

Les exercices **en rouge** ne seront pas corrigés en cours. La correction est disponible en fin de ce document.

Exercice 1 Soient A, B, C trois évènements. Exprimer en fonction de A, B et C les évènements correspondant aux propriétés :

- (1) A seul se produit.
- (2) au moins l'un d'entre eux se produit.
- (3) les trois se produisent.
- (4) au plus deux d'entre eux se produisent.
- (5) l'un d'entre eux exactement se produit.
- (6) au plus l'un d'entre eux se produit.
- (7) au moins deux d'entre eux se produisent.

Exercice 2 Soit Ω l'ensemble des couples mariés d'une ville donnée. On considère les évènements A : "l'homme a plus de quarante ans"; B : "la femme est plus jeune que l'homme"; C : "la femme a plus de quarante ans".

- (1) Interpréter en fonction de A, B, C l'évènement " le mari a plus de 40 ans mais pas sa femme".
- (2) Vérifier que $A \cap \bar{C} \subset B$.
- (3) Décrire en langage ordinaire les évènements $A \cap B \cap \bar{C}$, $A \setminus (A \cap B)$, $A \cap \bar{B} \cap C$.

Exercice 3 Soient A, B, C des sous-ensembles de Ω .

- (1) Montrer que $(A \Delta B) \cup (A \Delta \bar{B}) = \Omega$.
- (2) (a) Montrer que $(A \Delta B) \cap (A \Delta C) = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$.
(b) Montrer que $A \Delta (B \cup C) = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$.
(c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $(A \Delta B) \cap (A \Delta C) = A \Delta (B \cup C)$.

Exercice 4 Soient A, B, C et D quatre sous-ensembles de Ω . Montrer que

- (1) $\overline{(A \cap B) \cup (C \cap D)} = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{C} \cup \bar{D})$.
- (2) $(A \setminus B) \cup C = ((A \cup C) \setminus B) \cup (B \cap C)$.
- (3) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \emptyset$.
- (4) $A \setminus (A \setminus (B \setminus (B \setminus C))) = A \cap B \cap C$.

Exercice 5 Soient A et B deux parties d'un ensemble Ω ,

- (1) Que valent les fonctions $\mathbb{1}_\Omega$ et $\mathbb{1}_\emptyset$?
- (2) Montrer que $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$ ssi $A \subset B$.
- (3) Déterminer les fonctions indicatrices suivantes en termes de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$: $\mathbb{1}_{\bar{A}}$, $\mathbb{1}_{A \cap B}$, $\mathbb{1}_{A \cup B}$, $\mathbb{1}_{A \setminus B}$, $\mathbb{1}_{A \Delta B}$.

Exercice 6 (Identité de Poincaré) Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) - \sum_{i < j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n).$$

Exercice 7 Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable, $\omega_0 \in \Omega$ et \mathbb{P} une application de \mathcal{A} dans \mathbb{R}^+ vérifiant

$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_0 \in A, \\ 0 & \text{si } \omega_0 \notin A. \end{cases}$$

Vérifier que \mathbb{P} est une probabilité (appelée “mesure de Dirac en ω_0 ”).

Exercice 8 Soit l'espace probabilisable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, un réel λ strictement positif et un réel c . On définit l'application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ par $\mathbb{P}(A) = c \sum_{k \in A} \frac{\lambda^k}{k!}$. A quelle condition sur c , \mathbb{P} est-elle une probabilité (appelée “probabilité de Poisson de paramètre λ ”).

Exercice 9 Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable. On le munit d'une application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ satisfaisant les propriétés

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \text{ pour tout } A, B \in \mathcal{A} \text{ tels que } A \cap B = \emptyset.$$

Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes

- (i) Pour toute suite dénombrable $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments deux à deux disjoints de \mathcal{A} ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$

- (ii) Pour toute suite dénombrable $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ croissante d'éléments de \mathcal{A} , $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_n \uparrow \mathbb{P}(A_n)$.

- (iii) Pour toute suite dénombrable $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ décroissante d'éléments de \mathcal{A} , $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_n \downarrow \mathbb{P}(A_n)$.

Exercice 10 Soit Ω, E des ensembles. On suppose que E est au plus dénombrable et on le munit de la tribu \mathcal{E} de ses parties ($\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$). Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une application. On définit

$$\mathcal{A} = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{E}\} \quad \text{où} \quad X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\},$$

l'ensemble des images réciproques des éléments B de \mathcal{E} . Montrer que \mathcal{A} est une tribu sur Ω . \mathcal{A} est appelée *tribu engendrée par l'application (mesurable) X* .

Exercice 11 Soient des événements A et B tels que $\mathbb{P}(A) = 1/5$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 1/2$.

- (1) Si A et B sont incompatibles, que vaut $\mathbb{P}(B)$?

- (2) Calculer $\mathbb{P}(B)$ en supposant que A ne peut être réalisé que si B est réalisé.

Exercice 12 Soient A, B, C des évènements; on pose $E = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ et $F = A \cap (B \cup C)$.

- (1) Montrer que E et F sont incompatibles.
- (2) Déterminer $E \cup F$.
- (3) Calculer $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(F)$ sachant que $\mathbb{P}(A) = 0.6$; $\mathbb{P}(B) = 0.4$; $\mathbb{P}(C) = 0.3$; $\mathbb{P}(B \cap C) = 0.1$; $\mathbb{P}(A \cap C) = 0.1$; $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.2$ et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0.05$.

Exercice 13 Soit $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$ muni de la tribu de ses parties.

- (1) Déterminer la probabilité \mathbb{P} sur Ω telle que $\mathbb{P}(\{i\})$ est proportionnel à i . Calculer la probabilité de l'évènement "résultat pair".
- (2) Déterminer la probabilité \mathbb{P} sur Ω telle que les nombres $\mathbb{P}(\{i\})$ vérifient les conditions $\mathbb{P}(\{i\}) = a + ib$ pour tout $i \in \Omega$ et $\mathbb{P}(\{10\}) = 2\mathbb{P}(\{1\})$.

Soient $(A_n, n \geq 0)$ une famille de parties de Ω . On définit les ensembles $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ par

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{k \geq n} A_k \quad \limsup_n A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

ou encore $\liminf_n A_n = \{x \in \Omega, \exists n \forall k \geq n, x \in A_k\}$ et $\limsup_n A_n = \{x \in \Omega, \forall n, \exists k \geq n, x \in A_k\}$.

