèdes :

- séparation des alimentations (minimum de chemin commun pour l'alimentation des blocs B_1 et B_2)

Exemple : couplage par conduction

- Couplage par l'alimentation commune :



remèdes :

- séparation des alimentations (minimum de chemin commun pour l'alimentation des blocs B_1 et B_2)
- découplage capacitif au plus près des blocs (B_1, B_2)

Conclusion

■ 2 types de sources de bruits :

- Bruits fondamentaux non annulables mais prise en compte dans la conception avec des modèles et des simulateurs et des analyses appropriées.
- Bruits artificiels (ou extérieurs) annulables par des techniques classiques (connues).

■ En fonction de l'application, budget de bruit (SNR en sortie du SE) :

- Répartition du bruit sur les différents blocs / circuits pour minimiser la consommation
- Répartition entre les 3 sources de bruit présentes pour une chaîne d'acquisition