CHAPITRE 3. REPRESENTATIONS PARAMETRIQUES.

Le cadre aléatoire dans lequel sont étudiés les signaux ne prend tout son intérêt que dans cette approche dont les prémices sont donnés par la représentation spectrale des signaux aléatoires stationnaires, et où toute la difficulté consiste à se passer de l'hypothèse de stationarité, tout en conservant des propriétés satisfaisantes à la représentation spectrale. Deux approches différentes rentrent dans ce cadre: celle de PRIESTLEY, 1955, valable pour une classe de signaux qu'il dénomme "oscillants" et celle de TJØSTHEIM, 1976-b, liée à la décomposition de Wold des signaux.

1. Représentations spectrales non-stationnaires.

Dans le premier cas, la représentation qui est en question est celle qui pour un signal stationnaire y(t), le décompose de façon doublement orthogonale sur une base de fonctions exponentielles complexes.

$$(1\text{-}44)\quad y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t}dY(\omega)$$

La première orthogonalité a lieu pour les fonctions du développement, les exponentielles complexes qui sont orthogonales au sens du produit scalaire de fonctions temporelles.

$$(1\text{-}45)\quad \langle e^{j\omega_1 t},e^{j\omega_2 t}\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega_1-\omega_2)t}dt=\delta(\omega_1-\omega_2)$$

La seconde orthogonalité est celle des accroissements de $Y(\omega)$ qui sont orthogonaux en tant que variables aléatoires:

$$(1\text{-}46)\quad E(dY(\omega_1).dY^*(\omega_2))=\delta(\omega_1-\omega_2).dS(\omega_1).d\omega_2$$

Dans cette dernière relation, $S(\omega)$ est le spectre de puissance de y(t), $\delta(\omega)$

désignant la distribution de Dirac.

Il est utile pour ce qui suit de se rappeler la façon dont cette représentation (1-44) s'obtient par le truchement de la théorie des opérateurs dans un espace de Hilbert (voir l'annexe n° 2). La variable aléatoire y(t), à valeur réelle ou complexe est vue comme élément d'un espace de Hilbert dont le produit scalaire est la covariance:

$$(1\text{-}47)\quad \langle y(t),y(s)\rangle = E(y(t)y^{*}(s)) = R(t,s)$$

L'espace de Hilbert retenu est H(y), fermeture de l'enveloppe linéaire des y(t), c'est-à-dire de l'ensemble des combinaisons linéaires du type $\Sigma a_i y(t_i)$. Lorsque y(t) est stationnaire, il est possible d'introduire pour tout temps s l'opérateur de décalage U_s tel que $U_s y(t)=y(t+s)$. Cet opérateur est alors unitaire:

$$(1\text{-}48)\quad \langle U_s y(t_1),U_s y(t_2)\rangle = \langle y(t_1),y(t_2)\rangle = R(t_1-t_2)$$

où l'on a $R(t_1-t_2)=R(t_1,t_2)$ par abus d'écriture. Les U_s forment ainsi un groupe continu d'opérateurs unitaires, qui admet pour résolution de l'identité la famille $E(\omega)$ et pour représentation spectrale la relation (1-49):

$$(1\text{-}49)\quad U_s = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega s} dE(\omega)$$

Ceci implique pour y(t):

$$(1\text{-}50)\quad y(t)=U_t y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} dE(\omega) y(0)$$

La relation (1-44) s'obtient en posant dans (1-50) $Y(\omega)=E(\omega)y(0)$. L'orthogonalité des accroissements $dY(\omega)$ est une conséquence de l'orthogonalité des opérateurs $E(\Delta\omega)$.

Lorsque le signal y(t) n'est plus stationnaire, il est encore possible si y(t) est harmonisable d'obtenir la décomposition (1-44), mais les accroissements $dY(\omega)$ ne seront plus orthogonaux. Si $\Phi(\omega_1,\omega_2)$ est la double transformée de Fourier de R(t,s) en (1-36), les covariances des accroissements $dY(\omega)$ sont données par (1-51).

(1-51) $E(dY(\omega_1).dY^*(\omega_2))=d\Phi(\omega_1,\omega_2)$

On peut voir le problème posé par la non-stationnarité du signal comme celui de cette orthogonalité qui ne peut être doublement satisfaite avec la représentation (1-44). Si on veut la satisfaire, il faut, conformément au théorème de Karhunen, remplacer les exponentielles complexes par les fonctions propres de l'opérateur covariance. Ceci suppose que l'énergie totale du signal soit finie, mais se transpose aussi lorsque la puissance moyenne du signal est positive (BLANC-LAPIERRE, 1979, BLANC-LAPIERRE, PICINBONO, 1981). On obtient alors orthogonalité simultanément pour le produit scalaire des fonctions, et pour celui défini par la covariance. Malheureusement le concept de spectre disparaît avec les exponentielles complexes. Cette représentation est à rejeter du point de vue de la recherche d'un relief, mais a cependant son intérêt en ce qu'elle permet d'associer au signal y(t) une classe d'opérateurs linéaires, qu'on pourra appeler "filtres" qui laissent invariantes les fonctions propres de la covariance, et qui donc commutent avec l'opérateur covariance. Pour tout élément de cette classe de filtres pourra être définie la fonction de transfert, avec les mêmes propriétés qu'en stationnaire (BLANC-LAPIERRE, PICINBONO, 1981).

2. Relief des signaux oscillants.

Nous en revenons maintenant à l'approche de PRIESTLEY, 1965, qui tente de trouver un moyen terme entre la décomposition sur les exponentielles complexes qui préserve le concept de fréquence, mais n'assure pas l'orthogonalité, et la décomposition doublement orthogonale qui perd la notion de fréquence. Soit une représentation spectrale de la covariance telle que dans le théorème de Karhunen, donnée par (1-52).

(1-52) $R(t,s)=\int\phi_t(\omega)\phi_s^*(\omega)d\mu(\omega)$

dans laquelle $\mu(\omega)$ est une mesure positive et soit la représentation spectrale de y(t) qui lui est associée:

(1-53) $y(t)=\int\phi_t(\omega)dY(\omega)$

avec:

(1-54) $E(dY(\omega_1).dY^*(\omega_2))=\delta(\omega_1-\omega_2)d\mu(\omega_1)$

2.1. Définition du relief de Priestley.

PRIESTLEY, 1965, introduit la classe des signaux qu'il nomme "oscillants", auxquels est associée une fonction $\phi_t(\omega)$ particulière:

(1-55) $\phi_t(\omega)=A_t(\omega)e^{j\Theta(\omega)t}$

Dans cette décomposition (non unique) de $\phi_t(\omega)$ (fonctions elles-mêmes non uniques), on contraindra la fonction du temps $A_t(\omega)$ à être basse-fréquence, ce qui se formalise par le fait que sa transformée de Fourier a son maximum en 0. La fonction $\Theta(\omega)$ représente la pulsation de $\phi_t(\omega)$, mais on peut effectuer un changement de variable ω-ω' qui assure que $\Theta(\omega)=\omega'$, aussi introduit-on cette hypothèse dans l'expression (1-55) qui devient:

(1-56) $\phi_t(\omega)=A_t(\omega)e^{j\omega t}$

La décomposition (1-53) avec les fonctions telles qu'en (1-56) est alors orthogonale pour ce qui est des accroissements $dY(\omega)$, et "presque" orthogonale pour ce qui est du produit scalaire des fonctions $\phi_t(\omega)$, au sens où celles-ci sont le produit par des fonctions $A_t(\omega)$ lentement variables d'exponentielles complexes qui elles, sont orthogonales. Ceci conduit PRIESTLEY, 1965, à définir le relief $\rho(t,\omega)$ comme spectre évolutif par (1-57):

(1-57) $\rho(t,\omega)d\omega=|A_t(\omega)|^2 d\mu(\omega)$

En revenant à la décomposition (1-53), écrite:

(1-58) $y(t)=\int e^{j\omega t}A_t(\omega)dY(\omega)$

on voit que y(t) s'interprète comme combinaison d'exponentielles complexes d'amplitude $A_t(\omega)dY(\omega)$, ce qui justifie bien (1-57) comme ayant physiquement le sens d'une répartition spectrale à l'instant t.

Une seconde interprétation de (1-58) va justifier la présence de cette définition dans un chapitre consacré aux représentations paramétriques. Si on suppose que $A_t(\omega)$ a une transformée de Fourier continue $h_t(u)$ (inverse en ω: $u\text{-}\omega$):

(1-59) $A_t(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega u}h_t(u)du$

En incorporant cette expression dans (1-58) et en définissant un signal s(t), stationnaire puisque les accroissements $dY(\omega)$ sont orthogonaux,

(1-60) $s(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t}dY(\omega)$

on obtient:

(1-61) $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h_t(u)s(t-u)du$

On peut ainsi interpréter (1-61) comme l'obtention de y(t) par passage d'un signal stationnaire s(t) dans un système linéaire dépendant du temps avec comme réponse impulsionnelle $h_t(u)$, ce qui est bien une représentation de type paramétrique.