On dit que la suite d'ensembles $(A_n, n \geq 0)$ converge ssi $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$; dans ce cas, cette valeur commune est notée $\lim_n A_n$.

Exercice 14 (1) Montrer que $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$.

- (2) Soit $(A_n, n \geq 0)$ une suite croissante. Montrer que $\lim_n A_n$ existe.
- (3) Soit $(A_n, n \geq 0)$ une suite décroissante. Montrer que $\lim_n A_n$ existe.

Exercice 15 (1) On définit la famille d'ensembles $\{A_n, n \geq 1\}$ par : $A_n = A$ si n est pair; et $A_n = B$ si n est impair. Donner l'expression de $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$ en fonction de A et B .

- (2) On définit une famille de sous-ensembles de \mathbb{R} , $\{A_n, n \geq 1\}$ par $A_n = \left[0, 1 + \frac{(-1)^n}{n}\right]$. Donner l'expression de $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$. La suite $\{A_n, n \geq 1\}$ converge-t-elle ?

Exercice 16 Soit $\{A_n, n \geq 0\}$ une famille de parties de Ω .

- (1) Montrer que $\overline{\liminf_n A_n} = \limsup_n \overline{A_n}$ et que $\overline{\limsup_n A_n} = \liminf_n \overline{A_n}$.
- (2) Montrer que $\liminf_n (A_n \cap B_n) = [\liminf_n A_n] \cap [\liminf_n B_n]$; et en déduire que $\limsup_n (A_n \cup B_n) = [\limsup_n A_n] \cup [\limsup_n B_n]$.
- (3) (a) Montrer que $\limsup_n (A_n \cap B_n) \subset [\limsup_n A_n] \cap [\limsup_n B_n]$.
(b) On définit pour $n \geq 1$, A_n et B_n par

$$A_n = \begin{cases} \left[0, 1 - \frac{1}{n+1}\right] & \text{si } n \text{ pair,} \\ \left[0, 1 + \frac{1}{n+2}\right] & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases} \quad B_n = \begin{cases} \left[1 - \frac{1}{n+2}, 2\right] & \text{si } n \text{ pair,} \\ \left[1 + \frac{1}{n+1}, 2\right] & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Déterminer $\limsup_n (A_n \cap B_n)$, $\limsup_n A_n$ et $\limsup_n B_n$. Conclure.

Exercice 17 Soient $(A_n, n \geq 0)$ des parties de Ω . On rappelle que pour une suite de fonctions $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, la limite supérieure notée $\limsup_n f_n$ est la fonction qui à tout élément x de Ω associe la limite supérieure des nombres réels $(f_n(x))_n$:

$$\limsup_n f_n(x) = \lim_n \left(\sup_{k \geq n} f_k(x) \right) = \inf_{n \geq 1} \left(\sup_{k \geq n} f_k(x) \right).$$

Idem pour la limite inférieure d'une suite de fonctions:

$$\liminf_n f_n(x) = \lim_n \left(\inf_{k \geq n} f_k(x) \right) = \sup_{n \geq 1} \left(\inf_{k \geq n} f_k(x) \right).$$

Montrer que $\limsup_n \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\limsup_n A_n}$ et $\liminf_n \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\liminf_n A_n}$.

Exercice 18 Soit \mathbb{P} une probabilité sur une tribu \mathcal{A} de Ω , et $(A_n, n \geq 0)$ des éléments de \mathcal{A} .

1. Montrer que

(a) $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ sont des éléments de \mathcal{A} .

(b) $\mathbb{P}(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mathbb{P}(A_n)$. Quelle inégalité a-t-on entre $\limsup_n \mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(\limsup_n A_n)$?

2. On suppose de plus que $\{A_n, n \geq 0\}$ converge et on note A sa limite. Montrer que $\mathbb{P}(\lim_n A_n) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$.

Exercice 19 (i) 25 chevaux participent au tiercé. Combien y a-t-il de tiercés possibles ?

(ii) Combien de mots de 5 lettres (pas nécessairement prononçables) peut-on faire avec les 26 lettres de l'alphabet français ?

(iii) Combien y a-t-il de tirages de 5 cartes dans un jeu de 52 cartes ?

(iv) Combien de façon a-t-on pour répartir au hasard r boules numérotées de 1 à r , dans n urnes distinctes ?

Exercice 20 On tire quatre cartes au hasard, dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux rois ?

Exercice 21 n étudiants sont dans une salle. Leur jour anniversaire pendant l'année est l'un des jours numérotés de 1 à 365 (on ne tient pas compte des années bissextiles).

(i) Le professeur parie que deux étudiants au moins sont nés le même jour. On s'intéresse au nombre d'étudiants n minimal qu'il doit y avoir dans la salle pour que la probabilité que le professeur gagne soit supérieure à 0.5. Pour répondre à cette question, on pourra

(a) proposer un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui décrive cette expérience. On choisira Ω de sorte qu'il soit raisonnable de prendre pour \mathbb{P} la probabilité uniforme sur Ω .

(b) calculer la probabilité de l'évènement A : "2 étudiants au moins sont nés le même jour".

- (c) tracer cette quantité en fonction de n et conclure.
- (ii) Quelle est la probabilité des évènements suivants :
 - (a) Aucun étudiant n'est né le 24 Septembre
 - (b) Au moins un étudiant est né le 24 Septembre.
 - (c) Un étudiant exactement est né le 24 Septembre.
 - (d) Deux étudiants au moins sont nés le 24 Septembre.

Exercice 22 On lance deux dés à 6 faces, et non pipés.

- (i) Quelle est la probabilité d'obtenir un 1 et un 2 ? d'obtenir un double 4 ?
- (ii) Proposer un espace de probabilité tel que \mathbb{P} soit la probabilité uniforme.
- (iii) On s'intéresse à la somme des faces obtenues. On introduit donc une application $S : \Omega \mapsto \mathbb{N}$ qui à chaque issue du lancé des deux dés, associe la somme des faces.
 - (a) Quel est l'ensemble des valeurs possibles de S ?
 - (b) Pour chacune de ces valeurs k , calculer la probabilité de l'évènement $\{S = k\} = \{\omega \in \Omega, S(\omega) = k\}$.
- (iv) Le chevalier de Méré affirmait "il est avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un six en lançant un dé quatre fois de suite". A-t-il raison ?
- (v) Le chevalier de Méré affirmait aussi "il est avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un double six, en lançant deux dés vingt-quatre fois de suite". A-t-il raison ?
- (vi) On lance N dés à 6 faces non pipés. Quelle est la probabilité que la somme des faces soit paire ?

