

Acquisition de l'image numérique

Yann GOUSSEAU

Télécom Paris
Institut Polytechnique de Paris

Cours MVA 1
2024-2025

Acquisition des images

le cas de la photographie numérique

- 1 Généralités
- 2 Le système optique
- 3 Transformée de Fourier et échantillonnage bidimensionnel
- 4 Sources et modélisation du bruit

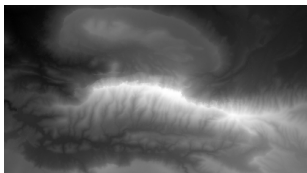
- Site <https://perso.telecom-paristech.fr/gousseau/MVA/>
(transparentes, compléments de cours, projets)
- Si vous avez des lacunes en [analyse de Fourier](#)
"Analyse de Fourier et Applications" C. Gasquet et P. Witomski, Dunod
- ... ou en [probabilités](#)
"Probability and random processes", G. Grimmett et D. Stirzaker, Oxford University Press
- ... ou en [traitement du signal](#)
Cours de Télécom Paris, Saïd Ladjal (disponible depuis la page du cours)





Des dispositifs couverts par ce cours

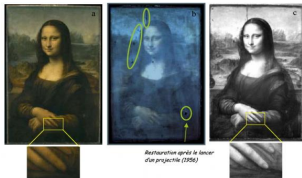




Modèle numérique de terrain



image radar



Joconde : visible, UV, IR



radiographie (rayons X)

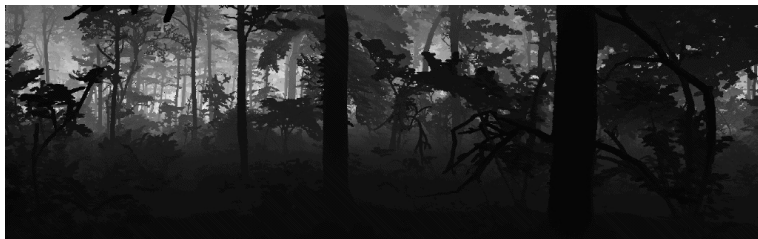
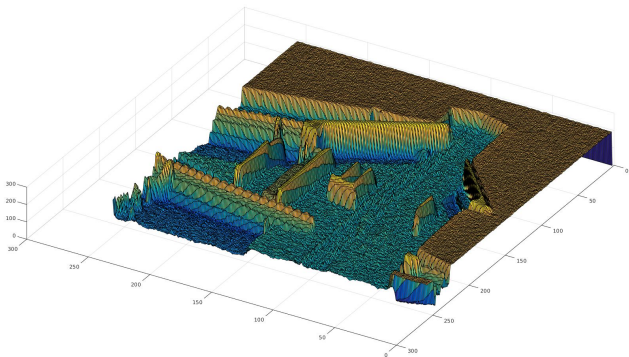
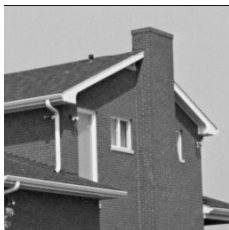
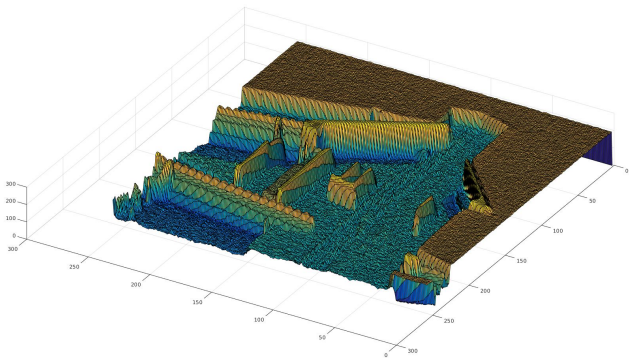
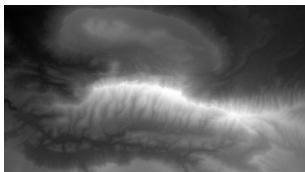
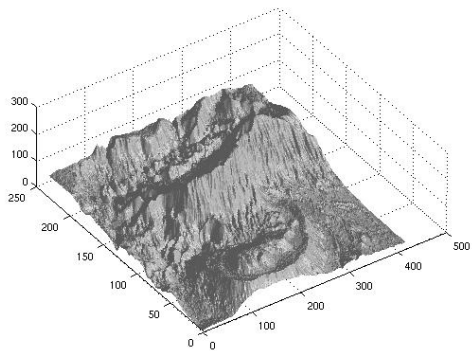


Image de profondeur (laser)



Une image vue comme une surface







Le modèle sténopé (pin-hole)

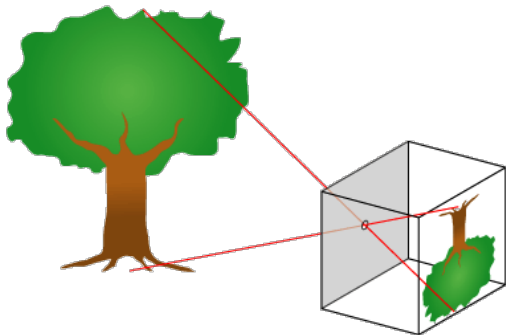


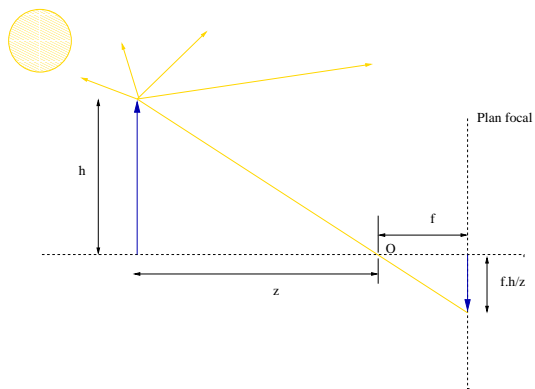
Illustration from wikipedia.org

(Aristote, Alhazen 10^{eme} s., Brunelleschi début 15^{eme} s., Da Vinci 1500, Kepler 1604 *camera obscura*)



Courtesy Manon Heffernan

Le modèle sténopé (pin-hole)



Une partie de la lumière issue de l'objet passe par l'ouverture O et se projette sur le plan focal. La distance f est appelée distance focale.

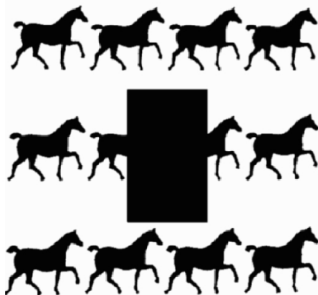
Première conséquence : pas de perception absolue de la taille des objets.



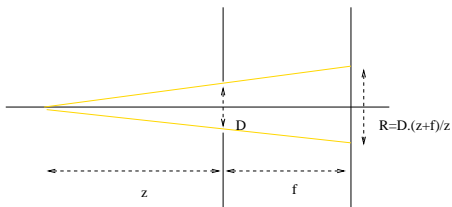
Constance de taille. Illusion de Ponzo.