2.2. Estimation du relief de Priestley.

Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'estimation du relief $\rho(t,\omega)$ tel qu'il est défini par PRIESTLEY, 1965. Lui-même propose une méthode qui n'est guère différente de la méthode dite de démodulation complexe. Il définit pour une fenêtre temporelle g(t) donnée sa largeur B_g par:

$$(1\text{-}62) \quad B_g=\int_{-\infty}^{+\infty}|t|.|g(t)|dt$$

La fenêtre g(t) est supposée normée, son énergie valant 1. Cette durée doit être inférieure à la durée typique du signal y(t). Celle-ci est plus délicate à définir. Si la fonction $A_t(\omega)$ a une transformée de Fourier en t-ω, $H_\theta(\omega)$, fonction qui rappelons-le a son maximum en $\theta=0$, il est possible de définir une durée de y par:

$$(1\text{-}63) \quad B(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}|\theta|.|dH_\theta(\omega)|$$

Cependant la représentation de y(t) au moyen de $A_t(\omega)$ n'est pas unique, aussi faut-il faire intervenir l'ensemble Ψ des fonctions $A_t(\omega)$ représentant y(t), et la durée en temps, caractéristique de y(t) s'obtient à partir de la largeur de spectre $B(\omega)$ par:

$$(1\text{-}64) \quad B_y=\mathrm{Sup}_A\left[\frac{1}{\mathrm{Sup}_\omega B(\omega)}\right]$$

Lorsque la fenêtre g(t) est choisie telle que $B_g<<B_y$, et telle que sa largeur en fréquence soit également faible, PRIESTLEY, 1965, propose pour obtenir $\rho(t,\omega_0)$ de moduler y(t) par l'exponentielle complexe de pulsation ω_0, filtrer par la filtre passe-bas dont g(t) est la réponse impulsionnelle, et faire une détection d'enveloppe en prenant le carré du module du signal obtenu. Cependant la variance de la mesure obtenue est comme le montre PRIESTLEY, 1965, voisine du carré de sa moyenne, aussi faut-il lisser cette

mesure par un lissage temporel associé à une pondération w(t). Granger suggère dans la discussion de l'article de PRIESTLEY, 1965, que w dépende aussi de ω. On retrouve le même estimateur chez CHAN, TONG, 1975, et MELARD,1978-c. Ce dernier, comme DROESBEKE, 1977, analyse les propriétés de cet estimateur. Tous deux donnent des expresions de son biais et de sa variance: ils évoluent en sens contraire, le biais étant nul en l'absence de lissage par w(t), et croissant avec le lissage, tandis que la variance décroît. PRIESTLEY, 1965, donne des conditions permettant d'ajuster biais et variances à des valeurs prescrites pour une résolution donnée en temps, ou en fréquence.

2.3. Critiques du relief de Priestley.

La définition due à PRIESTLEY, 1965, a été très vite controversée, à cause de la fragilité de certaines de ses propriétés. Ainsi MELARD, 1978-b, critique le choix de la classe des signaux "oscillants" car il est très difficile de prouver l'appartenance d'un signal à cette classe. Des signaux autorégressifs à moyenne ajustée (ARMA) ne sont pas nécessairement oscillants, malgré le caractère très structuré de ces signaux engendrés par un système à réponse impulsionnelle rationnelle. Cette classe des signaux oscillants à d'autres inconvénients. DE SCHUTTER-HERTELEER, 1977, souligne la difficulté de l'étendre aux signaux vectoriels, car le relief qui s'ensuit conduit à une cohérence entre deux composantes qui est indépendante du temps, ce que certains exemples montrent être une chose peu satisfaisante. BATTAGLIA, 1977, montre aussi que la somme de deux signaux oscillants ne peut être oscillante que si:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho_1(t,\omega)}{\rho_2(t,\omega)}\right] = 0$$

Il introduit alors la classe des signaux σ-oscillants, qui sont somme finie de signaux oscillants, mais cette généralisation est très délicate à manipuler et n'élimine pas les autres difficultés liées à la définition de PRIESTLEY, 1965. Dans un filtrage de y(t), le signal filtré n'est oscillant qu'à certaines conditions, précisées par MM. MARTIN, 1968-a, et RAO, TONG, 1974, qui imposent à la fonction de transfert du filtre d'avoir son maximum à la fréquence 0.

Toutes ces restrictions font que la définition donnée par PRIESTLEY, 1965, malgré l'aspect intuitif et physique qu'elle présente est peu utilisée. On l'a surtout vue à l'oeuvre dans l'analyse de séries chronologies en économétrie et aussi en biologie (MARTIN, 1981). Cette définition est maintenant supplantée par celle de TJØSTHEIM, 1976-b, reprise par MELARD, 1978-a, et qui a pour origine la décomposition de Wold du signal y(t).

2.4. Décomposition de Wold et relief de Priestley.

Dans le cas discret, cette décomposition permet de représenter y_t comme un signal MA d'ordre infini, c'est-à-dire la sortie d'un système de réponse impulsionnelle variable, infinie, dont l'entrée est un bruit blanc:

$$(1\text{-}65)\quad y_t = \sum_{s=-\infty}^{t} h(t,s)\epsilon_s$$

Dans le cas continu, $\epsilon(t)$ sera un brownien et y(t) s'écrira (pour un signal de multiplicité égale à 1):

$$(1\text{-}66)\quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t,s)d\epsilon(s)$$

La classe des signaux oscillants de PRIESTLEY, 1965, n'est pas totalement étrangère à la décomposition de Wold car ABDRABBO, PRIESTLEY, 1967, ont donné les conditions que devraient vérifier un signal oscillant pour admettre une telle décomposition. Si on écrit:

(1-67) $\rho(t,\omega)=|A_t(\omega)|^2 f(\omega)$ avec $f(\omega)d\omega=d\mu(\omega)$

alors, les conditions sont, dans le cas discret:

1) $\int_{-\pi}^{+\pi} \text{Log } f(\omega)d\omega > -\infty$

2) $A_t(\omega)$ est à tout instant t la transformée de Fourier d'une suite causale $g_t(u)$, $u\geq 0$.

3) $\int_{-\pi}^{+\pi} \text{Log}|A_t(\omega)|^2 d\omega > -\infty$

4) $\int_{-\pi}^{+\pi} \text{Log } \rho(t,\omega)>-\infty$

Cette dernière conditon est d'ailleurs vérifiée dès que 1 et 3 le sont; la condition 2 découle aussi de 3. Si le temps est continu, les conditions 1, 3 qui suffisent deviennent:

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Log } f(\omega)}{1+\omega^2} d\omega > -\infty$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Log}|A_t(\omega)|^2}{1+\omega^2} d\omega > -\infty$

Ces conditions qui apparaissent clairement comme une extension non-stationnaire des conditions classiques pour qu'un signal stationnaire soit purement non-déterministe, permettent d'écrire le signal conformément à (1-65) ou (1-66).

3. Relief au sens de Tjøstheim et Mélard.

Passons maintenant à l'étude de la définition du relief au sens de Tjøstheim et Mélard. Il y a deux façons d'introduire cette définition. La plus simple est celle de MELARD, 1978-a, et procède directement à partir de la décomposition de Wold du signal y(t), décomposition étendue au cas non-stationnaire par CRAMER, 1961-a et b. La simplicité de cette démarche est hélas contre balancée par un aspect arbitraire de la formulation du relief. Cet arbitraire disparaît dans l'approche de TJØSTHEIM, 1976-b, qui rend explicite ce en quoi la définition retenue est canonique. Malgré sa plus grande complexité due au recours obligé à la théorie des opérateurs, c'est cette approche qui sera reproduite ici, pour l'éclairage qu'elle apporte sur les significations de ce relief paramétrique. Ce que TJØSTHEIM, 1976-b, choisit d'étendre comme propriété valable du cas stationnaire au cas non-stationnaire, c'est non pas une représentation spectrale comme en (1-44), mais une relation de commutation entre opérateurs dont l'un est associé à la variable temps et l'autre à la variable fréquence ou pulsation.

Cette relation de commutation est issue de la mécanique quantique où la mesure de la position d'une particule et celle de sa vitesse sont la valeur moyenne d'un opérateur q pour la vitesse, et p pour l'impulsion. La particule est connue par sa fonction d'onde $\phi \in L^2$; elle possède deux représentations sur des bases particulières: $\phi(t)$ et $\Phi(\omega)$ sa transformée de Fourier. Dans ces bases, l'action des opérateurs p et q s'écrit simplement:

$$(1\text{-}68) \quad \left[p\phi\right](t)=-j\frac{d\phi(t)}{dt} \quad \text{et} \quad \left[p\Phi\right](\omega)=\omega d\Phi(\omega)$$

$$(1\text{-}69) \quad \left[q\phi\right](t)=tf(t) \quad \text{et} \quad \left[q\Phi\right](\omega)=j\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega}$$

Il est alors facile de montrer que p et q vérifient la relation de commutation suivante:

(1-70) $pq-qp=-jI$

Une paire d'opérateurs vérifiant cette relation sera dit couple de Schrödinger. L'écriture des équations (1-68) à (1-70) est une conséquence directe des propriétés de la transformée de Fourier, qui d'ailleurs a une forme légèrement différente en mécanique quantique où intervient h la constante de Planck. Dans le cadre des signaux aléatoires, la même relation de commutation a été établie par TJØSTHEIM, 1976-c, pour deux opérateurs T et H: T sera l'opérateur temps et H l'opérateur énergie ou Hamiltonien du signal $y(t)$ stationnaire. Les paragraphes suivants reprennent les étapes successives de la démarche de TJØSTHEIM, 1976-a et b: introduction des opérateurs T et H, démonstration de la relation de commutation en temps continu, puis en temps discret, définition d'un opérateur spectral à temps discret, puis à temps continu.

3.1. Opérateurs T et H.

Au signal aléatoire $y(t)$ est associé $L(y)$, variété linéaire engendrée par toutes les combinaisons $\Sigma a_i y(t_i)$, et l'espace de Hilbert $H(y)$ obtenu par completion de $L(y)$ pour le produit scalaire donné par $\langle x_1,x_2\rangle=E(x_1x_2^*)$ où on a supposé le signal complexe. On définira la suite emboitée des espaces $H(y,t)$ (cf CRAMER, 1961-a) engendrés par les combinaisons $\Sigma a_i y(t_i)$ pour $t_i\leq t$. $H(y,-\infty)$ sera leur intersection: $H(y,-\infty)=\bigcap_t H(y,t)$. Le signal $y(t)$ sera supposé purement non-déterministe, ce qui se traduit par $H(y,-\infty)=0$. La suite des espaces $H(y,t+0)$ s'obtient à partir de $H(y,t)$ par $H(y,t+0)=\bigcap_n H(y,t+\frac{1}{n})$. On introduit alors l'opérateur P_t de projection sur $H(y,t+0)$. La famille des projecteurs P_t constitue une résolution de l'identité qui définit un opérateur auto-adjoint T (cf annexe 2) par la relation:

(1-71) $T=\int t.dP_t$

Cet opérateur T est l'opérateur temps. Quant à l'opérateur énergie H, il est simplement le générateur infinitésimal du groupe continu d'opérateurs unitaires, formé par la famille des décalages U_s déjà introduits. La résolution de l'identité $E(\omega)$ des opérateurs U_s est donnée par (1-49) d'où on déduit pour H:

(1-72) $H=\int \omega dE(\omega)$ avec $U_s=e^{jHs}$

Que cet opérateur H soit dénommé Hamiltonien s'explique aisément par le petit calcul suivant:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}y(t)&=\frac{d}{dt}U_t y(0)\\&=\frac{d}{dt}\left[e^{jHt}\right]y(0)\\&=jH.e^{jHt}y(0)\\&=jHy(t)\end{aligned}$$

Cette dernière équation est du même type que les équations de Schrödinger obtenues en mécanique quantique à partir de l'Hamiltonien d'un système. H est bien entendu auto-adjoint, puisque (1-72) en est la décomposition spectrale. En sens inverse, on associera à l'opérateur auto-adjoint T le groupe des opérateurs unitaires S_t tels que $S_t=e^{iTt}$.

