

Méthodes de Réduction de Variance : Variables de Contrôle

Gersende FORT

LTCl, CNRS / TELECOM ParisTech

I. Introduction

Le principe de la méthode des **variables de contrôle** est **d'exploiter l'erreur d'estimation de quantités connues, pour améliorer l'estimation de quantités inconnues.**

Supposons que

- X et Y sont des v.a. **positivement** corrélées.
- $\mathbb{E}[X]$ est **connue** et on dispose de réalisations de v.a. i.i.d. $\{X_k, k \geq 0\}$ de même loi que X .
- $\mathbb{E}[Y]$ est **inconnue** et on dispose de réalisations de v.a. i.i.d. $\{Y_k, k \geq 0\}$ de même loi que Y .

Le principe de la méthode des **variables de contrôle** est **d'exploiter l'erreur d'estimation de quantités connues, pour améliorer l'estimation de quantités inconnues.**

Supposons que

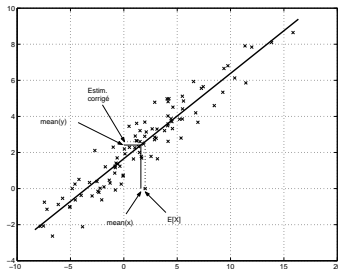
- X et Y sont des v.a. **positivement** corrélées.
- $\mathbb{E}[X]$ est **connue** et on dispose de réalisations de v.a. i.i.d. $\{X_k, k \geq 0\}$ de même loi que X .
- $\mathbb{E}[Y]$ est **inconnue** et on dispose de réalisations de v.a. i.i.d. $\{Y_k, k \geq 0\}$ de même loi que Y .

L'estimateur de Monte Carlo classique de $\mathbb{E}[Y]$ (resp. $\mathbb{E}[X]$) est

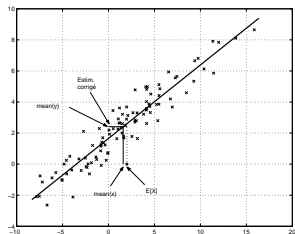
$$\bar{\mu}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

et l'erreur d'approximation de $\mathbb{E}[X]$ est

$$\mathcal{E}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[X] - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

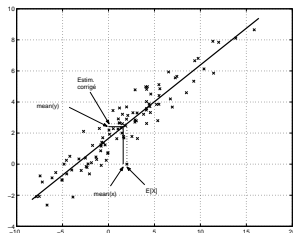


↪ comment corriger $\hat{\mu}_n$, connaissant l'erreur d'approximation \mathcal{E}_n ?



Si $\mathcal{E}_n > 0$,

- c'est que $n^{-1} \sum_{k=1}^n X_k$ sous-estime $\mathbb{E}[X]$.



Si $\mathcal{E}_n > 0$,

- c'est que $n^{-1} \sum_{k=1}^n X_k$ sous-estime $\mathbb{E}[X]$.
- Comme X et Y sont **positivement** corrélées, $\bar{\mu}_n$ aura tendance à **sous-estimer** aussi $\mathbb{E}[Y]$
- Donc on corrige l'estimateur en **ajoutant une quantité positive**

$$\bar{\mu}_n + b \left(\mathbb{E}[X] - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right)$$

avec un effet de **levier** ($b > 0$)

Dans la suite, nous discutons de l'estimateur de la forme

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k - b \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mathbb{E}[X] \right)$$

de la quantité inconnue $\mathbb{E}[Y]$

Dans la suite, nous discutons de l'estimateur de la forme

$$\hat{\mu}_n(b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k - b \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mathbb{E}[X] \right)$$

de la quantité inconnue $\mathbb{E}[Y]$

et en particulier du rôle de b dans les propriétés de cet estimateur.

Dans la suite, nous discutons de l'estimateur de la forme

$$\hat{\mu}_n(b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k - b \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mathbb{E}[X] \right)$$

de la quantité inconnue $\mathbb{E}[Y]$

et en particulier du rôle de b dans les propriétés de cet estimateur.