Exercice 23 Une caisse contient dix paires de chaussures (en vrac); dont une seule de taille 42. On retire au hasard quatre chaussures.

- (i) On désire calculer la probabilité pour que parmi ces quatre chaussures, se trouve la paire de taille 42.
 - (a) Proposer un espace de probabilité tel que \mathbb{P} soit la probabilité uniforme.
 - (b) Exprimer l'évènement : "parmi ces quatre chaussures, se trouve la paire de taille 42".
 - (c) Conclure.
- (ii) Quelle est la probabilité pour que parmi ces quatre chaussures, se trouve au moins une paire ?

Exercice 24 Un facteur dispose de n lettres adressées à n personnes distinctes. Très distrait, il distribue les lettres au hasard : quelle est la probabilité qu'aucune n'arrive à destination ?

Indications :

- (i) On peut considérer que les lettres sont numérotées de 1 à n selon la convention : vu le sens de sa tournée, la lettre numéro k est celle adressée à la k -ième maison qu'il visite. Au fur et à mesure qu'il distribue les lettres, le facteur note le numéro de la lettre distribuée

: il constitue donc des listes ordonnées à n éléments. Proposer un triplet de probabilité tel que \mathbb{P} soit la probabilité uniforme.

- (ii) On note A_i l'évènement : la i -ième lettre distribuée est la lettre i (donc elle est distribuée à la bonne personne). Calculer $\mathbb{P}(A_i)$, $\mathbb{P}(A_i \cap A_j)$ pour $i \neq j$; et plus généralement, pour l indices distincts, calculer $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l})$.
- (iii) Calculer la probabilité qu'au moins une lettre arrive à son destinataire.
- (iv) En déduire la probabilité qu'aucune n'arrive à son destinataire. Que vaut cette quantité quand $n \rightarrow +\infty$?

Exercice 25 Une urne contient 10 boules rouges, 5 blanches, 3 noires et 2 jaunes.

- (i) On tire successivement et sans remise 4 boules.
 - (a) Calculer la probabilité d'obtenir dans l'ordre : 1 rouge, 1 noire, 1 blanche, 1 jaune.
 - (b) Calculer la probabilité d'obtenir exactement 3 boules rouges sur les 4 tirées.
- (ii) On tire successivement et avec remise 3 boules.
 - (a) Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 boules rouges sur les 3 tirées.
 - (b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins 2 boules rouges sur les 3 tirées.

Exercice 26 Chaque don de sang est soumis à un test du SIDA. On suppose que ce test a une efficacité de 99% (i.e. probabilité que le test soit positif pour une personne atteinte du SIDA), et une probabilité de fausse alarme de 5% (probabilité que le test soit positif pour une personne non atteinte). Enfin, la fréquence de séropositivité est de $1/10000$. Quelle est la probabilité pour qu'une personne obtenant un test positif soit atteinte du SIDA ?

Exercice 27 Une compagnie d'assurance assure un nombre égal de conducteurs masculins et féminins. Tous les conducteurs (masculins) ont, chaque année, la probabilité α d'avoir un accident et ceci, indépendamment des autres années et des autres assurés. Il en est de même des conductrices, avec une probabilité d'accident égale à β . La compagnie sélectionne un assuré au hasard.

- (i) Quelle est la probabilité pour que la personne sélectionnée ait un accident cette année ?
- (ii) Quelle est la probabilité pour que la personne sélectionnée ait un accident deux années consécutives ?
- (iii) Quelle est la probabilité pour que, une année donnée, une personne sélectionnée au hasard parmi celles ayant eu un accident soit une conductrice ?

Exercice 28 Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés. Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné ?

Exercice 29 Un canal de transmission transmet des bits avec erreur selon le modèle suivant : il transmet fidèlement un bit avec probabilité p et de façon erronée avec probabilité $(1 - p)$ où $0 < p < 1$. On considère que n canaux de ce type sont en série, et que chaque canal fonctionne indépendamment des autres canaux. On note X_k le bit reçu en sortie du k -ième canal et X_0 le bit à l'entrée du premier canal.

- (1) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X_k = 1 | X_{k-1} = 1)$ et $\mathbb{P}(X_k = 1 | X_{k-1} = 0)$.
- (2) On note π_n le vecteur de coordonnées $[\mathbb{P}(X_n = 0) \quad \mathbb{P}(X_n = 1)]$. Préciser la relation entre π_n et π_{n-1} .
- (3) En déduire π_n en fonction de π_0 puis l'expression de π_n en fonction de n et p .
- (4) Quelle est la probabilité que l'information émise à l'entrée du premier canal, soit fidèlement transmise par le canal n ? Que devient cette quantité quand $n \rightarrow +\infty$?

Exercice 30 Le nombre de clients X quittant une file d'attente par unité de temps est modélisé par une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$. Ils sont ensuite dirigés vers le guichet A avec probabilité p et le guichet B avec probabilité $(1 - p)$, et ce, indépendamment des autres clients. On s'intéresse au nombre de clients se présentant dans la file d'attente du guichet A ($0 < p < 1$).

On note $(Y_n, n \geq 1)$ une suite de v.a. de Bernoulli de paramètre p

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = p \quad \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - p,$$

et on suppose que les v.a. $(X, Y_1, \dots, Y_n, \dots)$ sont indépendantes. On note

$$S = 0 \quad \text{si } X = 0, \quad S = \sum_{k=1}^X Y_k \quad \text{sinon.}$$

- (1) Que représente concrètement S ?
- (2) Calculer $\mathbb{P}(S = k | X = n)$ pour tout couple d'entiers (k, n) .
- (3) Montrer que S suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
- (4) Quelle est la loi de $\tilde{S} = \sum_{k=1}^X (1 - Y_k)$? Que représente concrètement \tilde{S} ?
- (5) Que vaut $\mathbb{P}(X = n | S = k)$?

Exercice 31 La loi du nombre d'appels arrivant à un central par minute, suit une loi \mathbb{P} sur \mathbb{N} donnée par une famille $(p_k, k \geq 0)$ telle que $\mathbb{P}(\{k\}) = p_k$. On suppose que le nombre d'appels reçus dans deux intervalles de temps disjoints sont indépendants.