3.2. Relation de commutation.

La démonstration de la relation de commutation TH-HT=jI passe par deux étapes: une commutation entre les projecteurs P_t et les décalages U_s: $P_tU_s=U_sP_{t-s}$, puis une commutation entre les décalages U_s et les opérateurs S_t connue sous le nom de relations de Weyl. Un théorème de Von Neumann permet ensuite d'en déduire le résultat cherché sur T et H.

Démonstration de $P_t U_s = U_s P_{t-s}$.

pour tout $x(t)$: $y = P_{t-s} x(t) \Longleftrightarrow \langle y - x(t), x(u) \rangle = 0,\ u \leq t-s$

$$\Longleftrightarrow \langle U_s y - U_s x(t), U_s s(u) \rangle = 0,\ u \leq t-s$$

$$\Longleftrightarrow \langle U_s y - U_s x(t), x(v) \rangle = 0,\ v \leq t$$

$$\Longleftrightarrow U_s y = P_t U_s x(t)$$

d'où

$U_s P_{t-s} x(t) = P_t U_s x(t)$ pour tout $x(t)$.

Démonstration des relations de Weyl (TJØSTHEIM, 1976-a)

$$S_t U_s = \int e^{j\lambda t} dP_\lambda U_s = \int e^{j\lambda t} U_s dP_{\lambda - s}$$
$$S_t U_s = U_s \int e^{j\lambda t} dP_{\lambda - s} = U_s e^{jst} \int e^{j(\lambda - s)t} dP_{\lambda - s}$$
$$S_t U_s = e^{jst} U_s S_t$$

Démonstration de la relation de commutation (BEALS, 1971, pp 68-69)

$$S_t U_s = e^{jTt} s^{jHs} = e^{jst} U_s S_t = e^{jst} e^{jHs} e^{jTt}$$

d'où par dérivation formelle en t:

$$jT.e^{jTt} e^{jHs} = js.e^{jst} e^{jHs} e^{jTt} + e^{jst} e^{jHs} jT.e^{jTt}$$

en t=0 on obtient:

$$jT.e^{jHs} = jse^{jHs} + e^{jHs} jT$$

par dérivation formelle en s:

$$j^2 THe^{jHs} = j^2 s^2 He^{jHs} + je^{jHs} + j^2 He^{jHs} T$$

en s=0 on a:

$$j^2 TH = jI + j^2 HT$$

d'où: $HT - TH = jI$, la relation de commutation cherchée.

Dans le cas à temps discret, la relation de commutation sera différente: elle concernera le même opérateur temps T, mais au lieu de H, générateur infinitésimal des décalages, le décalage de une unité de temps U. On aura alors TU-UT=U. La démonstration se fait en plusieurs temps, en introduisant l'innovation $\epsilon_t=y_t-P_{t-1}y_t$. La relation de définition de T s'écrit $T=\sum_t t(P_t-P_{t-1})$. On en déduira successivement les relations $T\epsilon_t=t\epsilon_t$, $P_tU=UP_{t-1}$, $U\epsilon_t=\epsilon_{t-1}$ et enfin TU-UT=U.

Démonstration.

$T\epsilon_s=s\epsilon_s$ se montre par simple calcul:

$$
\begin{aligned}
T\epsilon_s &= \sum_t t(P_t-P_{t-1})(y_s-P_{s-1}y_s)\\
&= \sum_t t(P_ty_s-P_{t-1}y_s-P_{\min(t,s-1)}y_s+P_{\min(t-1,s-1)}y_s)\\
&= \sum_{t=-\infty}^{s-1} t(P_ty_s-P_{t-1}y_s-P_ty_s+P_{t-1}y_s)\\
&\quad +s(P_sy_s-P_{s-1}y_s)\\
&\quad +\sum_{t=s+1}^{\infty} t(y_s-y_s-P_{s-1}y_s+P_{s-1}y_s)
\end{aligned}
$$

d'où $T\epsilon_s=s(y_s-P_{s-1}y_s)=s\epsilon_s$.

La relation $P_tU=UP_{t-1}$ s'obtient exactement comme dans le cas continu.

La suivante s'en déduit aisément:

$$
\begin{aligned}
U\epsilon_s &= U(y_s-P_{s-1}y_s)\\
&= Uy_s-UP_{s-1}y_s\\
&= Uy_s-P_sUy_s\\
&= y_{s+1}-P_sy_{s+1}\\
&= \epsilon_{s+1}
\end{aligned}
$$

La relation de commutation s'obtient ensuite:

$$(TU-UT)\epsilon_s = TU\epsilon_s - UT\epsilon_s$$
$$= T\epsilon_{s+1} - U(s\epsilon_s)$$
$$= (s+1)\epsilon_{s+1} - s\epsilon_{s+1}$$
$$= \epsilon_{s+1}$$
$$= U\epsilon_s$$

Cette relation étant vérifiée pour tout ϵ_s, et ceux-ci engendrant H(y), la relation est démontrée.

Il est ainsi établi que l'on peut trouver pour tout signal y(t) un couple de Schrödinger d'opérateurs auto-adjoints: T est un opérateur temps lié à la décomposition temporelle (de Wold) de y(t), H est un opérateur énergie lié à la représentation spectrale de y(t). Puisque la famille des espaces H(y,t) et celle des projecteurs P_t se définit aussi dans le cas non-stationnaire (CRAMER, 1961-a et b), et que par contre le décalage, d'où est déduit H, n'est pas toujours défini, l'idée de TJØSTHEIM, 1976-b, est d'introduire H au moyen des relations de commutation. Un opérateur H (resp. U) tel que le couple (T,H) (resp. (T,U)) soit un couple de Schrödinger sera dit opérateur engendrant le spectre. Restent à prouver l'existence et l'unicité d'un tel générateur spectral.

3.3. Générateurs spectraux (temps discret) et relief.

Pour montrer l'existence dans le cas à temps discret d'un opérateur U générateur du spectre, c'est-à-dire tel que TU-UT=U, TJØSTHEIM, 1976-b, utilise l'innovation normalisée η_t. Pour comprendre les raisons qui l'y poussent, il n'est que de regarder la démonstration précédente de la relation de commutation. Si le signal y(t) est non-stationnaire, l'opérateur temps T demeure défini et possède toujours la propriété $T\epsilon_s = s\epsilon_s$ et donc $T\eta_s = s\eta_s$ où $\eta_s = E(|\epsilon_s|^2)^{-\frac{1}{2}}\epsilon_s$. Si il est possible d'introduire un opérateur U tel que $U\eta_s=\eta_{s+1}$, la deuxième partie, puis la troisième partie de la démonstration sera acquise. Or η_s l'innovation normalisée est un bruit blanc de variance 1, donc stationnaire, et l'opérateur U n'est autre que l'opérateur de décalage de η_s. U sera un générateur spectral qui n'est malheureusement pas unique. Si en effet η_t est remplacé par $\epsilon_t^{(\alpha)}=e^{j\alpha(s)}\epsilon_t$, il est possible de définir l'opérateur U_α par $U_\alpha\epsilon_t^{(\alpha)}=\epsilon_{t+1}^{(\alpha)}$ et cet opérateur est aussi un générateur spectral. Cependant, TJØSTHEIM, 1976-b, montre que tout générateur spectral se met sous la forme U_α pour une certaine suite $\alpha(t)$. Il impose alors à l'opérateur U_α d'être canonique au sens où il doit dans le cas stationnaire être un opérateur de décalage. Il montre alors que ceci impose à $\alpha(s)$ d'être une constante dont la valeur est d'ailleurs arbitraire puisque ne changeant pas les propriétés de U_α, ce qui permet de choisir $\alpha(s)=0$.

Le générateur spectral permet alors donner une représentation spectrale de y_t voisine de (1-53) qui sera canonique au sens de la relation de commutation, alors que PRIESTLEY, 1965, avait besoin d'introduire des conditions supplémentaires, qui ne rendaient même pas unique la représentation. Soit la décomposition de Wold de y_t telle que donnée par CRAMER, 1961-a et b:

$$(1\text{-}73) \quad y_t=\sum_{s=-\infty}^{t} h(t,s)\epsilon_s$$

Lorsque l'innovation est normalisée, en posant $\gamma(t,s)=h(t,s)g(s)^{\frac{1}{2}}$ avec $g(s)=E(|\epsilon_s|^2)$, on obtient la représentation temporelle:

$$(1\text{-}74) \quad y_t=\sum_{s=-\infty}^{t} \gamma(t,s)\eta_s$$

Puis en notant que l'opérateur U a un spectre simple et que η_0 en est un élément générateur, on obtient:

$$(1\text{-}75)\quad \eta_t=U^t\eta_0=\int_{-\pi}^{+\pi} e^{j\omega t}dE(\omega)\eta_0$$

et en posant $dE(\omega)\eta_0=d\mu(\omega)$, on obtient:

$$(1\text{-}76)\quad y_t=\int_{-\pi}^{+\pi} F(t,\omega)d\mu(\omega) \quad \text{et } F(t,\omega)=\sum_{s=-\infty}^{t} \gamma(t,s)e^{j\omega s}$$

La quantité $F(t,\omega)$ ainsi définie pourra permettre, (et c'est ce qu'effectue MELARD, 1978-a), de définir un relief $\rho(t,\omega)$:

$$(1\text{-}77)\quad \rho(t,\omega)=|F(t,\omega)|^2=\left|\sum_{s=-\infty}^{t} \gamma(t,s)e^{j\omega s}\right|^2$$

Il faut noter que ce relief n'est défini que si il est possible de normaliser l'innovation ce qui suppose que sa variance reste bornée inférieurement par une quantité strictement positive. Les signaux possédant cette propriété sont dits "à innovation stable" par TJØSTHEIM, 1976-a, et "non-dégénérés" par MARTIN, 1982-a (annexe 1).