Nous ne considérerons que des estimateurs par variables de contrôle

$$h \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \right)$$

de type linéaire $h(x,y) = ax + by + c$ mais on peut considérer des fonctions plus générales (cf. Glasserman, 2005 par ex.)

II. Estimateur par variables de contrôle

Hypothèses

On suppose que l'on dispose de couples $\{(X_k, Y_k), k \geq 0\}$ tels que

- 1 ces couples sont indépendants et de même loi que (X, Y)
- 2 $\mathbb{E}[X]$ est connue et $\text{Var}(X) < +\infty$.
- 3 $\text{Var}(Y) < +\infty$.

ATTENTION cela implique que

- les v.a. $\{X_k, k \geq 0\}$ sont indépendantes.
- les v.a. $\{Y_k, k \geq 0\}$ sont indépendantes.

mais cela n'implique **rien** sur l'indépendance des v.a. $\{X_k, k \geq 0\}$ et $\{Y_k, k \geq 0\}$.

Définition des estimateurs

On compare l'estimateur de Monte Carlo usuel

$$\bar{\mu}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$$

à l'estimateur par variables de contrôle

$$\hat{\mu}_n(b) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mu}_n - b \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mathbb{E}[X] \right) = \bar{\mu}_n - b (\bar{X}_n - \mathbb{E}[X])$$

en ayant posé

$$\bar{X}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

Biais et Consistance

L'estimateur $\hat{\mu}_n(b)$ est

- sans biais (à démontrer)

Biais et Consistance

L'estimateur $\hat{\mu}_n(b)$ est

- sans biais (à démontrer)
- (fortement) consistant (à démontrer)

Variance

Sa variance est donnée par (à démontrer)

$$\text{Var}(\hat{\mu}_n(b)) = \text{Var}(\bar{\mu}_n) + \frac{1}{n} \left(\text{Var}(bX) - 2\text{Cov}(bX, Y) \right)$$

Variance

Sa variance est donnée par (à démontrer)

$$\text{Var}(\hat{\mu}_n(b)) = \text{Var}(\bar{\mu}_n) + \frac{1}{n} \left(\text{Var}(bX) - 2\text{Cov}(bX, Y) \right)$$

donc

$$\text{Var}(\hat{\mu}_n(b)) \leq \text{Var}(\bar{\mu}_n) \iff \text{Var}(bX) < 2\text{Cov}(bX, Y).$$

Variance

Sa variance est donnée par (à démontrer)

$$\text{Var}(\hat{\mu}_n(b)) = \text{Var}(\bar{\mu}_n) + \frac{1}{n} \left(\text{Var}(bX) - 2\text{Cov}(bX, Y) \right)$$

donc

$$\text{Var}(\hat{\mu}_n(b)) \leq \text{Var}(\bar{\mu}_n) \iff \text{Var}(bX) < 2\text{Cov}(bX, Y).$$

$\text{Var}(\hat{\mu}_n(b))$ est de la forme :

$$\frac{\text{Var}(X)}{n} b^2 + \beta_1 b + \beta_2$$

C'est une fonction quadratique de b qui possède un unique minimum.

↔ Quel est le choix optimal de b ?

Choix optimal du coefficient b

La valeur optimale est donnée par (à démontrer)

$$b_{\star} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}.$$

Choix optimal du coefficient b

La valeur optimale est donnée par (à démontrer)

$$b_{\star} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}(X)}.$$

Dans ce cas (à démontrer)

$$\text{Var}(\hat{\mu}_n(b_{\star})) = \text{Var}(\bar{\mu}_n) (1 - \rho_{X,Y}^2)$$

où

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \text{Corr}(X,Y)$$

Choix optimal du coefficient b

La valeur optimale est donnée par (à démontrer)

$$b_{\star} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}(X)}.$$

Dans ce cas (à démontrer)

$$\text{Var}(\hat{\mu}_n(b_{\star})) = \text{Var}(\bar{\mu}_n) (1 - \rho_{X,Y}^2)$$

où

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \text{Corr}(X,Y)$$

- La réduction de variance est d'autant plus forte que les v.a. sont fortement corrélées.
- Elle est en particulier nulle lorsque les v.a. X et Y sont indépendantes.
- Mais quand $\rho_{X,Y}^2 = 1$, la variance est nulle!! ... : est-ce exploitable?