Deuxième conséquence :
le phénomène d'**occultation** → **discontinuités** (bords)



La perception humaine a la capacité de reconstruire les parties cachées
complétion amodale (cours à venir sur l'inpainting)



Ouverture O finie : rayons \rightarrow cônes \rightarrow flou

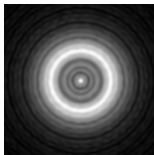
Pour une ouverture de diamètre D et S la scène (à distance z), on observe (en première approximation)

$$g_z * S,$$

où g_z est la fonction indicatrice d'un disque de rayon $(z+f)D/z$.

Si $z \gg f$ chaque point donne à peu près la même tache de flou

Modélisation plus fine : prise en compte de la diffraction





Gauche : image originale ; droite : convoluée avec un noyau passe-bas



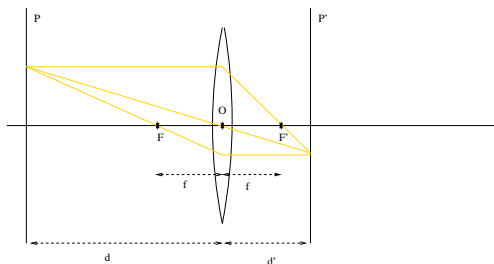
Sheila Bocchine - creative commons



Un sténopé artisanal

- Pour obtenir une image plus nette tout en ayant une ouverture non nulle (besoin de lumière) : ajout d'une lentille.
- On observe toujours $g * S$, où g est la réponse impulsionnelle du système optique (en négligeant diverses aberrations et interférences).

Le modèle "lentille mince"



Rayons issus de P se concentrent sur P' . On note f la *distance focale*
→ Relation de Descartes

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}.$$

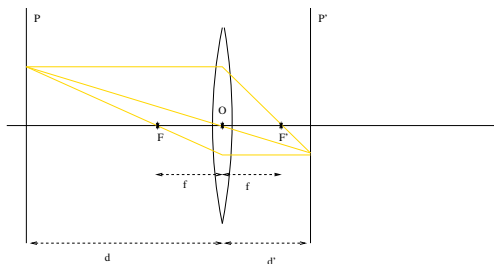
Effectuer la mise au point : ajuster la position du plan P .

Si l'objet photographié n'est pas dans le plan P : flou de mise au point → convolution.

Hypothèses :

- Rayons lumineux proches de la normale à la surface de la lentille
- On néglige le trajet de la lumière à l'intérieur de la lentille.

Le modèle "lentille mince"



Rayons issus de P se concentrent sur P' . On note f la *distance focale*
→ Relation de Descartes

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}.$$

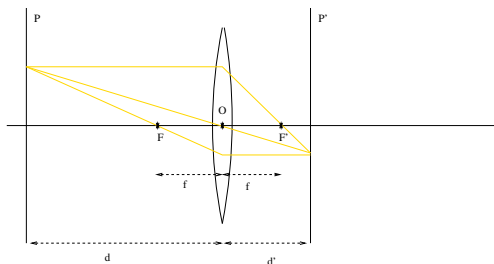
Effectuer la mise au point : ajuster la position du plan P .

Si l'objet photographié n'est pas dans le plan P : flou de mise au point → convolution.

Hypothèses :

- Rayons lumineux proches de la normale à la surface de la lentille
- On néglige le trajet de la lumière à l'intérieur de la lentille.

Le modèle "lentille mince"



Rayons issus de P se concentrent sur P' . On note f la *distance focale*
→ Relation de Descartes

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}.$$

Effectuer la mise au point : ajuster la position du plan P .

Si l'objet photographié n'est pas dans le plan P : flou de mise au point → convolution.

Hypothèses :

- Rayons lumineux proches de la normale à la surface de la lentille
- On néglige le trajet de la lumière à l'intérieur de la lentille.

On observe une scène

$$\tilde{s} = g_o * s,$$

où

$$g_o = g_{ouv} * g_{flou} * g_{fil}.$$

- g_{ouv} ouverture finie
- g_{flou} défaut de mise au point
- g_{fil} flou de bougé (ou de filé)

g_o s'appelle la *réponse impulsionnelle* (PSF en anglais pour Point Spread Function) du système optique.

Un phénomène non pris en compte : le flou est variable selon la distance des objets à l'appareil photo



Distance séparant l'objet net le plus proche de l'appareil de l'objet net le plus lointain.

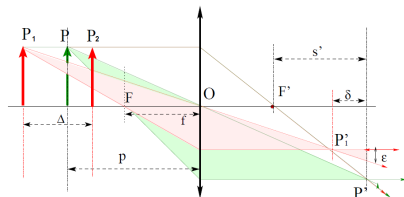


Figure par H. Maître

En utilisant la relation de Descartes et en notant D l'ouverture du diaphragme, on trouve

$$\Delta = \frac{2\epsilon D p f (p - f)}{D^2 f^2 - \epsilon^2 (p - f)^2}$$

En supposant que $\delta \ll s$ et $f \ll p$ on a

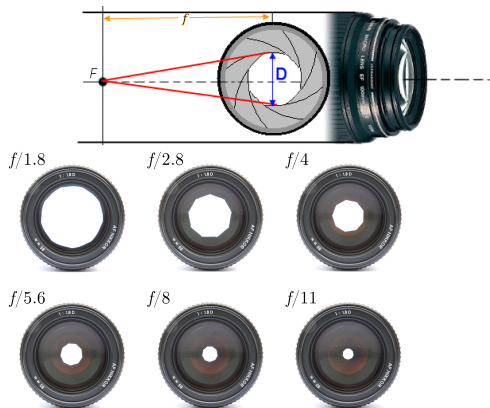
$$\Delta \approx \frac{2\epsilon p^2}{Df}$$

$$\Delta \approx \frac{2\epsilon p^2}{Df}$$

La profondeur de champs dépend donc de

- la taille de l'ouverture
- la focale f (le facteur de zoom)
- la distance de l'objet

D diamètre du diaphragme ; f distance focale ;
le **nombre d'ouverture** est défini par $N = f/D$ (généralement progression géométrique)



images wikipedia.org

Quand N augmente (à f constant) :

- La profondeur de champs augmente (formule précédente)
- Les défauts de diffraction augmentent

Nombre d'ouverture $N = 1,4$



Nombre d'ouverture $N = 13$





f/2.8 - by bahramr - creative commons

Diverses focales en format 24 × 36 depuis un même point de vue : influence sur la taille de l'image



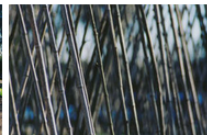
28 mm :
courte focale,
image de petite taille.



50 mm :
focale normale.



70 mm



210 mm :
longue focale,
image de grande taille.

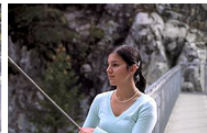
Changement de focale et de point de vue : influence sur la perspective



24 mm :
point de vue rapproché,
perspective exagérée.



50 mm :
perspective « normale ».



100 mm



200 mm :
point de vue éloigné,
perspective écrasée.