3.4. Générateurs spectraux (temps continu) et relief.

Lorsque le signal est à temps continu $y(t)$, la difficulté vient tout d'abord de l'opérateur T défini en (1-71) qui n'est plus à spectre simple. Si la multiplicité de T est M, et si $\{Z_i, i=1..M\}$ est un ensemble d'éléments générateurs de T, la décomposition de Wold est écrite (CRAMER, 1964 et 1966):

$$(1\text{-}78)\quad y(t)=\sum_{i=1}^{M}\int_{-\infty}^{t} h_i(t,s)d\epsilon_i(s) \quad \text{et } d\epsilon_i(s)=dP_s\epsilon_i$$

Dans le cas particulier M=1, en supposant $y(t)$ à innovations stables, TJØSTHEIM, 1976-b, construit un opérateur H engendrant le spectre de la même manière qu'à temps discret, en normalisant l'innovation, puis en construisant un groupe continu d'opérateurs unitaires U_s définis par

$U_s\epsilon(\Delta)=\epsilon(\Delta+s)$ où ϵ est l'innovation normalisée, Δ un ensemble de mesure finie et $\Delta+t$ son translaté d'un temps t. Comme dans la démonstration de la relation de commutation, mais cette fois en se servant des propriétés d'orthogonalité de l'innovation ϵ, il est possible de montrer l'égalité $P_tU_s=U_sP_{t-s}$, et le reste de la démonstration opérant, la relation de commutation s'ensuit pour T et H le générateur infinitésimal du groupe des U_s. L'unicité de cet opérateur H engendrant le spectre n'est pas plus assurée qu'à temps discret, mais ici une seconde difficulté est l'impossibilité de définir un opérateur canonique. Quant à la représentation spectrale, elle s'obtient soit à partir de la décomposition de Wold, soit par l'isomorphisme entre H(y) et L^2, qui au couple de Schrödinger (H,T) associe le couple (p,q) de (1-68) et (1-69):

$$(1\text{-}79)\quad y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(t,\omega)d\Phi(\omega)$$

$$(1\text{-}80)\quad \Phi(\omega_1)-\Phi(\omega_2)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-j\omega_2 s}-e^{-j\omega_1 s}}{-js}d\epsilon(s)$$

$$(1\text{-}81)\quad F(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t,s)e^{j\omega s}ds$$

Dans ces équations, $\epsilon(s)$ est l'innovation normalisée et h(t,s) provient de la décomposition de Wold:

$$(1\text{-}82)\quad y(t)=\int_{-\infty}^{t} h(t,s)d\epsilon(s)$$

Cette décomposition ainsi que celle en temps discret donnée par (1-76) a été établie par KOREZLIOGLU, 1963, qui cependant ne considérait pas la définition du relief $\rho(t,\omega)$ que TJØSTHEIM, 1976-b, déduit alors:

$$(1\text{-}83)\quad \rho(t,\omega)=|F(t,\omega)|^2=\left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(t,s)e^{j\omega s}ds\right|^2$$

Cette définition a deux faiblesses, l'une, déjà signalée est que son aspect canonique n'est pas justifié contrairement à ce qui se passait à temps discret. La seconde faiblesse est que pour un signal $y(t)$ de multiplicité M supérieure à 1, cette définition conduit TJØSTHEIM, 1976-b, à définir le relief comme un vecteur de dimension M dont la i-ème composante $\rho_i(t,\omega)$ est le relief associé par (1-82) et (1-83) au processus d'innovation partielle $\epsilon_i(t)$. Une telle multiplicité de la représentation spectrale semble assez étonnante et peu en accord avec ce que l'on rencontre avec les signaux stationnaires. TJØSTHEIM, 1976-b, s'en tient à la déclaration que ceci n'est pas plus étonnant finalement que la multiplicité de la représentation temporelle! On pourrait pourtant aller plus loin. Si on écrit en effet:

$$(1\text{-}84)\quad y(t)=\sum_{i=1}^{M}\int_{-\infty}^{+\infty}F_i(t,\omega)d\Phi_i(\omega)$$

avec $\Phi_i(\omega)$ défini comme en (1-80) en prenant pour $\epsilon(s)$ l'innovation partielle normalisée $\epsilon_i(s)$, et $F_i(t,\omega)$ défini par (1-81) où h est aussi indicé par i (voir (1-78) à normaliser), on peut écrire la variance de $y(t)$:

$$(1\text{-}85)\quad E(|y(t)|^2)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\iint_{-\infty}^{+\infty}F_i(t,\omega)F_j^*(t,\xi)d\Phi_i(\omega)d\Phi_j^*(\xi)$$

Les mesures spectrales $\Phi_i(\omega)$ sont deux fois orthogonales: chacune l'est en tant que mesure orthogonale: $E(d\Phi_i(\omega)d\Phi_i^*(\xi))=\delta(\omega-\xi)\frac{d\omega}{2\pi}$ et entre elles, elles le sont par l'orthogonalité des sous-espaces $H(z_i,t)$ pour tout t. Par conséquent, (1-85) s'écrit aussi:

$$(1\text{-}86)\quad E(|y(t)|^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{M}|F_i(t,\omega)|^2\right]\frac{d\omega}{2\pi}$$

Cette dernière équation montre que l'on peut choisir comme définition du relief qui sera alors en accord avec la propriété de distribution marginale, l'équation suivante:

$$(1\text{-}87)\quad \rho(t,\omega)=\sum_{i=1}^{M}\left|F_i(t,\omega)\right|^2 = \sum_{i=1}^{M}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} h_i(t,s)e^{j\omega s}d\right|^2$$

3.5. **Propriétés du relief de Tjøstheim et Mélard.**

Intéressons nous maintenant aux propriétés du relief de Tjøstheim-Mélard, défini dans le cas discret par (1-77) et pour un signal à temps continu par (1-83) (et éventuellement (1-87), mais cette définition ne semble pas avoir été envisagée par ces auteurs). MELARD, 1978-a, soumet ce relief à la grille de propriétés énoncées par LOYNES, 1968. Si on se réfère à la conclusion du chapitre I, il apparaît nettement que ce relief, ne pouvant avoir simultanément toutes les propriétés requises, mais ayant par définition celle de positivité, devra présenter des lacunes au niveau des propriétés de localité. On remarque immédiatement au vu de (1-86) que le relief de Tjøstheim-Mélard possède des propriétés de localité requises, celle numérotée C1-b au chapitre I: la distribution marginale temporelle est la variance du signal. De la distribution marginale en fréquence, on ne peut pas parler directement, le signal n'ayant pas une énergie totale définie. Il faut plutôt considérer la distribution moyenne au sens d'une somme sur l'intervalle de temps (-T,+T) normalisée par une division par 2T, dans laquelle on fait ensuite tendre T vers l'infini. Mais vers quel spectre moyen devrait donc tendre cette moyenne? La seule propriété que l'on peut en fait retenir est l'identité du relief avec la densité spectrale de puissance pour un signal stationnaire, et cette propriété est clairement possédée par le relief de Tjøstheim-Mélard, étant au centre du processus de construction de ce relief. Au sens précisé au chapitre I, le relief de Tjøstheim-Mélard est bien une distribution de l'énergie du signal dans le plan temps-fréquence.

Sa nature est précisé par: sa réalité (A1, B1), sa positivité (B8, C3), mais les liens avec la covariance du signal, que réclame LOYNES, 1968, (B1, B2, A4, B4, B12) ne sont pas établis par cette définition du relief comme le montre MELARD, 1978-a, par un contre-exemple. Dans celui-ci, un bruit blanc ϵ_t est à la source du signal y_t conformément à (1-88):

$$(1\text{-}88) \quad y_t = \begin{cases} \epsilon_t - 0.5\epsilon_{t-1} & \text{si } t \neq 1 \\ 0.5\epsilon_1 - \epsilon_0 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Ce signal a même relief que le signal stationnaire $y_t = \epsilon_t - 0.5\epsilon_{t-1}$, alors que leurs covariances diffèrent. Il n'y a donc pas bijection entre covariance et relief (A4, B4).

Le troisième aspect du relief étudié au chapitre I est sa localité. On observe la propriété de causalité énoncée par BLANC-LAPIERRE, PICINBONO, 1955, (condition C2-b). Son équivalent en fréquence ne peut cependant être établi. Quant à la condition des tranches donnée en A6/B6, elle est analysée en profondeur par MELARD, 1978-a, qui montre que lorsqu'on commute, par exemple à l'instant 0 d'un signal stationnaire $y_{1,t}$ à un signal aussi stationnaire $y_{2,t}$, le relief commute au même instant du spectre $Y_1(\omega)$ au spectre $Y_2(\omega)$ si y_1 et y_2 ont même innovation. Si leurs innovations sont indépendantes, alors le relief qui s'identifie à $Y_1(\omega)$ jusqu'à l'instant 0, évolue à partir de t=1 vers $Y_2(\omega)$, et converge à l'infini vers $Y_2(\omega)$. La localité par tranches n'est donc pas vérifiée par cette définition du relief.

