Variance reduction techniques (IV)

G. Fort

June 2010

Problem 1 (Extraction de la volatilité implicite dans le modèle de Black-Scholes)
Le spot x, le taux r, le strike K et la maturité T étant fixés, le prix d'un Call dans le modèle de Black-Scholes ne dépend que de la volatilité σ par la relation :

$$C_{\mathrm{BS}}(\sigma) = \mathrm{E}\left[\left(x\exp(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\sqrt{T}Z) - Ke^{-rT}\right)_+\right]$$

1. (a) Montrer que la dérivée du prix par rapport à la volatilité σ (appelée Vega) est égale à

$$C'_{\mathrm{BS}}(\sigma) = x\ \sqrt{T/2\pi}\ \exp(-0.5d_1^2) \qquad d_1 = \frac{\ln(x/K) + (r + 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

   (b) En déduire que $\sigma \mapsto C_{\mathrm{BS}}(\sigma)$ est strictement croissante.

2. On note

$$P_{\mathrm{BS}}(\sigma) = \mathbb{E}\left[\left(Ke^{-rT} - x\exp(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\sqrt{T}Z)\right)_+\right]$$

   le prix du put au strike K.

   (a) Etablir la parité entre le prix du call et le prix du put, à savoir:

$$C_{\mathrm{BS}}(\sigma) - P_{\mathrm{BS}}(\sigma) = x - K\mathrm{e}^{-rT}$$

   (b) En déduire que

$$\lim_{\sigma\to 0} P_{\mathrm{BS}}(\sigma) = \left(K\mathrm{e}^{-rT} - x\right)_+ \quad \lim_{\sigma\to+\infty} P_{\mathrm{BS}}(\sigma) = K\mathrm{e}^{-rT}$$

   (c) En déduire que

$$\lim_{\sigma\to 0} C_{\mathrm{BS}}(\sigma) = \left(x - K\mathrm{e}^{-rT}\right)_+ \quad \lim_{\sigma\to+\infty} C_{\mathrm{BS}}(\sigma) = x\ .$$

3. La fonction C_{BS} est donc continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\left[\left(x - K\mathrm{e}^{-rT}\right)_+ ; x\right]$. Par conséquent, il s'agit d'une bijection et pour tout $P^{\mathrm{Market}} \in \left[\left(x - K\mathrm{e}^{-rT}\right)_+ ; x\right]$ il existe une unique *volatilité implicite* $\sigma^* \in \mathbb{R}_+$ telle que $C_{\mathrm{BS}}(\sigma^*) = P^{\mathrm{Market}}$.

   (a) Montrer que si $P^{\mathrm{Market}} = \left(x - K\mathrm{e}^{-rT}\right)_+$, alors $\sigma^* = 0$. On suppose donc par la suite que $P^{\mathrm{Market}} > \left(x - K\mathrm{e}^{-rT}\right)_+$.

(b) Dans le but de pouvoir appliquer l'algorithme de Robbins-Monro, on introduit la fonction $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$H(\sigma, z) = \varphi(\sigma)\left[\left(x\exp(-\frac{\sigma_+^2}{2}T + \sigma_+\sqrt{T}Z) - K\mathrm{e}^{-rT}\right)_+ - P^{\mathrm{Market}}\right]$$

où $\varphi(\sigma) = (1+|\sigma|)\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_+^2}{2}T}$. On pose alors :

$$h(\sigma) = \mathbb{E}\left[H(\sigma, Z)\right] = \begin{cases} \varphi(\sigma)\left[C_{\mathrm{BS}}(\sigma) - C_{\mathrm{BS}}(\sigma^*)\right] & \sigma > 0 \\ (1+|\sigma|)\left[\left(x - K\mathrm{e}^{-rT}\right)_+ - P^{\mathrm{Market}}\right] & \sigma \leq 0 \end{cases}$$

- Montrer que la recherche de volatilité implicite est donc équivalente à la recherche de 0 de h.
- Montrer que

$$\forall \sigma \neq \sigma^*, h(\sigma)(\sigma - \sigma^*) > 0$$

- Montrer que

$$\mathbb{E}\left[H(\sigma, Z)^2\right] \leq C(1+|\sigma|^2)\ .$$

- Etablir les propriétés d'un algorithme d'approximation stochastique pour le calcul de la volatilité implicite.