(source : Wikipedia)

Parmi les phénomènes qui ne rentrent pas dans le cadre d'un système linéaire invariant par translation :

- Distorsion géométriques

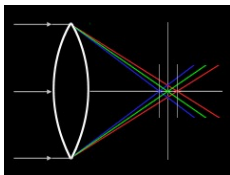


En coussinet (zoom)

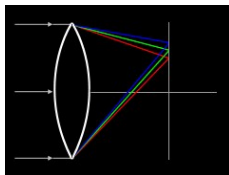


En barillet (grand angle)

- Aberrations chromatiques



Longitudinale

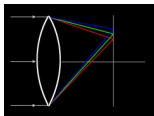


Transversale

- Vignetage



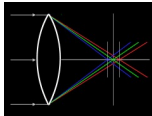
Aberration transversale



Le facteur de zoom dépend de la longueur d'onde



Aberration longitudinale



La position du plan focal dépend de la longueur d'onde



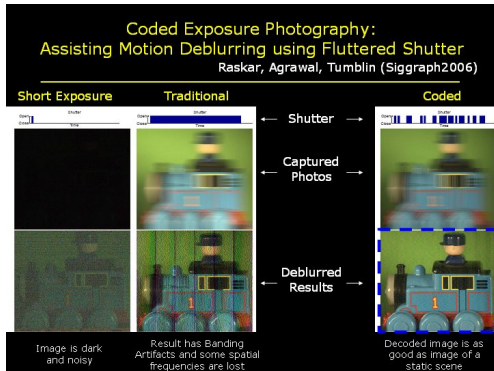
Avant et après correction du vignettage
dxo.com

Autre paramètre d'acquisition : le temps d'exposition

- Peut compenser un manque de lumière ou une ouverture faible
- Doit être court pour les objets en mouvement
- Sinon, flou de mouvement



Alternative à l'obturation unique : l'ouverture papillonante (flutter shutter) →
démo ipol



- Après passage dans le système optique → acquisition de l'information lumineuse du plan focal
- Utilisation d'un capteur numérique : grille de capteurs photosensibles qui convertissent les photons en courant électrique
- *Echantillonnage* du signal lumineux

$$\left(f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \right) \rightarrow (\{f(k)\}_{k \in \Omega}).$$

- Intégration des photons par le capteur (comptage des photons) → convolution avec g_{capt} , fonction indicatrice du capteur
Modification de la PSF

- Après passage dans le système optique \rightarrow acquisition de l'information lumineuse du plan focal
- Utilisation d'un capteur numérique : grille de capteurs photosensibles qui convertissent les photons en courant électrique
- *Echantillonnage* du signal lumineux

$$\left(f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \right) \rightarrow \left(\{f(k)\}_{k \in \Omega} \right).$$

- Intégration des photons par le capteur (comptage des photons) \rightarrow convolution avec g_{capt} , fonction indicatrice du capteur
Modification de la PSF

- Après passage dans le système optique \rightarrow acquisition de l'information lumineuse du plan focal
- Utilisation d'un capteur numérique : grille de capteurs photosensibles qui convertissent les photons en courant électrique
- *Echantillonnage* du signal lumineux

$$(f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}) \rightarrow (\{f(k)\}_{k \in \Omega}).$$

- Intégration des photons par le capteur (comptage des photons) \rightarrow convolution avec g_{capt} , fonction indicatrice du capteur
Modification de la PSF

- Après passage dans le système optique \rightarrow acquisition de l'information lumineuse du plan focal
- Utilisation d'un capteur numérique : grille de capteurs photosensibles qui convertissent les photons en courant électrique
- *Echantillonnage* du signal lumineux

$$\left(f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \right) \rightarrow (\{f(k)\}_{k \in \Omega}).$$

- Intégration des photons par le capteur (comptage des photons) \rightarrow convolution avec g_{capt} , fonction indicatrice du capteur
Modification de la PSF

Intégration par le capteur

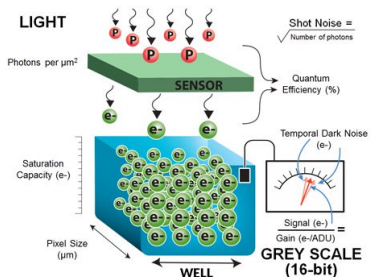
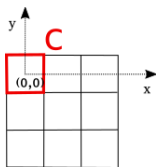


image credit : www.flir.com

En chaque cellule photoréceptrice : addition des contributions des photons
 \neq valeurs ponctuelles

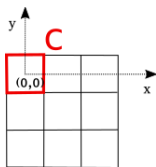


$I_{i,j}$: image capturée par le capteur à la position (i,j)

$$\begin{aligned} I_{i,j} &= \int_{C+(i,j)} I(x,y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} I(x,y) \mathbb{1}_C(x-i, y-j) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} I(x,y) \mathbb{1}_C(i-x, j-y) dx dy \\ &= (I * \mathbb{1}_C)(i,j) \end{aligned}$$

→ échantillonnage de $I * \mathbb{1}_C$

la PSF g_0 est modifiée en $g_0 * \mathbb{1}_C$



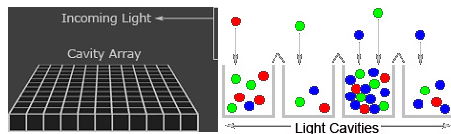
$I_{i,j}$: image capturée par le capteur à la position (i,j)

$$\begin{aligned} I_{i,j} &= \int_{C+(i,j)} I(x,y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} I(x,y) \mathbb{1}_C(x-i, y-j) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} I(x,y) \mathbb{1}_C(i-x, j-y) dx dy \\ &= (I * \mathbb{1}_C)(i,j) \end{aligned}$$

→ échantillonnage de $I * \mathbb{1}_C$

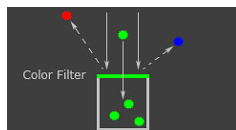
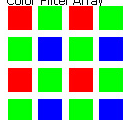
la PSF g_0 est modifiée en $g_0 * \mathbb{1}_C$

Images couleur : trame de Bayer



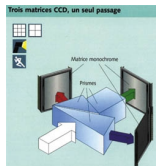
courtesy of cambridgeincolour.com

Color Filter Array

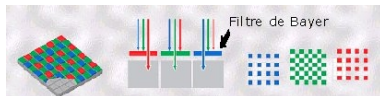


Ordre de grandeur de la taille des capteurs :
1 (smartphone) à 10 (reflex plein format) microns.