Le dernier aspect est l'invariance du relief. Il est clair que l'invariance par translation en temps (B9) comme en fréquence (B10) est satisfaite. Par contre celle par filtrage n'est qu'approximativement satisfaite: MELARD, 1978-a, montre que pour un filtrage à réponse impulsionnelle finie, et pour un signal y_t dont la variation du relief $\rho(t,\omega)$ reste bornée sur tout intervalle de durée inférieure à celle de la réponse du filtre, par une quantité $B(\omega)$ indépendante du temps, on peut reconstituer de façon approchée le relief du signal filtré. Quant à la propriété d'invariance par retournement du temps, (B11) elle ne sera pas satisfaite, par le simple fait que l'innovation n'est plus la même après retournement du temps, et la fonction $f(t,s)$ ne se conserve donc pas, ni le relief.

3.6. Critiques du relief de Tjøstheim et Mélard.

La définition du relief par TJØSTHEIM, 1976-b, réalise le compromis positivité-localité inhérent à la quatrième relation d'incertitude de Heisenberg en choisissant la positivité et en abandonnant dans la localité ce qui concerne le limitation à une tranche temporelle ou fréquentielle. Ce choix a deux conséquences qui bien que non rédibitoires en théorie, sont des lacunes gênantes en pratique. La première conséquence s'exprime par le fait que pour un signal autorégressif, il est possible de construire des exemples simples où l'évolution temporelle du relief ne suit que très mal celle du modèle du signal, situation rendue plus grave par la grande fréquence d'emploi des modèles autorégressifs. Supposons que le signal y_t est fabriqué à partir des deux signaux $y_{1,t}$ et $y_{2,t}$ tous deux autorégressifs et stationnaires, et pour simplifier de même ordre p:

(1-89) $y_{k,t}+a_{k,1}y_{k,t-1}+\ldots+a_{k,p}y_{k,t-p}=\epsilon_{k,t}$ (k=1,2)

Le signal y_t est obtenu par une commutation de l'un à l'autre de ces signaux:

(1-90) $\begin{cases} y_t=y_{1,t} & \text{si } t\leqslant 0 \\ y_t=y_{2,t} & \text{si } t\geqslant 1 \end{cases}$

La démonstration de MELARD, 1978-a, a clairement pour conclusion que si les innovations $\epsilon_{1,t}$ et $\epsilon_{2,t}$ sont indépendantes entre elles, alors le relief de y_t sera identique à $Y_1(\omega)$, le spectre de $y_{1,t}$, jusqu'à l'instant 0, puis il évoluera vers $Y_2(\omega)$ qu'il atteindra au bout d'un temps infini. Pourtant, si on observe le signal y_t pour t>0, et son innovation, on s'aperçoit qu'après p échantillons, l'innovation comme les paramètres du modèle autorégressif, deviennent identiques à ce qu'ils sont au même instant pour $y_{2,t}$:

(1-91) $\epsilon_t=\epsilon_{2,t}$ et $a_i(t)=a_{2,i}$ pour t>p

Montrons le:

l'innovation ϵ_t est la différence entre y_t et son estimation étant donné son passé:

$$\epsilon_t=y_t-E(y_t/y_{t-1},y_{t-2},\ldots)$$

pour t>0, compte-tenu de l'indépendance de $\epsilon_{1,t}$ et $\epsilon_{2,t}$ (ou de $y_{1,t}$ et $y_{2,t}$):

$$\epsilon_t=y_t-E(y_t/y_{t-1},y_{t-2},\ldots,y_1)$$

$$\epsilon_t=y_{2,t}-E(y_{2,t}/y_{2,t-1},y_{2,t-2},\ldots,y_{2,1})$$

le fait que $y_{2,t}$ soit autorégressif d'ordre p implique:

$$\epsilon_t=y_{2,t}-E(y_{2,t}/y_{2,t-1},\ldots,y_{2,t-p}) \quad \text{pour } t>p$$

soit:

$$\epsilon_t=\epsilon_{2,t} \quad \text{pour } t>p \quad \text{et donc} \quad a_i(t)=a_{2,i} \quad \text{pour } t>p.$$

On peut d'ailleurs ajouter que l'ordre du modèle autorégressif entre $1\leq t\leq p$, vaut t-1, et que le modèle à l'instant t est le modèle intermédiaire d'ordre t dans la récursion de Levinson donnant le modèle $(a_{2,1}\ldots a_{2,p})$ d'ordre p. A voir ce résultat, on pourrait espérer que le relief, si il est aussi local ou instantané qu'il doit l'être, suive le spectre $Y_1(\omega)$ jusqu'à $t=0$, puis passe par une phase transitoire de durée p, qui le mène à partir de $t=p+1$ à être égal à $Y_2(\omega)$, c'est-à-dire au spectre du second signal. La définiton de Tjøstheim-Mélard n'a pas du tout ce comportement, comme on l'a vu.

On pourrait objecter à cet exemple son côté assez artificiel: il est rare qu'on ait ainsi commutation d'un signal y_1 à un autre y_2 qui en est totalement indépendant. Faisons donc l'hypothèse contraire que les deux signaux ont même innovation (qui sera aussi celle de y_t) $\epsilon_t=\epsilon_{1,t}=\epsilon_{2,t}$. On voit que l'ordre p du modèle de y_t sera constant, et que la commutation du modèle 1 au modèle 2 se fera instantanément lors du passage de $t=0$ à $t=1$. Pourtant le relief au sens de Tjøstheim-Mélard aura toujours le même comportement, car la réponse impulsionnelle du système engendrant y_t à partir de son innovation ϵ_t, va être égale à celle du modèle 1 pour $t\leq 0$, mais après la commutation, elle n'évoluera que lentement et asymptotiquement vers la réponse impulsionnelle du modèle 2, et le relief évoluera pareillement. Voilà mise en évidence la cause de cette première lacune: le relief de Tjøstheim-Mélard ne respecte pas la condition de localité par tranches parce qu'il repose sur le réponse impulsionnelle de système générateur du signal, et que celle-ci n'est pas une représentation locale.

La deuxième lacune évoquée, est liée à une situation concrète où apparaît cette localité par tranches. Un signal n'est connu en pratique que par une réalisation sur un intervalle de temps borné $(0,T)$. L'estimation du relief au sens de Tjøstheim-Mélard est impossible si on ne fait pas d'hypothèse sur le signal aux instants précédant la première mesure: signal nul, signal stationnaire avec le même système générateur qu'à l'instant 0, compromis entre ces deux hypothèses ... On arrive ainsi au paradoxe que si un modèle du signal, par exemple autorégressif ou ARMA, est connu ou estimé, on ne peut pas pour autant en déduire le relief. Ces réflexions m'ont amené à penser que la définition de Tjøstheim-Mélard pouvait être améliorée dans le sens d'une plus grande instantanéïté si le modèle générateur n'était plus une réponse impulsionnelle, mais un modèle plus local, d'où la définition d'un relief rationnel ou spectre évolutif rationnel (GRENIER, 1981-a et b). Les paragraphes suivants concluront ce chapitre consacré aux définitions du relief paramétrique, par une description du relief rationnel, motivée par l'étude des différents modèles possibles et des définitions en résultant, puis celle de leurs propriétés.

4. Relief rationnel.

4.1. Modèles rationnels non-stationnaires.

Les deux classes de modèles qui peuvent remplacer la réponse impulsionnelle sont les modèles ARMA, et les représentations par variables d'état. Dans le cas stationnaire, le modèle ARMA est défini par l'ordre p de son dénominateur (plus exactement du dénominateur de sa fonction de transfert), par l'ordre q de son numérateur, et par les coefficients $a_1 \ldots a_p$ et $b_0 \ldots b_q$ de la relation de récurrence entre l'entrée ϵ_t normalisée (sa variance vaut 1), et la sortie y_t:

$$(1\text{-}92) \quad y_t + a_1 y_{t-1} + \ldots + a_p y_{t-p} = b_0 \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} + \ldots + b_q \epsilon_{t-q}$$

Dans le cas non-stationnaire, les coefficients a_i et b_i deviennent des fonctions du temps, et la condition de stabilité et de phase minimale du filtre devient une condition d'absolue sommabilité des réponses impulsionnelles du filtre et de son inverse (HALLIN, MELARD 1977, MILLER, 1969, HALLIN, 1978).

Deux écritures de (1-92) sont possibles. La première est la plus naturelle à priori:

$$(1\text{-}93)\quad \sum_{i=0}^{p} a_i(t)y_{t-i} = \sum_{j=0}^{q} b_j(t)\epsilon_{t-j} \quad \text{et } a_0(t)=1$$

A côté de cette écriture, peut figurer une seconde formule où l'instant de de mesure de a_i devient t-i, si bien que les paramètres et la variable qu'ils multiplient ont même indice. Cette forme sera pour simplifier dite "synchrone", la première étant dite "décalée". Voici la forme synchrone:

$$(1\text{-}94)\quad \sum_{i=0}^{p} a_i(t-i)y_{t-i} = \sum_{j=0}^{q} b_j(t-j)\epsilon_{t-j}$$

Bien sûr le choix entre ces deux formes n'est qu'un simple problème d'écriture et on passe aisément de l'une à l'autre puisque si on écrit $\alpha_i(t)$ les fonctions décalées, on a: $\alpha_i(t)=a_i(t-i)$ ou encore $a_i(t)=\alpha(t+i)$. Il apparaît pourtant que ce choix ne sera pas indifférent lorsqu'on voudra définir la relief à partir du modèle. Il aura aussi une influence non négligeable sur la structure des algorithmes d'identification d'un tel modèle.