- (1) Donner la loi du nombre d'appels reçus en deux minutes, en fonction de $(p_k, k \geq 0)$?
- (2) Expliciter cette loi lorsque le nombre d'appels arrivant à un central par minute suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 32 On suppose que l'on a autant de chances d'avoir un garçon ou une fille à la naissance, et que les sexes des enfants de la fratrie sont indépendants. Votre voisin de palier vous dit qu'il a deux enfants.

- (1) Quelle est la probabilité qu'il ait au moins un garçon ?
- (2) Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon sachant qu'il a au moins une fille ?
- (3) Vous téléphonez à votre voisin. Une fille décroche le téléphone. Or, dans les familles avec un garçon et une fille, la fille décroche avec une probabilité p . Quelle est la probabilité que votre voisin ait un garçon ?

Exercice 33 On souhaite déterminer la proportion de fraudeurs du fisc dans une population. Pour préserver l'anonymat des enquêtes, on propose aux personnes sondées de cocher la case OUI ou NON selon la procédure suivante : la personne sondée tire une boule dans une urne contenant 9 boules blanches et 1 boule rouge; elle ne montre pas la couleur de la boule tirée à l'enquêteur.

- (1) Si la personne a tiré une boule blanche, elle répond par oui ou par non à la question : “avez-vous fraudé l'an dernier ?”
- (2) Si elle a tiré une boule rouge, elle répond par oui ou par non à la question “êtes-vous né au mois de janvier” ? (on suppose les naissances uniformément réparties sur les mois de l'année).

Finalement, l'enquête donne 20% de OUI. Quelle est la proportion de fraudeurs fiscaux dans la population ?

Exercice 34 Soit X une v.a. à valeur dans $[0, 1]$. On suppose que pour tout $0 \leq a < b \leq 1$, on a

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \mathbb{P}(X \in]a, b]) = \mathbb{P}(X \in [a, b[) = \mathbb{P}(X \in]a, b[) = (b - a).$$

On fait la transformation suivante $Y = \lfloor 6X \rfloor + 1$. Y permet-elle de jouer aux dés ?

Exercice 35 On travaille sur l'espace

$$\Omega = \{(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)\}.$$

muni de la probabilité uniforme notée \mathbb{P} . Un élément de Ω est noté ω et ses composantes sont $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. on introduit les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 définies par $X_i(\omega) = \omega_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Ainsi par exemple, $X_1((a, b, c)) = a$, $X_2((a, b, c)) = b$, $X_3((a, b, c)) = c$.

- 1) Quelle est la loi de X_1 ? Quelle est la loi de X_2 ? Sont-elles indépendantes ?
- 2) Montrer que (X_1, X_2) a même loi que (X_2, X_3) .
- 3) Sur $\Omega' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de la probabilité uniforme, construire trois variables aléatoires Y_1, Y_2, Y_3 telles que la loi du triplet (Y_1, Y_2, Y_3) soit la même que celle de (X_1, X_2, X_3) .

Exercice 36 Soit X une v.a. géométrique de paramètre p ($0 < p < 1$), définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

$$\mathbb{P}_X(k) = (1 - p)^{k-1}p \quad k \geq 1.$$

- 1) Montrer que pour tout $k, n \geq 0$, $\mathbb{P}(X > k + n | X > k) = \mathbb{P}(X > n)$. On dit que la loi géométrique est *sans mémoire*.
- 2) Soient X_1, X_2 , deux v.a. indépendantes de loi géométrique de paramètre resp. p_1 et p_2 . Quelle est la loi de $Y = \min(X_1, X_2)$?

Exercice 37 Soient X et Y deux v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$ (Bernoulli de paramètre p) définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On définit $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

- 1) Quelle est la loi du couple (U, V) ? En déduire les lois marginales.
- 2) Calculer la loi de U sachant $\{V = i\}$ pour $i \in \{0, 1\}$.
- 3) Les v.a. U, V sont-elles indépendantes ?

Exercice 38 La loi jointe de deux v.a. X, Y est donnée par $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = c(2i + j)$ pour $(i, j) \in \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2, 3\}$ (et 0 partout ailleurs).

- 1) Que vaut c ?
- 2) Calculer $\mathbb{P}(X \geq 1, Y \leq 2)$.
- 3) Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}[XY]$.

Exercice 39 1) Calculer l'espérance et la variance d'une binômiale de paramètres (n, p) et géométrique de paramètre p , par application de la définition de ces moments.
 2) Retrouver ces résultats en utilisant la fonction génératrice des moments.
 3) En utilisant le fait qu'une v.a. binômiale est la somme de n v.a. indépendantes et de même loi - que l'on précisera -, retrouver l'espérance et la variance de la loi binômiale.

Exercice 40 On effectue des essais indépendants de probabilité de succès constante égale à p ($0 < p < 1$), jusqu'à obtenir un nombre m de succès, nombre fixé à l'avance

- 1) Calculer la probabilité de l'événement " $m + k$ essais sont nécessaires", pour tout $k \geq 0$. Notons p_{k+m} cette probabilité.
- 2) Vérifier que $(p_q, q \geq m)$ définit une probabilité sur $\{m, m + 1, \dots\}$.
- 3) Montrer que $(p_q, q \geq m)$ est la loi de m v.a. indépendantes de même loi géométrique de paramètre p , $\mathcal{G}(p)$.
- 4) Soit X est une v.a. de loi $(p_q, q \geq m)$ (i.e. $\mathbb{P}(X = k + m) = p_{k+m}$). On suppose $m > 1$.
 - (a) Montrer que $\mathbb{E} \left[\frac{m-1}{X-1} \right] = p$.
 - (b) Montrer que $\mathbb{E} \left[\frac{m}{X} \right] > p$. Indic : on pourra remarquer que $m/X = (m-1)/(X-1) + (X-m)/[X(X-1)]$.

Exercice 41 Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$), représentant le nombre d'oeufs de tortues marines pondus lors d'une saison aux Caraïbes. Pour diverses raisons, chaque oeuf a, indépendamment des autres, une probabilité p de donner naissance à un bébé tortue. On note $\{Y_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a. de loi de Bernoulli de paramètre p : $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_n = 0)$. On suppose que les v.a. (X, Y_1, Y_2, \dots) sont indépendantes. On note S la variable aléatoire définie par

$$S = 0 \text{ si } X = 0 \text{ et } S = \sum_{n=1}^X Y_n \text{ pour } X > 0.$$

- 1) Que représente concrètement S ?
- 2) Donner la fonction génératrice de X et Y_n .
- 3) Calculer pour tout entier m et k , $\mathbb{P}(S = k | X = m)$.
- 4) Montrer que S suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
- 5) Calculer pour tout entier m et k , $\mathbb{P}(X = m | S = k)$.