- Tri-CCD



- Capteur Fovéon



→ cours sur la couleur de Julie Delon

- Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{x} \cdot \omega) d\mathbf{x}.$$

- Définition alternative (traitement du signal) avec $\exp(-2i\pi\mathbf{x} \cdot \omega)$.
- \hat{f} est continue et $\rightarrow 0$ à l'infini.
- On supposera désormais que f est régulière et décroît rapidement à l'infini :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^2, |\mathbf{x}|^p \partial_q f \leq C.$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{x} \cdot \omega) d\mathbf{x}.$$

- Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{x} \cdot \omega) d\mathbf{x}.$$

- Définition alternative (traitement du signal) avec $\exp(-2i\pi\mathbf{x} \cdot \omega)$.
- \hat{f} est continue et $\rightarrow 0$ à l'infini.
- On supposera désormais que f est régulière et décroît rapidement à l'infini :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^2, |\mathbf{x}|^p \partial_q f \leq C.$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{x} \cdot \omega) d\mathbf{x}.$$

- Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{x} \cdot \omega) d\mathbf{x}.$$

- Définition alternative (traitement du signal) avec $\exp(-2i\pi\mathbf{x} \cdot \omega)$.
- \hat{f} est continue et $\rightarrow 0$ à l'infini.
- On supposera désormais que f est régulière et décroît rapidement à l'infini :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^2, |\mathbf{x}|^p \partial_q f \leq C.$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{x} \cdot \omega) d\mathbf{x}.$$

- $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$ et $\mathcal{F}(f \cdot g) = (2\pi)^{-2} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$.
- $\mathcal{F}(f(\mathbf{x} - \mathbf{a})) = \exp(-i\omega \cdot \mathbf{a}) \mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{F}(\exp(i\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) f)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega - \mathbf{a})$

- On veut une fonction δ_0 telle que

- ① $\delta_0(x) = 0$ pour $x \neq 0$

- ② $\int \delta_0 \phi = \phi(0)$

→ impossible avec les fonctions ($f = 0$ p.p. $\rightarrow \int f = 0$)

- δ_0 est une forme linéaire continue sur l'ensemble des *fonctions tests*

$$\mathcal{S} = \{\phi \in C^\infty \text{ telles que } \forall p, q |x^p \partial_q \phi| \leq C\}$$

définie par $\delta_a(\phi) = \langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a)$

- On peut définir les opérations usuelles, la dérivation, la transformée de Fourier sur \mathcal{S}' (formes linéaires continues sur \mathcal{S}).
- En particulier, pour $T \in \mathcal{S}'$, $\langle \mathcal{F}(T), \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\phi) \rangle$.

→ Pour ceux qui n'ont pas vu les distributions (et leur transformée de Fourier) en M1 :

"Analyse de Fourier et applications", C. Gasquet et P. Witomski, Dunod.

- On veut une fonction δ_0 telle que
 - 1 $\delta_0(x) = 0$ pour $x \neq 0$
 - 2 $\int \delta_0 \phi = \phi(0)$
- impossible avec les fonctions ($f = 0$ p.p. $\rightarrow \int f = 0$)
- δ_0 est une forme linéaire continue sur l'ensemble des *fonctions tests*

$$\mathcal{S} = \{\phi \in C^\infty \text{ telles que } \forall p, q |x^p \partial_q \phi| \leq C\}$$

définie par $\delta_a(\phi) = \langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a)$

- On peut définir les opérations usuelles, la dérivation, la transformée de Fourier sur \mathcal{S}' (formes linéaires continues sur \mathcal{S}).
- En particulier, pour $T \in \mathcal{S}'$, $\langle \mathcal{F}(T), \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\phi) \rangle$.

→ Pour ceux qui n'ont pas vu les distributions (et leur transformée de Fourier) en M1 :

"Analyse de Fourier et applications", C. Gasquet et P. Witomski, Dunod.

- On veut une fonction δ_0 telle que
 - 1 $\delta_0(x) = 0$ pour $x \neq 0$
 - 2 $\int \delta_0 \phi = \phi(0)$
- impossible avec les fonctions ($f = 0$ p.p. $\rightarrow \int f = 0$)
- δ_0 est une forme linéaire continue sur l'ensemble des *fonctions tests*

$$\mathcal{S} = \{\phi \in C^\infty \text{ telles que } \forall p, q |x^p \partial_q \phi| \leq C\}$$

définie par $\delta_a(\phi) = \langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a)$

- On peut définir les opérations usuelles, la dérivation, la transformée de Fourier sur \mathcal{S}' (formes linéaires continues sur \mathcal{S}).
- En particulier, pour $T \in \mathcal{S}'$, $\langle \mathcal{F}(T), \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\phi) \rangle$.

→ Pour ceux qui n'ont pas vu les distributions (et leur transformée de Fourier) en M1 :

"Analyse de Fourier et applications", C. Gasquet et P. Witomski, Dunod.

- On veut une fonction δ_0 telle que
 - 1 $\delta_0(x) = 0$ pour $x \neq 0$
 - 2 $\int \delta_0 \phi = \phi(0)$
- impossible avec les fonctions ($f = 0$ p.p. $\rightarrow \int f = 0$)
- δ_0 est une forme linéaire continue sur l'ensemble des *fonctions tests*

$$\mathcal{S} = \{\phi \in C^\infty \text{ telles que } \forall p, q |x^p \partial_q \phi| \leq C\}$$

définie par $\delta_a(\phi) = \langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a)$

- On peut définir les opérations usuelles, la dérivation, la transformée de Fourier sur \mathcal{S}' (formes linéaires continues sur \mathcal{S}).
- En particulier, pour $T \in \mathcal{S}'$, $\langle \mathcal{F}(T), \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\phi) \rangle$.

→ Pour ceux qui n'ont pas vu les distributions (et leur transformée de Fourier) en M1 :

"Analyse de Fourier et applications", C. Gasquet et P. Witomski, Dunod.

- $\mathcal{F}(\delta_x)(\omega) = \exp(-ix\omega)$
- Sous certaines conditions, les correspondances convolution-multiplication restent vraies pour les distributions
- On montre que le *peigne de Dirac*, $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{aj}$ est dans \mathcal{S}' et que

$$\mathcal{F}\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{aj}\right)(\omega) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \exp(iaj\omega) = \frac{2\pi}{a} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{2\pi j}{a}}.$$

- $\mathcal{F}(\delta_x)(\omega) = \exp(-ix\omega)$
- Sous certaines conditions, les correspondances convolution-multiplication restent vraies pour les distributions
- On montre que le *peigne de Dirac*, $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{aj}$ est dans \mathcal{S}' et que

$$\mathcal{F}\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{aj}\right)(\omega) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \exp(iaj\omega) = \frac{2\pi}{a} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{2\pi j}{a}}.$$

- $\mathcal{F}(\delta_x)(\omega) = \exp(-ix\omega)$
- Sous certaines conditions, les correspondances convolution-multiplication restent vraies pour les distributions
- On montre que le *peigne de Dirac*, $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{aj}$ est dans \mathcal{S}' et que

$$\mathcal{F}\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{aj}\right)(\omega) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \exp(iaj\omega) = \frac{2\pi}{a} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{2\pi j}{a}}.$$

Retour à l'acquisition des images :

$$u = (g_0 * s) \cdot \Pi_\Gamma$$

où

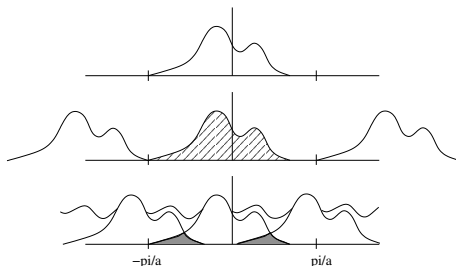
- s scène (fonction de L^1),
- g_0 : réponse impulsionnelle du système optique et de l'intégration des capteurs ($g_{ouv} * g_{flou} * g_{fil} * g_{capt}$),
- $\Pi_\Gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_\gamma$, impulsions sur les positions d'acquisition Γ

Le repliement de spectre en dimension 1

On considère $\Gamma = a\mathbb{Z}$, donc $\Pi_\Gamma = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{aj}$,
on a alors $u = f \cdot \Pi_\Gamma$ et