4.2. Réponse impulsionnelle et modèle ARMA.

L'équivalence entre modèles ARMA et réponses impulsionnelles est bien connue dans le cas stationnaire: un modèle ARMA(p,q) équivaut à un modèle AR(∞) ou bien à un modèle MA(∞), qui dans ce dernier cas fournit la décomposition de Wold de y_t. Le numérateur, le dénominateur, et le modèle lui-même ont pour fonction de transfert:

$$(1\text{-}95)\quad A(z)=1+a_1 z^{-1}+\ldots+a_p z^{-p}$$

$$(1\text{-}96)\quad B(z)=b_0+b_1 z^{-1}+\ldots+b_q z^{-q}$$

$$(1\text{-}97)\quad H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}$$

Cette dernière fonction H(z), évaluée comme quotient de B par A dans une division en puissances croissantes de z^{-1} n'est autre que la transformée en z de la réponse impulsionnelle du filtre, c'est-à-dire le modèle $MA(\infty)$ équivalent. Le modèle $AR(\infty)$ s'obtient par division de A par B. Dans le cas non-stationnaire, cette procédure ne peut plus s'utiliser. Il faut avoir recours à une écriture temporelle des équations. Nous ne nous intéressons qu'à la condition permettant d'associer à une réponse impulsionnelle ou un $MA(\infty)$, un modèle ARMA d'ordre fini.

Proposition:

Le système non-stationnaire de réponse impulsionnelle $h(t,s)$ admet une représentation rationnelle ou ARMA sous la forme de l'équation récurrente (1-94) si et seulement si il existe deux entiers p et q, et p fonctions $a_i(t)$, $i=1...p$ tels que:

$$(1\text{-}98) \quad \sum_{i=0}^{p} a_i(t-i)h(t-i,t-n)=0 \quad \text{pour } n>q$$

où on a posé $a_0(t)=1$.

Condition nécessaire:

Supposons que le système donné par $h(t,s)$ soit $ARMA(p,q)$, conformément à (1-94). Tenant compte de:

$$y_t=\sum_{k=0}^{\infty} h(t,t-k)\epsilon_{t-k}$$

où ϵ_t est une entrée quelconque, on transforme (1-94) en:

$$(1\text{-}99) \quad \sum_{i=0}^{p} a_i(t-i)\sum_{k=0}^{\infty} h(t-i,t-k-i)\epsilon_{t-k-i}=\sum_{j=0}^{q} b_j(t-j)\epsilon_{t-j}$$

Les deux membres de cette équation doivent être égaux quelque soit ϵ_t, ce qui implique pour $n>q$, en prenant $j=k+i$ dans (1-99) la relation (1-98) et assure la condition nécessaire.

Condition suffisante:

Supposons qu'il existe p,q et les $a_i(t)$ vérifiant (1-98) et posons:

$$(1\text{-}100)\quad b_j(t)=\sum_{i=0}^{j} a_i(t+j-i)h(t+j-i,t)$$

Alors le système de réponse impulsionnelle h(t,s) vérifie la relation (1-99), et par conséquent la relation de récurrence (1-94), ce qui assure la réciproque.

Corollaire:

Le signal y_t dont la décomposition de Wold a pour réponse impulsionnelle h(t,s) est un signal ARMA(p,q) si et seulement si il existe deux entiers p, q et p fonctions $a_i(t)$ vérifiant la condition (1-98).

La démonstration est brève. La proposition précédente assure que y_t est sortie d'un système d'équation récurrente (1-94), et h(t,s) étant la réponse impulsionnelle de la décomposition de Wold de y_t est absolument sommable ainsi que celle du système inverse. Comme h(t,s) sera aussi la réponse impulsionnelle de (1-94), il s'ensuit que (1-94) est bien l'écriture d'un modèle ARMA, et ϵ_t est l'innovation de y_t.

Remarque:

Nous venons de voir comment passer de la réponse impulsionnelle h(t,s) à la relation récurrente ARMA. L'inverse est sans difficulté et la réponse impulsionnelle du modèle ARMA est:

$$(1\text{-}101)\quad h(t,t)=b_0(t)$$

$$(1\text{-}102)\quad h(t,t-k)=b_k(t-k)-\sum_{i=1}^{k} a_i(t-i)h(t-i,t-k)\quad k\epsilon(1,q)$$

$$(1\text{-}103)\quad h(t,t-k)=-\sum_{i=1}^{\min(p,k)} a_i(t-i)h(t-i,t-k)\quad k>p$$

A côté de la représentation ARMA se doit de figurer aussi la représentation par variables d'état. Celle-ci peut s'obtenir sous deux formes canoniques différentes: la forme commandable et la forme observable. Leur obtention, qui va être décrite dans ce qui suit est, pour ce qui concerne la forme observable très facile, mais pour ce qui est de la forme commandable plus délicate. Ces deux formes canoniques sont bien connues dans le cas stationnaire, mais n'ont pratiquement pas été étudiées dans le cas non-stationnaire, si l'on excepte l'approche algébrique de KAMEN, HAFEZ, 1979 (annexe 4). Les propositions qui suivent, élaborées pour les besoins de la présente étude, répondent partiellement à la question de l'existence et de la construction de ces formes canoniques, et ceci, uniquement dans le contexte des signaux scalaires, ou des systèmes mono-entrée, mono-sortie.

4.2.1. Forme canonique observable.

Proposition.

Le système décrit par l'équation récurrente ARMA (1-94) admet la représentation sous forme d'état (1-104) et réciproquement.

$$(1\text{-}104)\quad x_t=\begin{bmatrix} -a_1(t-1) & 1 & 0 & & 0 \\ . & & 1 & & \\ . & & & & 1 \\ -a_n(t-1) & 0 & & & \end{bmatrix} x_{t-1}+\begin{bmatrix} b_0(t) \\ \\ b_{n-1}(t) \end{bmatrix}\epsilon_t$$

$$y_t=[\,1\quad 0\qquad\qquad 0\,]x_t$$

Démonstration.

Celle-ci se fait par calcul direct, en introduisant l'état x_t:

$$(1\text{-}105)\quad \begin{aligned} x_t(1)&=y_t\\ x_t(2)&=y_{t+1}+a_1(t)y_t-b_0(t+1)\epsilon_{t+1}\\ x_t(3)&=y_{t+2}+a_2(t)y_t-b_0(t+2)\epsilon_{t+2}-b_1(t+1)\epsilon_{t+1}\\ x_t(n)&=\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t+n-i-1)y_{t+n-i-1}-\sum_{i=0}^{n-2} b_i(t+n-i-1)\epsilon_{t+n-i-1}\end{aligned}$$

Il est alors clair que (1-94) implique (1-104) et réciproquement, avec $n=\sup(p,q+1)$.

Corollaire.

Le système de réponse impulsionnelle $h(t,s)$ admet la représentation (1-104) si et seulement si il existe deux entiers p,q et p fonctions $a_i(t)$ telles que (1-98) soit vérifié. Les coefficients $b_i(t)$ sont alors donnés par (1-100).

4.2.2. Forme canonique commandable.

Proposition.

Le système de réponse impulsionnelle $h(t,s)$ admet la représentation sous forme d'état (1-106):

$$(1\text{-}106)\quad x_t=\begin{bmatrix} & 1 & & 0\\ & & & \\ 0 & & & 1\\ -a_n(t-n) & \dots & & -a_1(t-1)\end{bmatrix}x_{t-1}+\begin{bmatrix}0\\ \\ 0\\ 1\end{bmatrix}\epsilon_t$$

$$y_t=[\ b_{n-1}(t)\ \dots\ b_0(t)\ ]x_t$$

si et seulement si il existe deux entiers p et q, et p fonctions du temps $a_i(t)$ tels que:

$$(1\text{-}107)\quad \sum_{i=0}^{p} a_i(t-m)h(t,t-m-i)=0 \quad \text{pour } m>q$$

On aura alors $n=\sup(p,q+1)$ et les coefficients $b_i(t)$ seront donnés par:

$$(1\text{-}108)\quad b_j(t)=\sum_{i=0}^{j} a_i(t-j)h(t,t-j+i) \quad \text{pour } j=0..n-1$$

Condition nécessaire.

Si nous écrivons (1-106) sous la forme

$$\begin{cases} x_t = A_{t-1} x_{t-1} + Be_t \\ y_t = C_t x_t \end{cases}$$

et en définissant la matrice de transition d'état $\Phi(t,s)$, la réponse impulsionnelle s'écrit:

$$h(t,t-m) = C_t \Phi(t,t-m) G$$

avec $\Phi(t,t-m) = A_{t-1} \ldots A_{t-m}$. Soit $V_k(t,t-m)$ la k-ième colonne de la matrice $\Phi(t,t-m)$. Une relation de récurrence sur ces colonnes s'obtient à partir des propriétés de $\Phi(t,t-m)$ et de A_t:

$$\Phi(t,t-m+1).A_{t-m} = \Phi(t,t-m) \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} V_k(t,t-m) = V_{k-1}(t,t-m+1) - a_{n+1-k}(t-m) V_n(t,t-m+1) & \text{si } k>1 \\ V_1(t,t-m) = -a_n(t-m) V_n(t-m+1) \end{cases}$$

Cette récurrence donne pour $V_n(t,t-m)$ deux expressions suivant que m est inférieur ou supérieur à n.

$$V_n(t,t-m) = -\sum_{i=1}^{n} a_i(t-m) V_n(t-m+i) \quad \text{si } m \geq n$$

En remarquant alors que $V_n(t,t-m) = \Phi(t,t-m)B$ soit encore $h(t,t-m) = C_t V_n(t,t-m)$, la relation (1-108) est démontrée, et q=n-1. La relation (1-108) s'obtient à partir de la relation de récurrence sur $V_n(t,t-m)$ quand m<n:

$$V_n(t,t-m) = -\sum_{i=1}^{m} a_i(t-m) V_n(t-m+i) + V_m(t,t) \quad \text{si } m<n$$

et comme $\Phi(t,t) = I$, le vecteur $V_{n-m}(t,t)$ contient des zéros et un seul élément non nul, égal à 1, situé à la (n-m)ième ligne d'où

$C_t V_{n-m}(t,t)=b_m(t,t)$ et (1-108) s'en déduit directement.

Condition suffisante.