Calcul de b_*

$$b_* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}.$$

- En pratique, b_* est incalculable.
- Approximations :
 - utiliser les réalisations de $\{(X_k, Y_k), k \leq n\}$ pour approcher b_* par \hat{b}_n . Les propriétés de $\hat{\mu}_n(\hat{b}_n)$ sont-elles les-mêmes que celles de $\hat{\mu}_n(b_*)$?

Calcul de b_*

$$b_* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}.$$

- En pratique, b_* est incalculable.
- Approximations :
 - utiliser les réalisations de $\{(X_k, Y_k), k \leq n\}$ pour approcher b_* par \hat{b}_n . **Les propriétés de $\hat{\mu}_n(\hat{b}_n)$ sont-elles les-mêmes que celles de $\hat{\mu}_n(b_*)$?**
 - utiliser des réalisations de $\{(X'_k, Y'_k), k \leq n_1\}$ de même loi que (X, Y) , **indépendantes** de celles utilisées pour le calcul de $\bar{\mu}_n$ et \bar{X}_n .

Calcul de b_*

$$b_* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}.$$

- En pratique, b_* est incalculable.
- Approximations :
 - utiliser les réalisations de $\{(X_k, Y_k), k \leq n\}$ pour approcher b_* par \hat{b}_n . **Les propriétés de $\hat{\mu}_n(\hat{b}_n)$ sont-elles les-mêmes que celles de $\hat{\mu}_n(b_*)$?**
 - utiliser des réalisations de $\{(X'_k, Y'_k), k \leq n_1\}$ de même loi que (X, Y) , **indépendantes** de celles utilisées pour le calcul de $\bar{\mu}_n$ et \bar{X}_n .
 - calcul "on line" de \hat{b}_n : calcul récursif eu fur et à mesure de l'obtention des réalisations de (X_k, Y_k) . (cf. TD)

Intervalles de confiance

Théorème Central Limite, b fixé

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_n(b) &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mu}_n - b \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mathbb{E}[X] \right) \\ &= \mathbb{E}[Y] + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\{Y_k - \mathbb{E}[Y]\} - b \{X_k - \mathbb{E}[X]\} \right)\end{aligned}$$

Intervalles de confiance

Théorème Central Limite, b fixé

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_n(b) &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mu}_n - b \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mathbb{E}[X] \right) \\ &= \mathbb{E}[Y] + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\{Y_k - \mathbb{E}[Y]\} - b \{X_k - \mathbb{E}[X]\} \right)\end{aligned}$$

dont on déduit que

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma(b)} \left(\hat{\mu}_n(b) - \mathbb{E}[Y] \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

où

$$\sigma^2(b) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Var}(Y - bX) = \text{Var}(Y) + b^2 \text{Var}(X) - 2b \text{Cov}(X, Y).$$

Cette démonstration est vraie parce que b est déterministe ! elle est à modifier si b est aléatoire (par ex. $b \leftarrow \hat{b}_n$)

Intervalles de confiance (cas b fixe)

On en déduit les intervalles de confiance à $(1 - \delta)\%$ de $\mathbb{E}[Y]$

$$\left[\hat{\mu}_n(b) - \frac{\sigma(b)}{\sqrt{n}} z_{1-\delta/2}; \hat{\mu}_n(b) + \frac{\sigma(b)}{\sqrt{n}} z_{1-\delta/2} \right]$$

où z_α désigne le quantile de niveau $\alpha\%$ d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Intervalles de confiance (cas b fixe)

On en déduit les intervalles de confiance à $(1 - \delta)\%$ de $\mathbb{E}[Y]$

$$\left[\hat{\mu}_n(b) - \frac{\hat{\sigma}_n(b)}{\sqrt{n}} z_{1-\delta/2}; \hat{\mu}_n(b) + \frac{\hat{\sigma}_n(b)}{\sqrt{n}} z_{1-\delta/2} \right]$$

où z_α désigne le quantile de niveau $\alpha\%$ d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

En pratique, la variance $\sigma^2(b)$ n'est pas connue

- la remplacer par un estimateur consistant $\hat{\sigma}_n^2(b)$
- et **adapter** les IC en conséquence, d'après le théorème de Slutsky.