Exercice 42 Soient X, Y deux v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeur dans un espace au plus dénombrable E . On suppose que $0 < \mathbb{E}[X^2] < +\infty$ et $0 < \mathbb{E}[Y^2] < +\infty$.

- 1) Montrer que $c \mapsto \mathbb{E}[(X - c)^2]$ possède un unique minimum atteint en c_* . Préciser c_* . Interprétation ?
- 2) Supposons de plus que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$. Montrer que $(a, b) \mapsto \mathbb{E}[(Y - (aX + b))^2]$ admet un unique minimum en (a_*, b_*) . Calculer (a_*, b_*) . Interprétation ? Comment est modifié le résultat si on ne fait pas l'hypothèse que les v.a. sont centrées ?

Exercice 43 Un rat se trouve dans un labyrinthe face à m portes ($m \geq 2$) dont une seule conduit à la sortie. Lorsqu'il emprunte une porte ne conduisant pas à la sortie, il revient au point initial. On s'intéresse au nombre X de portes empruntées par le rat avant de sortir du labyrinthe.

- 1) Le rat n'a pas de mémoire. Déterminer la loi de X et son espérance.
- 2) Le rat n'a toujours pas de mémoire. On démarre l'expérience avec 2 portes et, à chaque erreur, on ajoute une mauvaise porte. Déterminer la probabilité de l'événement $\{X > k\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire la loi de X . Calculer son espérance.
- 3) Le nombre de portes est à nouveau fixe et égal à m . Le rat n'a pas de mémoire pendant $l \geq 1$ essais, puis il a ensuite une mémoire immédiate et évite la dernière porte visitée.
 - (i) Soient Y, Z deux v.a. indépendantes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$: Y (resp. Z) suit une loi géométrique de paramètre $1/m$ (resp. $1/(m-1)$) sur \mathbb{N}_* . Déterminer la loi de la variable

$$X' = Y \mathbb{1}_{Y \leq l} + \mathbb{1}_{Y > l}(l + Z).$$

(ii) Montrer que X et X' ont même loi.

Exercice 44 On suppose que l'on a autant de chances d'avoir un garçon ou une fille à la naissance, et que les sexes des enfants de la fratrie sont indépendants. Votre voisin de palier vous dit qu'il a deux enfants.

- 1) Quelle est la probabilité qu'il ait au moins un garçon ?
- 2) Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon sachant qu'il a au moins une fille ?
- 3) Vous téléphonez à votre voisin. Une fille décroche le téléphone. Or, dans les familles avec un garçon et une fille, la fille décroche avec une probabilité p . Quelle est la probabilité que votre voisin ait un garçon ?

Exercice 45 On désire étudier la probabilité d'extinction d'un nom de famille. Pour ce faire, on introduit une famille de v.a. $(Z_n, n \geq 0)$: Z_n est le nombre de descendants garçons à la génération n issus d'un unique ancêtre ($Z_0 = 1$). On modélise le nombre d'enfants à chaque génération de la façon suivante :

- Si $Z_n = 0$ alors $Z_{n+1} = 0$ i.e. si à la génération n , plus personne ne porte le nom, il en sera de même pour toutes les générations futures.
- Sinon, pour chacun des hommes de la génération n (pour $i = 1$ à Z_n), on compte le nombre d'enfants garçons (une v.a. $Y_{i,n}$) ce qui s'écrit : $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} Y_{i,n}$ où
 - pour tout (i, n) , $Y_{i,n}$ est une v.a. de loi $(p_j, j \geq 0)$.
 - On suppose de plus que pour tout n , $(Y_{i,n}, i \geq 1)$ sont des v.a. indépendantes et qu'elles sont indépendantes des v.a. (Z_0, \dots, Z_n) .
 - On suppose que $\text{Var}(Y_{i,n}) < +\infty$.

On pose

$$m = \mathbb{E}[Y_{i,n}] \quad G_n(s) = G_{Z_n}(s) \quad G(s) = G_{Y_{i,n}}(s).$$

- 1) (a) Exprimer l'évènement "il y a extinction du nom de famille" en fonction des évènements $\{Z_n = 0\}, n \geq 0$.
 (b) En déduire la probabilité que le nom s'éteigne, en fonction de $G_n(0)$. On note η cette probabilité.
- 2) On va caractériser η comme la plus petite solution sur $[0, 1]$ d'une équation au point fixe:
 - (a) Montrer que $G_n = G_{n-1} \circ G = G \circ G_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.
 - (b) En déduire que η est solution de l'équation de point fixe $s = G(s)$.
 - (c) Montrer que $s = 1$ est toujours solution, puis que η est la plus petite solution de cette équation sur $[0, 1]$.
- 3) **Cas 1:** En déduire que si $p_0 = 0$ alors $\eta = 0$. Interprétation de ce résultat ?
- 4) **Cas 2:** On suppose dorénavant que $p_0 > 0$ et $p_0 + p_1 = 1$. Montrer que $\eta = 1$. Interprétation de ce résultat ?

- 5) **Cas 3:** On suppose dorénavant que $p_0 > 0$, $p_0 + p_1 < 1$.
- (a) Montrer que la fonction $H : s \mapsto G(s) - s$ est strictement convexe sur $]0, 1[$.
 - (b) **Cas 3-a:** Montrer que pour tout $0 < s < 1$, $G(s) > (1 - m) + ms$. En déduire que si $m \leq 1$, $\eta = 1$.
 - (c) **Cas 3-b:** Montrer que si $m > 1$, $\eta \in]0, 1[$ (montrer que $H(0) > 0$, $H(1) = 0$ et $H'(1) > 0$ et conclure).
- 6) On introduit le modèle géométrique : $p_0 = 1 - \beta$ et $p_j = \beta(1 - p)^{j-1}p$ pour $j \geq 1$. ($0 < \beta, p < 1$).
- (a) Donner l'expression de G en fonction de β, p .
 - (b) Calculer m et vérifier que $\text{Var}(Y_{i,n}) < +\infty$.
 - (c) Résoudre l'équation de point fixe $s = G(s)$.