Problem 2

Soit $X = (X_1, \cdots, X_d)$ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$, centré et de matrice de variance-covariance Σ: $X \sim \mathcal{N}_d(0, \Sigma)$. Soit $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_i \geq 0$. On suppose que $\lambda'\Sigma\lambda \neq 0$ (par convention, les vecteurs sont des vecteurs colonne).

Soient un réel ϵ et un réel strictement positif K. On cherche à calculer

$$P_\epsilon \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{P}(Z_\epsilon > K) \qquad \text{où} \qquad Z_\epsilon = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \exp(\epsilon\ X_i)\ .$$

1. (a) Comment peut-on simuler le vecteur aléatoire X à partir d'un générateur de nombres aléatoires distribués selon une v.a. réelle gaussienne centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$?
   (b) Décrire la méthode de Monte Carlo standard permettant de calculer P_ϵ.
   (c) Expliquer comment construire un intervalle de confiance à 95% pour l'estimation de P_ϵ.
2. (a) Proposer une v.a. Y_ϵ de loi log-normale, telle que Y_ϵ approche Z_ϵ lorsque $\epsilon \to 0$.
   (b) En déduire une technique de variable de contrôle pour le calcul de P_ϵ (quand ϵ est petit): préciser la variable de contrôle, la valeur de son espérance, et proposer un estimateur par variable de contrôle.
3. On suppose que $\sum_{i=1}^d \lambda_i < K$. Montrer que $\lim_{\epsilon \to 0} P_\epsilon = 0$. Quand ϵ est petit, quel problème numérique peut-on s'attendre à rencontrer dans le calcul de P_ϵ par une méthode de Monte Carlo standard ?

Problem 3

Pour tout réel $t > 0$, on note N_t une v.a. de Poisson de paramètre t:

$$\forall k \in \mathbb{N}\ , \qquad \mathrm{P}(N_t = k) = \frac{t^k}{k!}\exp(-t)\ .$$

Soient λ, μ des réels strictement positifs, $\lambda \neq \mu$. Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que il existe $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\phi(t) \neq 0$.

1. Montrer que

$$\mathrm{E}\left[\phi(N_\lambda)\right] = \mathrm{E}\left[\phi(N_\mu)\ Z\right] \quad \text{où} \quad Z \stackrel{\text{def}}{=} C\ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N_\mu}$$

pour une constante C que l'on explicitera.

2. Montrer que la variance de $\{\phi(N_\mu)\ Z\}$ est de la forme

$$v(\lambda,\mu) - \{\mathrm{E}\left[\phi(N_\lambda)\right]\}^2\ ,$$

pour une quantité $v(\lambda,\mu)$ que l'on explicitera sous la forme d'une espérance d'une fonction positive des constantes λ,μ et de la v.a. N_λ.

3. Pour simplifier, on suppose dans la suite que ϕ est bornée.

   (a) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, il existe un unique point $\mu_\star$ tel que $v(\lambda,\mu_\star) = \min_{\{\mu,\mu>0\}} v(\lambda,\mu)$. *Indications:* on pourra par exemple étudier la convexité de $\mu \mapsto v(\lambda,\mu)$ et le comportement de cette fonction quand $\mu \to 0^+$ et $\mu \to +\infty$.

   (b) Montrer que $\mu_\star$ est l'unique solution d'une équation de la forme

   $$\mathrm{E}\left[G(\lambda,\mu,N_\lambda,\phi)\right] = 0\ .$$

   On précisera l'expression de G.

4. Comment utiliser $\mu_\star$ pour approcher $\mathrm{E}\left[\phi(N_\lambda)\right]$, quand on dispose d'un générateur de v.a. de Poisson de paramètre t ($t > 0$ quelconque, précisé par l'utilisateur)?

5. Proposer un algorithme itératif permettant d'approcher $\mu_\star$ (on ne demande pas de prouver la convergence de l'algorithme).