Théorème Central Limite, $b = \hat{b}_n$ estimateur consistant de b_*

On a (à démontrer)

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma(b_*)} \left(\hat{\mu}_n(\hat{b}_n) - \mathbb{E}[Y] \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

où

$$\hat{b}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}[X])(Y_k - \bar{\mu}_n)}{\sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}[X])^2}$$

$$b_* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}$$

Théorème Central Limite, $b = \hat{b}_n$ estimateur consistant de b_*

On a (à démontrer)

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma(b_*)} \left(\hat{\mu}_n(\hat{b}_n) - \mathbb{E}[Y] \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

où

$$\hat{b}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}[X])(Y_k - \bar{\mu}_n)}{\sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}[X])^2} \qquad b_* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}$$

- Donc l'estimateur $\hat{\mu}_n(\hat{b}_n)$ se comporte asymptotiquement comme l'estimateur optimal $\hat{\mu}_n(b_*)$.

Théorème Central Limite, $b = \hat{b}_n$ estimateur consistant de b_*

On a (à démontrer)

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma(b_*)} \left(\hat{\mu}_n(\hat{b}_n) - \mathbb{E}[Y] \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

où

$$\hat{b}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}[X])(Y_k - \bar{\mu}_n)}{\sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}[X])^2} \quad b_* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}$$

- Donc l'estimateur $\hat{\mu}_n(\hat{b}_n)$ se comporte asymptotiquement comme l'estimateur optimal $\hat{\mu}_n(b_*)$.
- Par application du théorème de Slutsky, on en déduit des IC en remplaçant la variance asymptotique $\sigma^2(b_*)$ par un estimateur fortement consistant.

Cas multidimensionnel

On peut généraliser l'étude précédente au cas où l'on dispose de plusieurs variables de contrôle $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})^T$.

Dans ce cas, pour $b \in \mathbb{R}^d$

$$\hat{\mu}_n(b) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mu}_n - b^T (\bar{X}_n - \mathbb{E}[X])$$

où

$$\bar{X}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad X_k \text{ i.i.d. } \sim X$$

Cas multidimensionnel

On peut généraliser l'étude précédente au cas où l'on dispose de plusieurs variables de contrôle $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})^T$.

Dans ce cas, pour $b \in \mathbb{R}^d$

$$\hat{\mu}_n(b) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mu}_n - b^T (\bar{X}_n - \mathbb{E}[X])$$

où

$$\bar{X}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad X_k \text{ i.i.d. } \sim X$$

On montre que $b_\star \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_X^{-1} \Sigma_{X,Y}$

et

$$\text{Var}(\hat{\mu}_n(b_\star)) = \text{Var}(\bar{\mu}_n) (1 - R^2) \quad R^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Sigma_{X,Y}^T \Sigma_X^{-1} \Sigma_{X,Y}}{\text{Var}(Y)}$$

Σ_X : matrice de variance de X , supposée inversible;

$\Sigma_{X,Y}$: vecteur des covariances $\text{Cov}(X^{(k)}, Y)$.

III. Exemples d'application

Exemple 1

On souhaite estimer

$$\mathcal{I} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[(W_1 + W_2)^{5/4} \right]$$

où W_1, W_2 indépendantes et de même loi de Weibull de densité

$$f(x) = 3/2\sqrt{x} \exp(-x^{3/2}) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

- 1 Si U est une v.a. uniforme sur $[0,1]$, montrer que $W = (-\ln U)^{2/3}$ a même loi que W_1 .