► **Dérivabilité de la fonction génératrice.**

Résultat Soit X une v.a. à valeur dans \mathbb{N} ; et un entier $p \in \mathbb{N}_*$. X possède un moment d'ordre p ssi G_S est dérivable p fois (à gauche) en 1, et l'on a

$$G_X^{(p)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-p+1)].$$

Démonstration La démonstration de cette propriété repose sur le lemme d'Abel :

- LEMME 1. (i) Si la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge de somme S alors $\lim_{s \rightarrow 1^-} \sum_{k \geq 0} u_k s^k = S$.
(ii) Soient des nombres positifs $(u_k, k \geq 0)$ tels que $\lim_{s \rightarrow 1^-} \sum_{k \geq 0} u_k s^k = S \leq +\infty$ alors

$$\sum_{k \geq 0} u_k = S.$$

Supposons que X possède un moment d'ordre 1. Alors $\sum_{k \geq 0} k \mathbb{P}_X(k) < \infty$ et par la première partie du lemme d'Abel, on a

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} G'_X(s) = \lim_{s \rightarrow 1^-} \sum_{k \geq 0} \{(k+1) \mathbb{P}_X(k+1)\} s^k = \mathbb{E}[X].$$

Réciproquement, supposons que G_S est dérivable à gauche en 1. Alors

$$G'_X(1^-) = \lim_{s \rightarrow 1^-} \sum_{k \geq 0} \{(k+1) \mathbb{P}_X(k+1)\} s^k < +\infty.$$

L'application de la seconde partie du lemme donne

$$\sum_{k \geq 1} k \mathbb{P}_X(k) = G'_X(1^-)$$

et donc $\mathbb{E}[X] < \infty$.

La démonstration dans le cas $p > 1$ est identique et omise.

Exercice 46 Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable. Soit I un ensemble fini ou dénombrable et $\{\omega_i; i \in I\}$ des éléments de Ω . Soit $(a_i, i \in I)$ une famille de réels positifs. On pose

$$\lambda(A) = \sum_{i \in I} a_i \delta_{\omega_i}(A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

- 1) Vérifier que la fonction d'ensemble λ est bien une mesure sur Ω
- 2) A quelle condition cette mesure est-elle bornée ? est-elle une probabilité ?

Lorsque (a) Ω est fini ou dénombrable de sorte que $\Omega = \{\omega_i, i \in I\}$ et (b) $a_i = 1$ alors $\lambda(A) = \sum_{i \in I} \delta_{\omega_i}(A)$: cette mesure est la mesure dénombrante car $\lambda(A)$ est égal au cardinal de A .

Exercice 47 Soit $\mu = \sum_{k \geq 0} \delta_k$ la mesure dénombrante sur \mathbb{N} muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. On pose $A_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$.

- 1) Montrer que $\mu(A_n) = +\infty$.
- 2) Montrer que $(A_n, n \geq 0)$ est une suite décroissante.
- 3) Vérifier que $\mu(\cap_n A_n) \neq \lim_n \downarrow \mu(A_n)$.

Exercice 48 1) Tracer et donner l'expression de la fonction de répartition de la probabilité définie sur \mathbb{R} par $0.2 \delta_{-1} + 0.4 \delta_0 + 0.4 \delta_2$.

- 2) Soit F la fonction donnée par

$$F(x) = 0.25 \mathbb{1}_{[0, +\infty)}(x) + 0.5 \mathbb{1}_{[1, +\infty)}(x) + 0.25 \mathbb{1}_{[2, +\infty)}(x),$$

- (a) Vérifier qu'il s'agit d'une fonction de répartition.
- (b) Soit \mathbb{P} la probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ admettant F pour fonction de répartition. Quelle est la probabilité des événements suivants

$$A =] - 1/2; 1/2[\quad B =] - 1/2; 3/2[\quad C =]2/3; 5/2[\quad D = [0, 2[\quad E =]3, \infty).$$

Exercice 49 Soit F la fonction de répartition donnée par

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ t/4 & 0 \leq t < 1, \\ 1/2 & 1 \leq t < 2, \\ 2/3 + \alpha(1 - \exp(-(t-2))) & t \geq 2. \end{cases}$$

- (1) Déterminer α et tracer le graphe de F .
- (2) Montrer que la probabilité \mathbb{P} sur \mathbb{R} dont F est la fonction de répartition s'écrit comme une somme de mesures de Dirac et d'une mesure ayant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 50 Soient a et b deux réels et X une v.a. à valeur dans \mathbb{R} . Déterminer la fonction de répartition de $Y = aX + b$ en fonction de celle de X .

Exercice 51 La fonction de répartition d'une v.a. uniforme U sur $[0, 1]$ est donnée par

$$F_U(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

- (1) Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une v.a. admettant une fonction de répartition F continue et strictement croissante. On pose $Y = F(X)$. Montrer que Y est une v.a. Quelle est la fonction de répartition de Y ?
- (2) Soit F une fonction de répartition (non nécessairement continue). On désigne par F^{-1} son inverse généralisée i.e. $F^{-1} :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$F^{-1}(t) = \inf\{y \in \mathbb{R} : F(y) \geq t\}.$$

- (a) Vérifier que $F \circ F^{-1}(t) \geq t$ pour tout $t \in]0, 1[$.
- (b) Montrer que $[x \leq F(t)] \iff [F^{-1}(x) \leq t]$ pour tout $x \in]0, 1[$ et $t \in \mathbb{R}$.
- (c) Montrer que $F^{-1}(U)$ est une v.a. et que la v.a. $F^{-1}(U)$ admet F comme fonction de répartition. En déduire une méthode pour obtenir des réalisations d'une v.a. dont la fonction de répartition est F .
- (d) Application : proposer un algorithme pour obtenir des réalisations d'une v.a. exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 52 Soit X une v.a. de fonction de répartition F_X , telle que X et $2X$ ont même fonction de répartition. Montrer que pour tout $n \geq 1$, et pour tout x , $F_X(2^n x) = F_X(x)$. En déduire la loi de X .