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{a} \mathcal{F}(f) * \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{2\pi j}{a}},$$

$$\mathcal{F}(u)(\omega) = \frac{1}{a} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(f) \left(\omega - \frac{2\pi j}{a} \right).$$



Conséquence :

- si $\text{Supp}(\mathcal{F}(f)) \subset [-\pi/a, \pi/a]$, on a

$$\mathcal{F}(f \cdot \Pi_\Gamma) \cdot \mathbb{1}_{[-\pi/a, \pi/a]} = \mathcal{F}(f),$$

donc on retrouve f car

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f \cdot \Pi_\Gamma) \cdot \mathbb{1}_{[-\pi/a, \pi/a]}) = f \cdot \Pi_\Gamma * \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{[-\pi/a, \pi/a]})$$

or $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{[-\pi/a, \pi/a]}) = \frac{\sin(\pi x/a)}{\pi x/a}$, donc

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(ja) \frac{\sin((x - ja)\pi/a)}{(x - ja)\pi/a}.$$

- sinon, le spectre de $f \cdot \Pi_\Gamma$ est détérioré de manière irréversible.

Conséquence :

- si $\text{Supp}(\mathcal{F}(f)) \subset [-\pi/a, \pi/a]$, on a

$$\mathcal{F}(f \cdot \Pi_\Gamma) \cdot \mathbb{1}_{[-\pi/a, \pi/a]} = \mathcal{F}(f),$$

donc on retrouve f car

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f \cdot \Pi_\Gamma) \cdot \mathbb{1}_{[-\pi/a, \pi/a]}) = f \cdot \Pi_\Gamma * \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{[-\pi/a, \pi/a]})$$

or $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{[-\pi/a, \pi/a]}) = \frac{\sin(\pi x/a)}{\pi x/a}$, donc

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(ja) \frac{\sin((x - ja)\pi/a)}{(x - ja)\pi/a}.$$

- sinon, le spectre de $f \cdot \Pi_\Gamma$ est détérioré de manière irréversible.

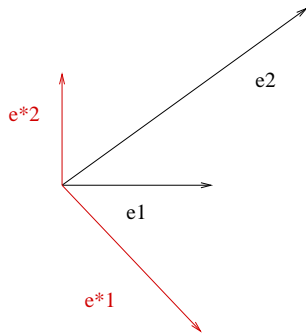
Soit une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}(f)(\omega) = 0$ pour $\omega \notin [-\pi/a, \pi/a]$, alors

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(ja) \frac{\sin((x - ja)\pi/a)}{(x - ja)\pi/a}.$$

- Egalité dans $L^2(\mathbb{R}^2)$
- $\mathcal{F}(f)$ à support borné $\rightarrow f \in C^\infty$: la formule a un sens (valeurs ponctuelles définies)
- Egalité en tout point si $f \in L^1(\mathbb{R})$ (convergence uniforme).

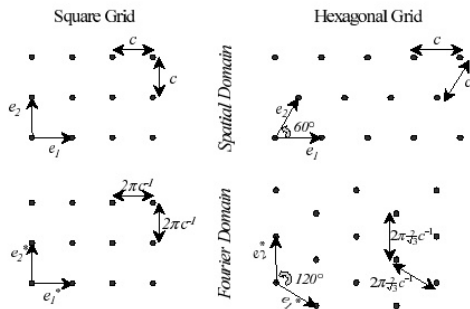
La dimension 2 : le réseau dual

Soit $\Gamma = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbb{Z} \cdot \mathbf{e}_2$, avec $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ non colinéaires.
Le réseau dual est $\Gamma^* = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{e}_1^* + \mathbb{Z} \cdot \mathbf{e}_2^*$,
où $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j^* = 2\pi \delta_{i,j}$.



Exemples de réseaux

- Réseau carré \leftrightarrow réseau carré
- Réseau hexagonal \leftrightarrow réseau hexagonal



Le repliement de spectre en dimension 2

On a $\Gamma = \mathbf{e}_1\mathbb{Z} + \mathbf{e}_2\mathbb{Z}$ et $\Gamma^* = \mathbf{e}_1^*\mathbb{Z} + \mathbf{e}_2^*\mathbb{Z}$, $\Pi_\Gamma = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \delta_{j\mathbf{e}_1, k\mathbf{e}_2}$.

On montre que $\mathcal{F}(\Pi_\Gamma) = |\mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^*| \Pi_{\Gamma^*}$.

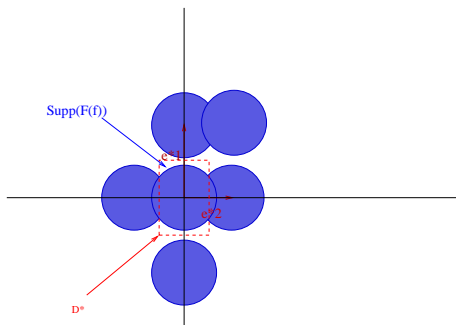
L'image échantillonnée est $u = f \cdot \Pi_\Gamma$ et

$$\mathcal{F}(u) = |\mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^*| \mathcal{F}(f) * \Pi_{\Gamma^*}$$

donc

$$\mathcal{F}(u)(\omega) = |\mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^*| \sum_{\gamma \in \Gamma^*} \mathcal{F}(f)(\omega - \gamma)$$

On a repliement de spectre si les $\gamma + \text{Supp}(\mathcal{F}(f))$ ne sont pas disjoints, pour $\gamma \in \Gamma^*$.



Le repliement de spectre en dimension 2

On a $\Gamma = \mathbf{e}_1\mathbb{Z} + \mathbf{e}_2\mathbb{Z}$ et $\Gamma^* = \mathbf{e}_1^*\mathbb{Z} + \mathbf{e}_2^*\mathbb{Z}$, $\Pi_\Gamma = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \delta_{j\mathbf{e}_1, k\mathbf{e}_2}$.

On montre que $\mathcal{F}(\Pi_\Gamma) = |\mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^*| \Pi_{\Gamma^*}$.

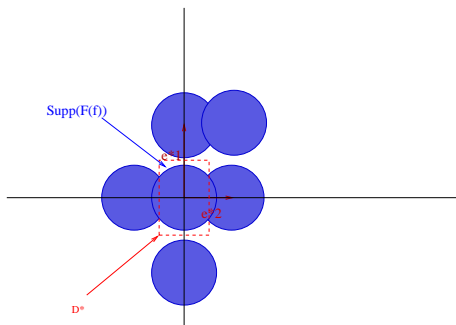
L'image échantillonnée est $u = f \cdot \Pi_\Gamma$ et

$$\mathcal{F}(u) = |\mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^*| \mathcal{F}(f) * \Pi_{\Gamma^*}$$

donc

$$\mathcal{F}(u)(\omega) = |\mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^*| \sum_{\gamma \in \Gamma^*} \mathcal{F}(f)(\omega - \gamma)$$

On a repliement de spectre si les $\gamma + \text{Supp}(\mathcal{F}(f))$ ne sont pas disjoints, pour $\gamma \in \Gamma^*$.



Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tels que

- 1 $\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma^*, \gamma + K \cap \gamma' + K = \emptyset$
- 2 $\text{Supp}(\mathcal{F}(f)) \subset K$,
alors

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) s(\mathbf{x} - \gamma),$$

où

$$s = \frac{1}{|K|} \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_K).$$

- Les hautes fréquences comprises dans la scène s (par exemple les bords) sont atténuées par g_o la PSF du système.
- Si cela n'est pas suffisant (i.e. $\text{Supp}(\mathcal{F}(f)) \notin K$) on peut procéder à un filtrage passe bas. Il suffit de considérer $h * f$ où $\text{Supp}(F(h)) \in K$.
- si on augmente la fréquence d'échantillonnage, il faut diminuer la taille des capteurs \rightarrow augmentation de la taille du support de $\mathcal{F}(h_{\text{capt}})$...

- Les hautes fréquences comprises dans la scène s (par exemple les bords) sont atténuées par g_o la PSF du système.
- Si cela n'est pas suffisant (i.e. $\text{Supp}(\mathcal{F}(f)) \notin K$) on peut procéder à un filtrage passe bas. Il suffit de considérer $h * f$ où $\text{Supp}(\mathcal{F}(h)) \in K$.
- si on augmente la fréquence d'échantillonnage, il faut diminuer la taille des capteurs \rightarrow augmentation de la taille du support de $\mathcal{F}(h_{\text{capt}})$...

- Les hautes fréquences comprises dans la scène s (par exemple les bords) sont atténuées par g_o la PSF du système.
- Si cela n'est pas suffisant (i.e. $\text{Supp}(\mathcal{F}(f)) \notin K$) on peut procéder à un filtrage passe bas. Il suffit de considérer $h * f$ où $\text{Supp}(F(h)) \in K$.
- si on augmente la fréquence d'échantillonnage, il faut diminuer la taille des capteurs \rightarrow augmentation de la taille du support de $\mathcal{F}(h_{\text{capt}})$...

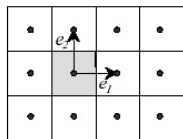
Échantillonner une image : un problème d'optimisation

Lors du choix d'un système d'acquisition d'image, on dispose de plusieurs paramètres pour l'échantillonnage : Γ^* et K .

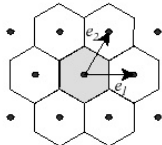
- K contient une certaine proportion de $\text{Supp}(\mathcal{F}(u))$
- On choisit en général Γ^* , puis K la cellule de Voronoi associée à Γ^* , i.e.

$$K = \{\beta \in \mathbb{R}^2 : \forall \gamma \in \Gamma^* \|\beta\| \leq \|\beta + \gamma\|\}.$$

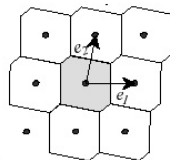
Raisnable si le spectre est isotrope et décroissant.



(a) square grid



(b) hexagonal grid



(c) intermediate grid

On définit la densité d'échantillonnage par

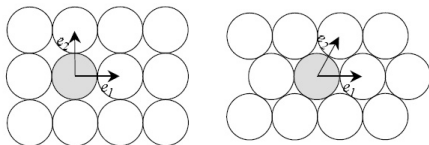
$$D(\Gamma) = (|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2|)^{-1} = 2\pi|\mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^*|.$$

Pour un système d'acquisition et une image donnée (i.e. $\mathcal{F}(u)$ est connue) on peut alors mesurer la qualité de l'échantillonnage (verifiant les conditions de Shannon) par

$$\frac{|\text{Supp}(\mathcal{F}(u))|}{2\pi D(\Gamma)}$$

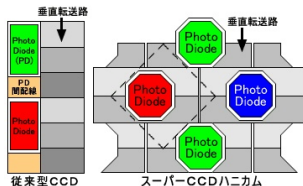
Exemple 1 : Réseau hexagonal et spectre isotrope

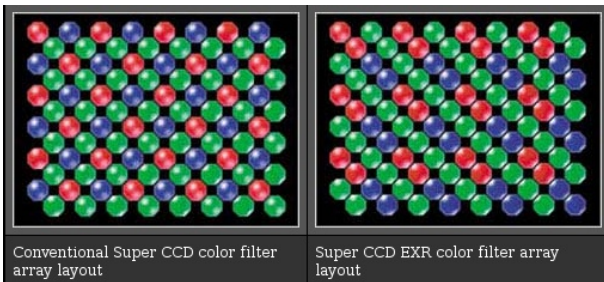
Si l'on suppose que $\text{Supp}(\mathcal{F}(f))$ est un disque, on montre alors que le réseau hexagonal est le plus efficace (environ 15% de plus que le réseau carré)



Exemple 2 : le *super CCD* (Fujifilm)

Agencement en quinconce → possibilité de capteurs de plus grandes dimensions pour une même résolution horizontale et verticale.





Compléments :

- *Echantillonnage, interpolation et détection*, thèse de doctorat de Andrés Almansa, ENS Cachan, 2002
- *Sampling and reconstruction of wave-number limited functions in N-dimensional Euclidean space*, D. Petersen et D. Middleton, Information and control, 5, pp.279-323, 1962

On ne dispose que d'images discrètes : $\{u_{k,l}\}_{k=1,\dots,M;l=1,\dots,N}$.

On considère la Transformée de Fourier Discrète (TFD) de $u_{k,l}$:

$$\hat{u}_{m,n} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} u_{k,l} \omega_N^{-mk} \omega_N^{-nl},$$

où $\omega_N = \exp\left(\frac{2i\pi}{N}\right)$. Si l'on suppose que u est une fonction a -periodique telle que $u_{k,l} = u\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right)$, alors

- Le polynôme trigonométrique

$$P(x, y) = \sum_{m,n=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_{m,n} \exp\left(\frac{2i\pi mx}{a}\right) \exp\left(\frac{2i\pi ny}{a}\right)$$

est une interpolation de u : $P\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right) = u\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right)$

- La transformée de Fourier (au sens des distributions) de P est

$$\sum_{m,n=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_{m,n} \delta_{\frac{m}{a}, \frac{n}{a}}$$

On ne dispose que d'images discrètes : $\{u_{k,l}\}_{k=1,\dots,M;l=1,\dots,N}$.

On considère la Transformée de Fourier Discrète (TFD) de $u_{k,l}$:

$$\hat{u}_{m,n} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} u_{k,l} \omega_N^{-mk} \omega_N^{-nl},$$

où $\omega_N = \exp\left(\frac{2i\pi}{N}\right)$. Si l'on suppose que u est une fonction a -periodique telle que $u_{k,l} = u\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right)$, alors

- Le polynôme trigonométrique

$$P(x, y) = \sum_{m,n=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_{m,n} \exp\left(\frac{2i\pi mx}{a}\right) \exp\left(\frac{2i\pi ny}{a}\right)$$

est une interpolation de u : $P\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right) = u\left(\frac{ka}{N}, \frac{la}{N}\right)$

- La transformée de Fourier (au sens des distributions) de P est

$$\sum_{m,n=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_{m,n} \delta_{\frac{m}{a}, \frac{n}{a}}$$

Une image et sa TFD



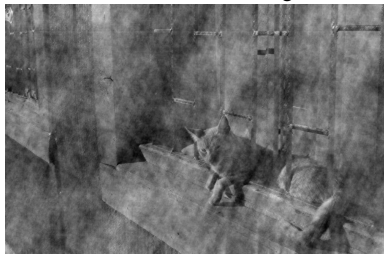
Une image et le logarithme du module de sa transformée de Fourier