Exemple 1

On souhaite estimer

$$\mathcal{I} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[(W_1 + W_2)^{5/4} \right]$$

où W_1, W_2 indépendantes et de même loi de Weibull de densité

$$f(x) = 3/2\sqrt{x} \exp(-x^{3/2}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

- 1 Si U est une v.a. uniforme sur $[0,1]$, montrer que $W = (-\ln U)^{2/3}$ a même loi que W_1 .
- 2 En déduire une méthode d'estimation de \mathcal{I} par une méthode de Monte Carlo utilisant un générateur de nombre uniforme sur $[0,1]$.

Exemple 1

On souhaite estimer

$$\mathcal{I} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[(W_1 + W_2)^{5/4} \right]$$

où W_1, W_2 indépendantes et de même loi de Weibull de densité

$$f(x) = 3/2\sqrt{x} \exp(-x^{3/2}) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

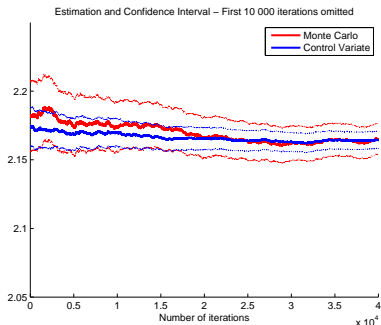
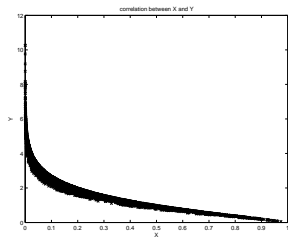
- 1 Si U est une v.a. uniforme sur $[0,1]$, montrer que $W = (-\ln U)^{2/3}$ a même loi que W_1 .
- 2 En déduire une méthode d'estimation de \mathcal{I} par une méthode de Monte Carlo utilisant un générateur de nombre uniforme sur $[0,1]$.
- 3 Proposer une estimation de \mathcal{I} basée sur la méthode des variables de contrôle, avec $X = U_1 U_2$ comme variable de contrôle: expliquer la mise en oeuvre et préciser la valeur $\mathbb{E}[X]$ (on ne cherchera à démontrer que l'introduction de cette variable de contrôle permet effectivement de réduire la variance).

Comparaison numérique de la précision des estimations

$$Y = \left\{ (-\ln U_1)^{2/3} + (-\ln U_2)^{2/3} \right\}^{5/4} \quad X = U_1 U_2$$

gauche on trace 5000 réalisations du couple (X, Y) , (X en abscisse et Y en ordonnée)

droite on compare la méthode de Monte Carlo à celle des variables de contrôle (VC). On trace l'estimation obtenue par Monte Carlo (en rouge) et celle obtenue par VC (en bleue), en fonction du nombre de termes dans la somme de Monte Carlo. On trace aussi les IC à 95%



On estime : $\sqrt{1 - \rho_{X,Y}^2} \approx 0.55$.

Exemple 2 : parité call-put

Pour tout x, K on a

$$(x - K)_+ - (K - x)_+ = x - K$$

Par suite, lorsque $\mathbb{E}[S]$ est connue, une variable de contrôle naturelle pour le calcul d'un call ou d'un put de la forme $\mathbb{E}[(S - K)_+]$ (resp. $\mathbb{E}[(K - S)_+]$) est $X = (S - K)$.

Exemple 2 : parité call-put

Pour tout x, K on a

$$(x - K)_+ - (K - x)_+ = x - K$$

Par suite, lorsque $\mathbb{E}[S]$ est connue, une variable de contrôle naturelle pour le calcul d'un call ou d'un put de la forme $\mathbb{E}[(S - K)_+]$ (resp. $\mathbb{E}[(K - S)_+]$) est $X = (S - K)$.