Soient les $a_i(t)$ et $b_i(t)$ vérifiant (1-107) et (1-108) pour le système dont la réponse impulsionnelle est h(t,s). A l'entrée ϵ_t de ce système on associera le signal w_t:

$$w_t=\epsilon_t-\sum_{i=1}^{p} a_i(t-i)w_{t-i}$$

On définit l'état x_t par:

$$x_t=\begin{bmatrix} w_{t-n+1} \\ . \\ w_{t-1} \\ w_t \end{bmatrix}$$

Il est alors clair que x_t vérifie la relation (1-106), et que le système (1-106) réalise la réponse impulsionnelle h(t,s).

Remarques.

Comme dans le cas stationnaire, on vérifie immédiatement que la forme compagne de l'équation d'état dans (1-104) assure l'observabilité du système, alors que la forme (1-106) assure sa commandabilité.

Les relations (1-98), (1-100), (1-107) et (1-108) sont à lire comme des relations entre fonctions du temps t, et donc à vérifier quel que soit t, p et q étant constants.

La comparaison des relations (1-98) et (1-107) sur les $a_i(t)$ montre que les coefficients $a_i(t)$ mais aussi $b_i(t)$ figurant dans les deux équations d'état ne sont pas les mêmes. C'est là une conséquence de la non-stationnarité puisque pour un modèle stationnaire les deux forme canoniques observables et commandables associées ont les mêmes coefficients dans des équations d'état simplement duales l'une de l'autre. La démonstration de la réalisabilité sous forme commandable, dans le cas stationnaire introduit la même quantité w_t issue de la "partie AR" ou du dénominateur du système, mais tout se simplifie du fait que les polynômes $A(z)$ et $B(z)$, transformées en z respectives de la partie AR et de la partie MA, commutent.

Dans le cas non-stationnaire, le recours à une transformée en z généralisée est possible, mais délicat (KAMEN, KHARGONEKAR, 1982), et il conduit à des polynômes qui ne commutent pas dans l'anneau introduit pour définir la transformée en z. C'est ce qui a imposé dans la démonstration précédente le recours à un calcul dans le domaine temporel, explicitant la matrice de transition $\Phi(t,s)$. Si la matrice A était invariante dans le temps, la matrice Φ serait puissance de A: $\Phi(t,s)=A^{t-s}$, et le théorème de Cayley-Hamilton fournirait directement la forme canonique associée. L'absence de ce théorème dans le cas non-stationnaire est une seconde raison à la différence entre les deux formes observable et commandable.

4.2.3. Lien entre modèle ARMA et forme canonique commandable.

On vient de voir que la forme observable est équivalente au modèle ARMA. Qu'en est-il de la forme commandable ? L'examen des conditions (1-100) et (1-107) montre que si on les interprète, comme ce sera fait plus loin, en termes de matrices, l'une sera une condition de rang sur les lignes de la matrice de Hankel ou de Toeplitz généralisée. L'autre sera une condition sur les colonnes. Rien ne permet alors d'affirmer que les rangs p,q associé à la condition (1-107) et à la forme commandable coincident avec ceux du cas observable ou du modèle ARMA. Ce résultat rejoint celui de KAMEN, HAFEZ, 1979, qui montrent que le passage d'une équation d'état quelconque (non-canonique) et non-stationnaire à la forme canonique commandable peut exiger d'augmenter la taille du vecteur d'état. On ne pourra donc donner qu'une condition suffisante pour que la forme commandable (1-106) corresponde à un modèle ARMA.

Proposition.

Pour que le modèle (1-106) réalise un modèle ARMA d'ordre p,q avec $p \leq n$ et $q < n$, il suffit qu'il soit observable.

Démonstration.

Nous recherchons en fait la partie autorégressive du modèle, et ses coefficients $\alpha_k(t)$ tels que le résidu soit à réponse impulsionnelle finie $f(t,t-j)=0$ pour $j>q$:

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k(t-k)y_{t-k} = \sum_{j=0}^{\infty} f(t,t-j)\epsilon_{t-j}$$

Soit $h(t,t-i)=C_t A_{t-1}\ldots A_{t-i}B$ la réponse du modèle commandable. En l'introduisant dans la relation précédente, on obtient

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k(t-k) \sum_{i=0}^{\infty} h(t-k,t-k-i)\epsilon_{t-k-i} = \sum_{j=0}^{\infty} f(t,t-j)\epsilon_{t-j}$$

D'où en égalant les coefficients de ϵ_{t-j}:

$$f(t,t-j) = \sum_{k=0}^{\min(p,j)} \alpha_k(t-k)h(t-k,t-j)$$

Pour que les $\alpha_k(t)$ soient la partie AR du modèle, il suffit qu'ils vérifient:

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k(t-k)C_{t-k}\, A_{t-k-1}\ldots A_{t-j}B=0 \quad \text{pour } j \geq p$$

Puisque le système est commandable, les colonnes de $A_{t-p}\ldots A_{t-j}B$ pour $j \geq p$ engendrent l'espace d'état tout entier, et il suffit que les coefficients $\alpha_k(t)$ vérifient:

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k(t-k)C_{t-k})A_{t-k-1}\ldots A_{t-j}=\begin{bmatrix}0\ldots 0\end{bmatrix}$$

Si le modèle d'état est observable, alors ce système d'équations possède une solution:

$$[1\ \alpha_1(t-1)\ldots\alpha_p(t-p)]\begin{bmatrix} C_tA_{t-1}A_{t-2}\ldots A_{t-p} \\ C_{t-1}A_{t-1}A_{t-p+1} \\ \ldots \\ C_{t-p} \end{bmatrix}=[0\ \ldots\ 0]$$

On en déduit la partie MA: $(j=0\ldots p-1)$

$$\beta_j(t)=f(t,t-j)=\sum_{k=0}^{j} \alpha_k(t-k)C_{t-k}A_{t-k-1}\ldots A_{t-j}G$$

Si le modèle n'est pas observable, le système précédent donnant les $\alpha_k(t)$ peut ne pas avoir de solution pour $p\leq n$.

4.3. Définition du relief rationnel.

Il est maintenant possible de définir un relief à partir de chacune des trois formes rencontrés: modèle ARMA, équation d'état observable, équation d'état commandable. Pour assurer la compatibilité avec le spectre stationnaire, il suffit de figer comme dans un cliché instantané les paramètres du modèle, et de prendre pour relief à l'instant d'observation le spectre du signal stationnaire qui serait engendré par ce modèle invariant "tangent" à la trajectoire du modèle non-stationnaire. Chacun des trois modèles possibles donnera un relief rationnel, c'est-à-dire qui sera une fraction rationnelle en ω, sous la formulation générale:

$$(1\text{-}109)\quad \rho(t,\omega)=\left[\frac{B(t,z)B(t,z^{-1})}{A(t,z)A(t,z^{-1})}\right]_{z=e^{j\omega}}$$

La définition des polynômes en z, A(t,z) et B(t,z) va dépendre de la représentation adoptée parmi les trois possibles, mais aussi des conventions définissant l'instantanéïté. Ainsi pour le modèle ARMA, le choix entre les deux écritures synchrone et décalée conduit à deux définitions de A et B. Dans le cas synchrone (1-94):

$$(1\text{-}110)\quad A(t,z)=\sum_{i=0}^{p} a_i(t-i)z^{-i}$$

alors que dans le cas décalé, (1-93), on obtient

$$(1\text{-}111)\quad A(t,z)=\sum_{i=0}^{p} a_i(t)z^{-i}$$

Le polynôme B se définira parallèlement à (1-110) et(1-111). Cette distinction entre les deux définitions n'en est en fait pas une, car si on retient dans (1-110) les coefficients de la forme synchrone et dans (1-111) ceux de la forme décalée, la relation déjà soulignée entre ces jeux de coefficients rend les deux formules identiques. Si par contre dans (1-111) on introduit les coefficients synchrones, on obtient une définition qui se différencie de (1-110) et possède une interprétation plus formelle. En introduisant l'opérateur de décalage z tel que z(f(t)) = f(t+1), le modèle ARMA peut s'écrire dans sa forme synchrone:

$$(1\text{-}112)\quad \sum_{i=0}^{p} z^{-i}(a_i(t)y_t)=\sum_{j=0}^{q} z^{-j}(b_j(t)\epsilon_t)$$

Une telle écriture purement formelle, ne coïncide pas avec la transformée en z usuelle, mais s'apparente à la généralisation qu'en donnent KAMEN, KHARGONEKAR, 1982. Si on fige les paramètres du modèle dans (1-112) on retrouve alors la définition du relief que fournit (1-111) avec (1-109).

Avec le modèle sous forme d'équation d'état, observable, se retrouve la même dualité. Si on fige les équations à l'instant t, on obtiendra:

$$
(1\text{-}113)\quad \begin{cases} A(t,z)=\sum_{i=0}^{p} a_i(t-1)z^{-i} \\ B(t,z)=\sum_{j=0}^{q} b_j(t)z^{-j} \end{cases}
$$

où p=n et q=n-1. Si on utilise par contre une écriture formelle avec l'opérateur de décalage, l'équation d'état devient:

$$
(1\text{-}114)\quad \begin{cases} x_t=z^{-1}(A_t z_t)+B_t\epsilon_t \\ y_t=Cx_t \end{cases}
$$

En figeant ce modèle on retrouve pour A(t,z), la définition (1-111), avec pour coefficients $a_i(t)$ et $b_i(t)$ ceux de la version synchrone (1-94) du modèle ARMA.

Dans la forme commandable, se produit la même alternative dans laquelle le polynôme A(t,z) s'écrit soit:

$$
(1\text{-}115)\quad A(t,z)=\sum_{i=0}^{p} a_i(t-i)z^{-i}
$$

ou, par utilisation du décalage:

$$
(1\text{-}116)\quad A(t,z)=\sum_{i=0}^{p} a_i(t+1-i)z^{-i}
$$

Dans cette dernière forme, rappelons-le, les $a_i(t)$ et $b_i(t)$ ne sont pas ceux du modèle ARMA, contrairement à ce qui se produit pour la forme observable.