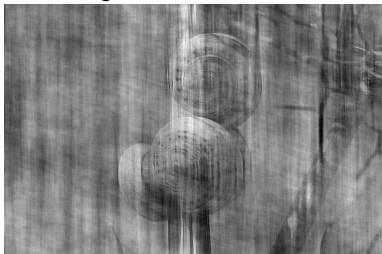
Image *A*



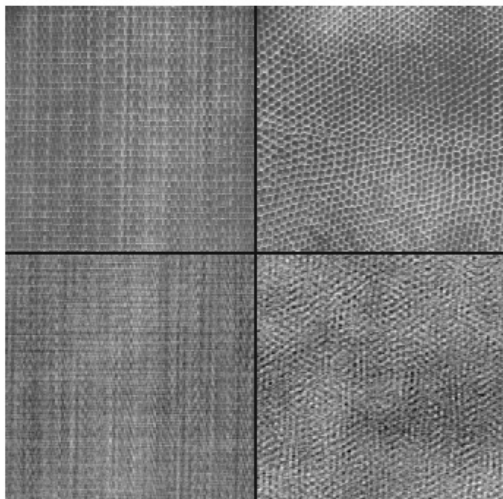
Image *B*



Phase de *A* et module de *B*

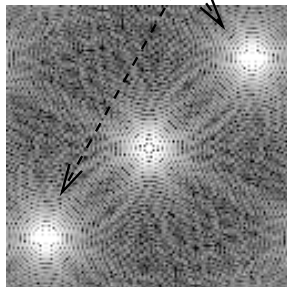
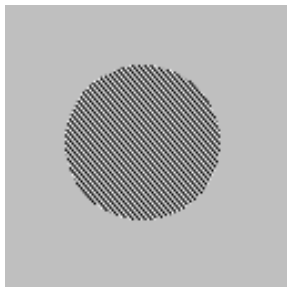
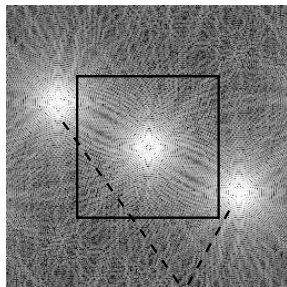
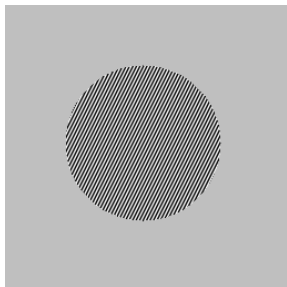


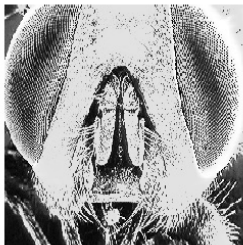
Phase de *B* et module de *A*



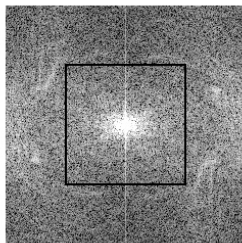
Les images du bas sont obtenues en remplaçant les phases de la transformée de Fourier par des phases aléatoires
Plus de détails dans le cours sur la texture

Un exemple synthétique de repliement





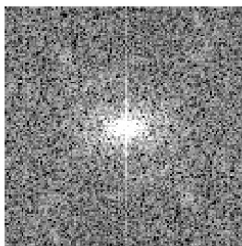
(a) Image originale



(b) Sa TFD, non nulle en dehors du carré visible en surimpression



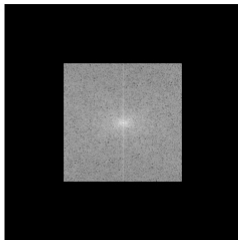
(c) Image sous-échantillonnée d'un facteur 2



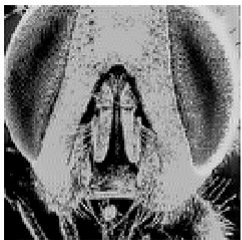
(d) La TFD correspondante, sur laquelle il y a repliement



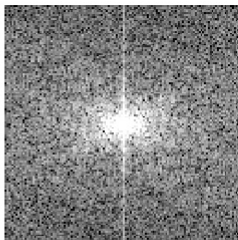
(a) Image obtenue par TFD inverse de b



(b) Image obtenue en mettant à zéro les hautes fréquences de 11.1.3-a



(c) Sous-échantillonnage : le repliement a disparu



(d) TFD de c



Image issue d'un appareil numérique aux filtres passe-bas (sur les capteurs) déficients



Image issue d'un appareil numérique aux filtres passe-bas (sur les capteurs) déficients



Image issue d'un appareil numérique aux filtres passe-bas (sur les capteurs) déficients

Autre exemple de repliement



A gauche, image originale ; à droite sous-échantillonnage d'un facteur 2

Apparition du ringing

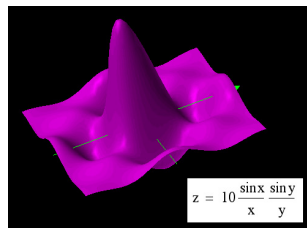
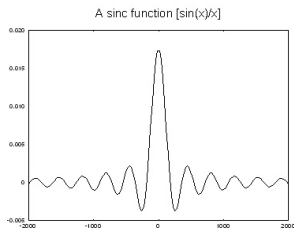


A gauche, image originale ; à droite : sous-échantillonnage d'un facteur 2 après multiplication par l'indicatrice d'un carré en Fourier

Pour être dans les conditions de Shannon, on peut multiplier le spectre de l'image par $\mathbb{1}_K$. L'image résultante est alors

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)\mathbb{1}_K) = f * \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_K).$$

Si K est la fonction indicatrice d'un carré de côté a , $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_K)$ est le produit de deux fonctions sinc :





Retour à l'acquisition des images :

$$u = (g_0 * s) \cdot \Pi_\Gamma$$

où

- s scène (fonction de L^1),
- h : réponse impulsionnelle du système optique et de l'intégration des capteurs ($g_0 = g_{ouv} * g_{flou} * g_{fil} * g_{capt}$),
- $\Pi_\Gamma = \sum \gamma \in \Gamma \delta_\gamma$,

$$u = h [Q ((g_o * s). \Pi_\Gamma + b)]$$

où





- s scène (fonction de L^1),
- g_o : réponse impulsionnelle du système optique et de l'intégration des capteurs ($g_{ouv} * g_{flou} * g_{fil} * g_{capt}$),
- $\Pi_\Gamma = \sum \gamma \in \Gamma \delta_\gamma$,
- b bruit additif : pour $(i, j) \in \Gamma$, $\{b(i, j)\}$ est une famille de variables aléatoires i.i.d.
- h est une fonction croissante : un "changement de contraste"
- Q est un opérateur de *quantification*

Pour l'étude détaillée des rôles du changement de contraste et de la quantification :
→ prochain cours de Julie Delon.