Exercice 53 (Mesure de Lebesgue-Stieltjes) Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et continue à droite. Pour tout $-\infty < a < b < +\infty$, on définit une fonction d'ensembles λ par

$$\lambda(]a, b]) = F(b) - F(a).$$

- 1) Montrer que
 - (a) $\lambda(\emptyset) = 0$.
 - (b) $\lambda(]a, c]) = \lambda(]a, b]) + \lambda(]b, c])$ pour tout $a \leq b \leq c$.
 - (c) $\lambda(]a, b_n]) \downarrow 0$ quand $b_n \downarrow a$.
 - (d) $\lambda(]a, b]) \leq \lambda(]a', b'])$ pour tout $]a, b] \subset]a', b']$.
- 2) Montrons que λ est σ -additive sur l'ensemble des intervalles semi-ouverts $\{]a, b], -\infty < a < b < +\infty\}$ (i.e. pour toute famille dénombrable d'ensembles semi-ouverts \mathcal{I} à 2 disjoints, telle que l'union est un intervalle semi-ouvert, on a la propriété de σ -additivité). Pour ce faire, soit une famille d'intervalles $]a_k, b_k], k \geq 1$ dont l'union est de la forme $]a, b]$ (on peut - sans pertes de généralité - supposer que $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \dots$) :

- (a) montrer que $\lambda(]a, b]) \geq \sum_{k=1}^n \lambda(]a_k, b_k])$ pour tout n . En déduire que $\lambda(]a, b]) \geq \sum_{k \geq 1} \lambda(]a_k, b_k])$.
- (b) montrer que si $a = b$ alors $\lambda(]a, b]) \leq \sum_{k \geq 1} \lambda(]a_k, b_k])$.
- (c) si $a < b$: soit $\epsilon > 0$ tel que $a + \epsilon < b$. Montrer que
- on peut trouver une suite de réels positifs $(\epsilon_n, n \geq 1)$ telle que $F(b_n + \epsilon_n) - F(b_n) < \epsilon/2^n$.
 - il existe un nombre fini m d'intervalles $V_n =]a_n, b_n + \epsilon_n]$ tels que $[a + \epsilon, b] \subset \cup_{k=1}^m V_k$.
 - on peut supposer que cette famille finie est telle que $a_1 \leq a + \epsilon, a_k \leq b_{k-1} + \epsilon_{k-1}$ ($2 \leq k \leq m$), $b < b_m + \epsilon_m$.
 - En déduire que $\lambda([a + \epsilon, b]) \leq \sum_{k \geq 1} \lambda(]a_k, b_k]) + \epsilon$.
 - En déduire que $\lambda(]a, b]) \leq \sum_{k \geq 1} \lambda(]a_k, b_k])$.
- (d) Conclure.

3) Montrer que λ se prolonge de façon unique en une mesure sur l'algèbre engendrée par les intervalles de la forme $]a, b]$. Pour ce faire,

- Montrer que l'algèbre est incluse dans l'ensemble des unions finies des intervalles de la forme

$$]-\infty, a] \quad]a, b] \quad]b, +\infty] \quad \text{pour } -\infty < a \leq b \leq +\infty.$$

- définir $\lambda(]-\infty, a])$ par $\sum_{k \geq 1} \lambda(]a_{k+1}, a_k])$ où $a_k \downarrow -\infty$ et $a_1 = a$; et montrer que cette quantité ne dépend pas de la suite $(a_k, k \geq 1)$ considérée.
- conclure.

4) En déduire qu'il existe une unique extension de cette mesure à la tribu borélienne. Cette mesure est appelée *mesure de Borel-Stieltjes*. La complétée¹ de la mesure de Borel-Stieltjes s'appelle *la mesure de Lebesgue-Stieltjes* induite par F .

5) Exemple : lorsque $F(x) = x$, la mesure complétée ainsi définie s'appelle *la mesure de Lebesgue*. Est-elle bornée ?

Exercice 54 Soit X une v.a. exponentielle de paramètre $\lambda > 0$: pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbb{P}(X \leq t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ et $\mathbb{P}(X \leq t) = 0$ si $t \leq 0$. Soit a un réel strictement positif. Quelle est la loi de $Y = \min(X, a)$? Tracer la fonction de répartition de Y .

Exercice 55 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une application mesurable.

¹Soit une mesure μ sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}) . On appelle ensemble μ -négligeable tout sous-ensemble d'un élément A de la tribu \mathcal{A} tel que $\mu(A) = 0$. Ces éléments ne sont pas nécessairement dans la tribu. On définit *la tribu complétée pour μ* comme étant la tribu engendrée par les ensembles de la forme $A \cup N$ où $A \in \mathcal{A}$ et N est μ -négligeable. On étend alors la mesure μ à cette tribu en une mesure $\bar{\mu}$, en posant $\bar{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$. $\bar{\mu}$ est *la complétée de μ* .

1) Montrer que si $f \geq 0$,

$$\left(\mu(f) = 0\right) \implies \left(\mu(\{f > 0\}) = 0\right).$$

On dit que f est *nulle μ presque-partout*.

2) Si f est μ -intégrable, montrer que $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$. On dit que f est *finie μ -p.p.*

3) Si $\mu(A) = 0$, montrer que $\int_A f d\mu = 0$.

Exercice 56 Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ la famille de fonctions définies sur \mathbb{R}^+ par

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } 0 \leq x < n, \quad f_n(x) = 0 \text{ si } x \geq n.$$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ la suite $\{f_n(x)\}_n$ est croissante et calculer sa limite $f(x)$.

2) Calculer

$$\int_{\mathbb{R}^+} f_n(x) dx; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n(x) dx; \quad \int_{\mathbb{R}^+} f(x) dx,$$

et commenter les résultats.

Exercice 57 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère sur \mathbb{R}^+ l'application $f_n(x) = 1_{[n, +\infty[}(x)$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ la suite $\{f_n(x)\}_n$ est décroissante et calculer sa limite $f(x)$.

2) A-t-on

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}^+} f(x) dx ?$$

Exercice 58 Soit μ une mesure sur les boréliens de \mathbb{R}^+ . On fixe $x > 0$ et $0 < \lambda < 1$.

1) On définit

$$f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

Exprimer

$$\sum_{n \geq 1} \lambda^n \int f_n d\mu$$

en fonction de

$$g(u) = \int_0^{+\infty} \exp(-ux) d\mu(x).$$

2) On suppose que maintenant μ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^+ : quelle identité obtient-on ?

Exercice 59 Soit X et $(X_n, n \geq 0)$ des v.a. positives définies sur le même espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

On suppose que

1) il existe un ensemble A de mesure nulle tel que pour $\omega \notin A$, on a $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$ (on parle de convergence μ presque-partout).

2) il existe une constante $0 < M < +\infty$ telle que pour tout $n \geq N$, $\int X_n d\mu \leq M$.

Montrer que $\int X d\mu \leq M$.