4.4. Interprétation matricielle.

Une interprétation de ces diverses possibilités peut s'obtenir lors d'une écriture sous une forme matricielle des équations reliant la réponse impulsionnelle et les coefficients $a_i(t)$ et $b_i(t)$ du modèle, soit (1-98) et (1-100) pour le modèle ARMA ou observable et (1-107), (1-108) pour le modèle commandable. Celles-ci s'écriront comme un système reliant les matrices A, H, B (de Toeplitz dans le cas stationnaire). Comme ces matrices sont de dimension infinie, on ne peut en donner une écriture qu'en se limitant à un instant t et aux instants précédents, c'est-à-dire à la ligne t et à la colonne t. Avec cette convention d'écriture, les équations du cas ARMA ou observable deviennent AH=B:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
h(t-3,t-3) & 0 & 0 & 0 \\
h(t-2,t-3) & h(t-2,t-2) & 0 & 0 \\
h(t-1,t-3) & h(t-1,t-2) & h(t-1,t-1) & 0 \\
h(t,t-3) & h(t,t-2) & h(t,t-1) & h(t,t)
\end{array} = H$$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
a_1(t-3) & 1 & 0 & 0 \\
a_2(t-3) & a_1(t-2) & 1 & 0 \\
a_3(t-3) & a_2(t-2) & a_1(t-1) & 1
\end{array} = A$$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
0 & 0 & 0 & 0 \\
b_0(t-3) & 0 & 0 & 0 \\
b_1(t-3) & b_0(t-2) & 0 & 0 \\
b_2(t-3) & b_1(t-2) & b_0(t-1) & 0 \\
b_3(t-3) & b_2(t-2) & b_1(t-1) & b_0(t)
\end{array} = B$$

Le relief au sens de Tjøstheim-Mélard est obtenu par transformée de Fourier de la suite des éléments figurant dans la ligne t de H. De façon analogue, le relief rationnel du cas synchrone s'obtient à partir des lignes t, toutes deux de longueur finie, des matrices A et B. Si il s'agit du modèle d'état observable, la suite des coefficients à transformer est située dans la colonne t de la matrice B, commençant à $b_i(t)$, et dans la colonne t-1 ou t de A, suivant que l'on retient de figer l'équation d'état $x_t=A_{t-1}x_{t-1}+B_te_t$ ou sa version avec l'opérateur de décalage $x_t=z^{-1}(A_tx_t)+B_te_t$.

Dans le modèle d'état d'état commandable, la matrice H reste inchangée, mais le produit devient H.A=B avec:

$$
\left.\begin{array}{c|c|c|c}
0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
a_1(t-3) & 1 & 0 & 0 \\
a_2(t-3) & a_1(t-2) & 1 & 0 \\
a_3(t-3) & a_2(t-2) & a_1(t-1) & 1
\end{array}\right| = A
$$

$$
\left.\begin{array}{c|c|c|c}
0 & 0 & 0 & 0 \\
b_0(t-3) & 0 & 0 & 0 \\
b_1(t-2) & b_0(t-2) & 0 & 0 \\
b_2(t-1) & b_1(t-1) & b_0(t-1) & 0 \\
b_3(t) & b_2(t) & b_1(t) & b_0(t)
\end{array}\right| = B
$$

Le relief, tel que défini en (1-115) utilise un mélange entre colonne t pour A et ligne t pour B. Ce mélange semble un second argument, après la non-équivalence entre ARMA et commandable pour rejeter cette dernière forme.

4.5. Propriétés du relief rationnel.

Voyons maintenant les propriétés de cette définition, vis à vis des quatre mots-clés retenus au premièr chapitre: distribution, nature, localité, invariance. Pour que le caractère de distribution soit assuré, il faut que les distributions marginales soient la variance et le spectre du signal. Pour ce qui est de l'axe fréquence, ceci est bien réalisé par toutes les variantes du relief rationnel, puisque le relief s'identifie au spectre quand le signal est stationnaire (A5/B5). Par contre, ceci n'est pas effectif pour l'axe temps. Un contre-exemple suffit à le montrer: soit y_t un signal autorégressif non-stationnaire d'ordre 1: $y_t+a_1(t-1)y_{t-1}=\epsilon_t$ avec $a_1(t)=-\alpha$ si $t<0$ et $a_1(t)=-\frac{1}{\alpha}$ pour $0\leq t\leq T$, $|\alpha|<1$, α réel. Alors la variance de y_t s'écrit:

$$(1-117)\quad e(y_t^2)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha^2} & \text{si } t<0\\[2ex] \dfrac{\alpha^2-2\alpha^{-2t-2}}{\alpha^2-1} & \text{si } 0\leq t\leq T\\[2ex] \dfrac{1-\alpha^{2(t-T)}(1+\alpha^2-2\alpha^{2T-2})}{1-\alpha^2} & \text{si } t>T\end{cases}$$

La variance est constante jusqu'à l'instant 0 où l'instabilité du modèle stationnaire tangent implique une croissance exponentielle de cette variance, puis à partir de l'instant T, la stabilisation du modèle tangent entraine une décroissance de la variance. Cette évolution de la variance n'apparait absolument pas sur le relief défini par le modèle ARMA ou par l'état (pour un ordre 1, il n'y a d'ailleurs pas de distinction entre forme observable et forme commandable).

La nature de ce relief est assez satisfaisante: le relief est réel (A1/B1) et positif (B8/C3). Cependant son lien avec la covariance du signal est faible: il se calcule à partir de la décomposition de Wold du signal, comme le relief de Tjøstheim-Mélard, mais du fait du passage à la forme d'état ou ARMA, la transformation passant de la covariance au relief n'est plus linéaire.

La localité du relief est très bien vérifiée puisque cette définition a été élaborée afin de rendre compte de la condition des tranches (A6/B6). Le relief d'un signal qui est succession de tranches de signaux stationnaires sera exactement la succession des spectres correspondants, si toutes les tranches sont obtenus à partir de signaux ayant la même innovation $\varepsilon_t, t\in(-\infty,+\infty)$, etle relief sera la succession des spectres, excepté sur une zone transitoire de durée égale à l'ordre n=max(p,q+1) de chaque tranche supposée à spectre rationnel, dans le cas où les tranches sont indépendantes les unes des autres.

Le dernier aspect est l'invariance du relief dans les opérations de filtrage et de translation. L'invariance dans une translation en temps (B11) est bien entendu satisfaite par chacune des définitions rationnelles. Par contre l'invariance par filtrage n'est vérifiée, comme pour le relief de Tjøstheim-Mélard, que par approximation: si les paramètres $a_i(t)$ et $b_i(t)$ évoluent lentement, le relief du signal après filtrage par un filtre stationnaire est voisin du relief obtenu en multipliant le relief initial par le carré du module de la fonction de transfert du filtre. L'invariance par translation fréquencielle s'étudiera à partir de la réponse impulsionnelle h(t,s) de la décomposition de Wold du signal y_t. En utilisant l'argument de MELARD, 1978-a, selon lequel l'innovation de $y_{0,t}=y_t e^{j\omega_0 t}$ est $\eta_t=\epsilon_t e^{j\omega_0}$, la réponse $\gamma(t,s)$ associée à $y_{0,t}$ devient $\gamma(t,s)=h(t,s)e^{j\omega_0 t}$. On déduit alors l'invariance par translation en fréquence du spectre défini par (1-110) à partir du modèle ARMA, du fait que les coefficients $a_{0,m}(t)$, $b_{0,m}(t)$ du modèle engendrant $y_{0,t}$ s'expriment par (1-118), comme le montre l'application des relations (1-98) et (1-100):

$$(1\text{-}118)\quad \begin{cases} a_{0,m}(t)=a_m(t)e^{j\omega_0 m} \\ b_{0,m}(t)=b_m(t)e^{j\omega_0 m} \end{cases}$$

La même relation s'applique aussi aux coefficients du modèle d'état commandable. Il est facile de voir alors que chacune des définitions préserve cette invariance par translation en fréquence déjà présente dans le relief de Tjøstheim-Mélard. Par contre, la propriété d'invariance par retournement du temps qui n'était d'ailleurs pas non plus vérifiée par le relief de Tjøstheim-Mélard, ne l'est pas par le relief rationnel . Il serait possible de montrer, mais ceci a peu d'intérêt, que cette invariance par retournement du temps est vérifiée de manière approximative par tout signal dont les paramètres $a_i(t)$ et $b_i(t)$ n'évoluent que lentement avec le temps.

5. Conclusion.

En conclusion à ce chapitre consacré aux reliefs paramétriques, il est possible de dresser un bilan des définitions. En excluant la définition de PRIESTLEY, 1965, qui est trop insatisfaisante, subsistent la définition de TJØSTHEIM, 1976, et les trois variantes du relief rationnel. Parmi celles-ci, la variante commandable serait à rejeter, essentiellement pour des raisons pratiques liées à la difficulté, voire l'impossibilité, de déterminer sa valeur à partir de la seule connaissance d'un modèle ARMA du signal. De la variante ARMA et de la variante état, rien ne permet de les départager. J'ai retenu la version avec état, observable pour l'aspect plus instantané qu'il présente, en retenant d'abord la variante A_t, B_t (GRENIER, 1981-a) puis par la suite, la variante A_{t-1}, B_t (GRENIER, 1982-b). Il me semble que ce choix entre variante ARMA et variante observable pourrait etre éclairé par l'examen du cas où la dimension de l'état est infinie, et je pense que la variante observable l'emporterait, mais ce n'est qu'une conjecture. Quant à la comparaison entre la définition de Tjøstheim et la définition rationnelle, elle les laisse à égalité sur le plan des propriétés: la définition de Tjøstheim respecte la variance du signal, mais la définition rationnelle respecte la condition de localité par tranche. Toutes les autres propriétés sont vérifiées ou infirmées simultanément par les deux définitions. Ce qui m'a fait rejeter celle de Tjøstheim est qu'elle n'est pas estimable sur une réalisation de durée finie du signal, alors que le relief rationnel peut très bien être estimé, comme le montrera la partie II (voir aussi LAKEHAL, 1980, FARGETTON, GENDRIN, LACOUME, 1980).