On note v l'image discrète après optique + échantillonnage ; u l'image bruitée

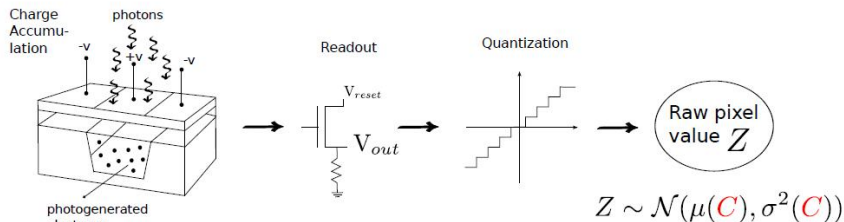
- Bruit additif : $u(i, j) = v(i, j) + b(i, j)$
où les $b(i, j)$ sont i.i.d.
- Bruit impulsionnel : $u(i, j) = v(i, j).A(i, j) + (1 - A(i, j)).B(i, j)$,
où $A(i, j)$ sont des variables de Bernoulli i.i.d. et $B(i, j)$ des variables i.i.d.
("sel et poivre" si B à valeurs dans $\{0, M\}$)
- Bruit multiplicatif (de *chatoiement* ou speckle en anglais) :
 $u(i, j) = v(i, j).b(i, j)$
avec les $b(i, j)$ i.i.d.

Exemples photographiques

<p>Canon EOS 5D Mark IV</p> <p>RAW 100</p>  <p>Download: JPEG (12.0MB), RAW (38.4MB)</p>	<p>Canon EOS 5D Mark IV</p> <p>RAW 6400</p>  <p>Download: JPEG (26.1MB), RAW (44.8MB)</p>
<p>Canon EOS 5D Mark IV</p> <p>RAW 51200</p>  <p>Download: JPEG (42.5MB), RAW (54.6MB)</p>	<p>Canon EOS 5D Mark IV</p> <p>JPEG 51200</p>  <p>Download: JPEG (15.5MB)</p>

Source : www.dpreview.com

Les causes du bruit



$$Z \sim \mathcal{N}(\mu(C), \sigma^2(C))$$

C irradiance
 τ exposure time
 g camera gain
 a photo-response non-uniformity factor
 μ_r, σ_R^2 readout noise mean and variance

$$\begin{aligned}\mu(C) &= ga\tau C + \mu_R \\ \sigma^2(C) &= g^2 a \tau C + \sigma_R^2\end{aligned}$$

Illustration Cecilia Aguerrebere

- **Bruit *shot noise*** Nb de photons emis par la source : loi de Poisson de moyenne $C\tau$ avec C radiance (nombre de photons par unité de temps) et τ temps d'exposition
- **Courant d'obscurité (Dark current)**
Emission résiduelle d'électrons d'origine thermique : Poisson de moyenne d_τ dépendant de τ
- **Bruit de lecture (readout noise).**
Erreurs lors de la lecture des électrons (par rapport à un voltage de référence)
- **Non uniformités spatiales**
de la réponse des photo-senseurs (PRNU)
du bruit thermique (DCNU)

$$I_{noise} = f ([g(Poiss(C\tau) + Poiss(d_\tau))] + N_{out} + Q)$$

avec

- $Poiss(\lambda)$: variable de Poisson de moyenne λ
- C radiance (photons / temps)
- g : gain
- τ : temps d'acquisition
- d_τ : valeur moyenne du bruit *dark current*
- N_{out} : bruit de lecture (gaussien de moyenne μ_R et variance σ_R^2).
- Q : bruit de quantification (uniforme)
- f : fonction de réponse de l'appareil

Remarque : on néglige les variations spatiales (DCNU et PRNU)

Le modèle complet est

$$I_{noise} = f ([g(Poiss(C\tau) + Poiss(d\tau))] + N_{out}) + Q$$

Hypothèses supplémentaires :

- On considère des images RAW, pour lesquelles $f = Id$ (réponse linéaire au nombre de photons)
- Le bruit de quantification Q est négligeable devant le bruit de lecture
- Le dark current est négligeable pour temps d'exposition courts ($< 1s$)

Alors

$$I_{noise} = gPoiss(C\tau) + N_{out}$$

$$I_{noise} = gPois(C\tau) + N_{out}$$

- On a $P(\lambda) \approx N(\lambda, \lambda)$ pour λ grand (en pratique quelques dizaines)
- En photographie standard : l'approximation gaussienne est suffisante (faux pour e.g. l'astrophotographie)

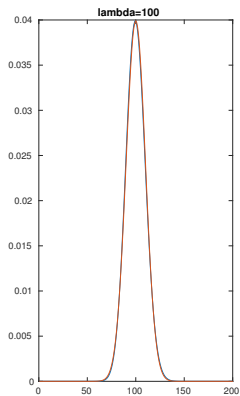
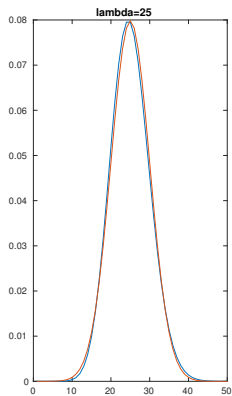
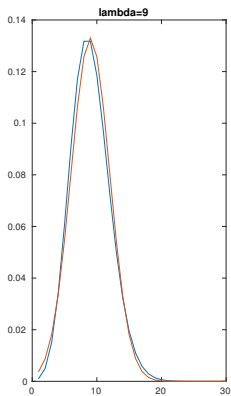
Approximation gaussienne :

$$N(gC\tau + \mu_R, g^2 C\tau + \sigma_R^2)$$

avec μ_R et σ_R les moyennes et variances du bruit de lecture

Application : création d'images HDR (cours à venir)

Approximation gaussienne



Bleu : Poisson ; rouge : normale

Conclusion : la variance du bruit **dépend du signal**.

Pour prendre en compte ce phénomène, deux approches possibles :

- utilisation directe du modèle de bruit (e.g. pour dériver des estimateurs statistiques) : cf cours HDR à venir
- modification du signal pour se ramener à un bruit gaussien i.i.d.
opération de *stabilisation de la variance* (e.g. transformée de Anscomb)

Compléments :

- *Study of the digital camera acquisition process and statistical modeling of the sensor raw data*, C. Aguerrebere et al., preprint HAL, 2013
- *Optimal inversion of the generalized Anscomb transformation for Poisson-Gaussian noise*, A. Mäkitalo et A. Foi, IEEE Image Processing, 22, 1, pp.91-103, 2013

La chaîne de développement image :

- aujourd'hui

$$s \xrightarrow{\text{optique+integration capteur}} g_0 * s \xrightarrow{\text{echantillonnage,bruit}} (g_0 * s) \cdot \Pi_{\text{gamma}} + b$$

- cours 2 radiométrie :
quantification → image RAW

$$Q[(g_0 * s) \cdot \Pi_{\text{gamma}} + b]$$

- cours 4 restauration : débruitage
- cours 3 couleur :
démosaïquage RAW → u
avec u une image à trois canaux
- cours 2 et 3 : transformations couleur

$$u \xrightarrow{\text{balance des blancs}} T_w u \xrightarrow{\text{changement d'espace couleur}} T_s T_w u \xrightarrow{\text{tone mapping}} h(T_s T_w u),$$

avec T_w une matrice diagonale,
et h une fonction non-linéaire (cours 2)