Par ex. dans le cas du prix d'un call européen

$$\mathcal{I} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} [\exp(-rT) (S_T - K)_+]$$

où S_T est le prix du sous-jacent à date de maturité T , modélisé par un brownien géométrique issu de $S_0 = x$, on a

$$\mathbb{E} [\exp(-rT) (S_T - K)] = x - \exp(-rT)K$$

Dans ce cas, on peut prendre

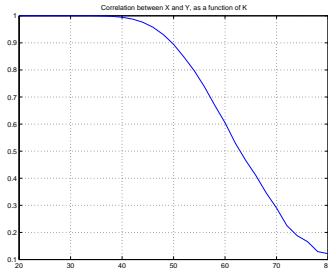
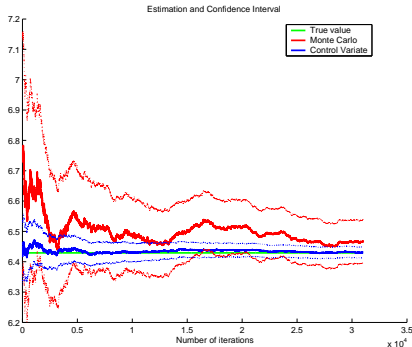
$$Y = \exp(-rT) (S_T - K)_+ \quad X = \exp(-rT) (S_T - K)$$

Application numérique

$$r = 0.05 \quad T = 0.25; \quad \sigma = 0.3; \quad S_0 = 50; \quad K = 45.$$

gauche on représente en fonction du nombre de termes dans la somme de Monte Carlo, l'estimation de la quantité d'intérêt \mathcal{I} par la méthode de Monte Carlo classique (en rouge) et par la méthode des variables de contrôle (VC) (en bleu). Dans cet exemple, la vraie valeur de \mathcal{I} est connue ($I = 6.43$) et est représentée en vert. On trace aussi les intervalles de confiance à 95% pour les deux méthodes.

droite on représente l'évolution de cette corrélation en fonction de K



↪ Quelle méthode par variable de contrôle suggérez-vous pour le calcul du call, lorsque K est grand?

Exemple 3 : calcul de prix d'options asiatiques

On veut calculer :

$$\mathcal{I} \stackrel{\text{def}}{=} \exp(-rT) \mathbb{E} \left[\left(M^{-1} \sum_{k=1}^M S_{t_k} - K \right)_+ \right]$$

où $t_k = kT/M$ est une discrétisation régulière de $[0, T]$ et $\{S_t, t \geq 0\}$ suit un brownien géométrique

$$S_t = S_0 \exp \left((r - 0.5\sigma^2)t + \sigma W_t \right).$$

Exemple 3 : calcul de prix d'options asiatiques

On veut calculer :

$$\mathcal{I} \stackrel{\text{def}}{=} \exp(-rT) \mathbb{E} \left[\left(M^{-1} \sum_{k=1}^M S_{t_k} - K \right)_+ \right]$$

où $t_k = kT/M$ est une discrétisation régulière de $[0, T]$ et $\{S_t, t \geq 0\}$ suit un brownien géométrique

$$S_t = S_0 \exp \left((r - 0.5\sigma^2)t + \sigma W_t \right).$$

On envisage trois variables de contrôle

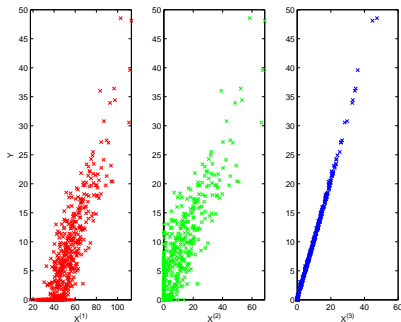
$$X^{(1)} = \exp(-rT) S_T - S_0$$

$$X^{(2)} = \exp(-rT) (S_T - K)_+ - \mathbb{E} \left[\exp(-rT) (S_T - K)_+ \right]$$

$$X^{(3)} = \exp(-rT) \left(\exp \left(M^{-1} \sum_{k=1}^M \ln S_{t_k} \right) - K \right)_+ - \mathbb{E} \left[\exp(-rT) \left(\exp \left(M^{-1} \sum_{k=1}^M \ln S_{t_k} \right) - K \right)_+ \right].$$

Applications numériques

$$r = 0.05 \quad T = 0.25; \quad \sigma = 0.3; \quad S_0 = 50; \quad K = 45; \quad M = 15$$



↔ Quelle variable de contrôle est la plus adéquate?