Exercice 60 (cours : Continuité / Dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale)

Montrer les théorèmes suivants : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

THÉORÈME 2. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et une famille de fonctions mesurables $\{f(\cdot, t)\}_{t \in I}$, dépendant d'un paramètre $t \in I$, $f(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que

(i) $\forall \omega \in \Omega$, $t \mapsto f(\omega, t)$ est continue sur I .

(ii) Il existe une application mesurable $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\mu(g) < +\infty$ et

$$\forall t \in I, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad |f(\omega, t)| \leq g(\omega).$$

Alors $t \mapsto \int f(\omega, t) d\mu(\omega)$ est continue sur I .

THÉORÈME 3. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et une famille de fonctions mesurables $\{f(\cdot, t)\}_{t \in I}$ dépendant d'un paramètre $t \in I$: $f(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que

(i) $\forall \omega \in \Omega$, $t \mapsto f(\omega, t)$ est dérivable sur I .

(ii) Il existe une application mesurable $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\mu(g) < +\infty$ et

$$\forall t \in I, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \left| \frac{\partial f(\omega, t)}{\partial t} \right| \leq g(\omega).$$

Alors, $t \mapsto \int f(\omega, t) d\mu(\omega)$ est dérivable sur I et

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f(\omega, t) d\mu(\omega) = \int \frac{\partial f(\omega, t)}{\partial t} d\mu(\omega)$$

Exercice 61 (cours : Mesure à densité) Soit un espace mesurable (Ω, \mathcal{A}) muni d'une mesure positive μ ; et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable. On définit pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\nu(A) := \int f \mathbb{1}_A d\mu,$$

ce que l'on note $d\nu = f d\mu$.

- 1) Montrer que ν est une mesure sur \mathcal{A} . f est appelée la dérivée de Radon-Nykodim de ν par rapport à μ et on écrit $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. A quelle condition est-ce une probabilité ? Dans ce cas, f est une *Densité de probabilité*.
- 2) Soit g une fonction mesurable, positive, telle que $\mu(\{f \neq g\}) = 0$ (justifier que $\{f \neq g\} \in \mathcal{A}$). Montrer que pour tout borélien A , on a

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu.$$

Conclusion ?

- 3) Montrer que pour toute fonction $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, on a

$$\int g d\nu = \int g f d\mu.$$

- 4) Montrer qu'une mesure discrète sur \mathbb{N} de la forme $\sum_n a_n \delta_n$ admet une densité par rapport à la mesure dénombrante $\sum_n \delta_n$, que l'on explicitera.
- 5) On suppose dorénavant que $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mu = \lambda$ - la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} - Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable telle que $\int f d\lambda = 1$. On définit une probabilité sur \mathbb{R} par : $\mathbb{P}(A) = \int f \mathbb{I}_A d\lambda$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que si on modifie f en un nombre au plus dénombrable de points, \mathbb{P} est inchangée.

(b) On suppose que f est Riemann-intégrable. On pose

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int f \mathbb{I}_{]-\infty, t]} d\lambda = \mathbb{P}(] - \infty, t]).$$

Montrer que si f est continue en x alors $f(x) = F'(x)$.

(c) (*loi de Cauchy*) Soit la fonction définie par

$$f(x) = \frac{c}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}.$$

A quelle condition sur c , f est-elle une densité de probabilité ? La fonction $g(x) = x$ est-elle \mathbb{P} -intégrable ?

(d) (*loi Gaussienne / Normale*) Soit la fonction définie par

$$f(x) = c \exp(-0.5x^2) \quad x \in \mathbb{R}.$$

A quelle condition sur c , f est-elle une densité de probabilité ? Vérifier que la fonction $g(x) = x$ est \mathbb{P} -intégrable et calculer son intégrale.

(e) (*loi de uniforme sur $[A, B]$*) La densité de cette loi est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{B-A} \mathbb{I}_{[A, B]}(x).$$

Vérifier que la fonction $g(x) = x$ est \mathbb{P} -intégrable et calculer son intégrale.

(f) (*loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$*) La densité de cette loi est donnée par

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

Vérifier que la fonction $g(x) = x$ est \mathbb{P} -intégrable et calculer son intégrale.

Exercice 62 Soient trois réels : $r > 0$, $\alpha > 0$ et $x_{\min} > 0$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable définie par

$$f(x) = \begin{cases} \alpha/x^{1+r}, & x \geq x_{\min} \\ 0 & x < x_{\min}. \end{cases}$$

On définit une mesure \mathbb{P} sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par

$$\mathbb{P}(] - \infty, t]) = \int f \mathbb{I}_{]-\infty, t]} d\lambda, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

- 1) (a) A quelle condition sur α , \mathbb{P} est-elle une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$? On suppose cette condition vérifiée dans la suite.

- (b) Déterminer la fonction de répartition F de la probabilité \mathbb{P} et tracer son allure.
- (c) Calculer la probabilité de l'intervalle $[0, 4x_{\min}[$.
- (d) Soit $p \geq 0$. Montrer que la fonction $g_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|^p$ est \mathbb{P} -intégrable ssi $p < p_*$ pour une valeur p_* que l'on précisera.
- 2) Soit a un réel, $a > x_{\min}$; et X une v.a. à valeur réelle, de loi \mathbb{P} définie par (1). On définit $Y = \min(X, a)$.
- (a) Montrer que Y est une v.a. réelle.
- (b) Donner l'expression des probabilités suivantes en fonction de la fonction de répartition F : $\mathbb{P}(Y = a)$; $\mathbb{P}(Y > a)$; $\mathbb{P}(Y < y)$ pour tout $y < a$.
- (c) On note \mathbb{P}_Y la loi de la v.a. Y , loi définie par $\mathbb{P}_Y(]-\infty, t]) = \mathbb{P}(Y \leq t)$. Dédurre de la question précédente, l'expression de la fonction de répartition de \mathbb{P}_Y en fonction de r, x_{\min}, a .
- (d) En déduire que la loi \mathbb{P}_Y est de la forme $f_Y(y) \mathbb{1}_I(y) \lambda(dy) + \gamma \delta_\beta(dy)$ pour des réels β, γ , une fonction positive f_Y et un intervalle I que l'on précisera en fonction de r, x_{\min}, a .
- (e) Sans faire de calculs, justifier la \mathbb{P}_Y -intégrabilité des fonctions $g_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|^p$ pour tout $p \geq 0$.

Exercice 63 Mr D. s'impatiente à l'arrêt de l'autobus. Il décide de prendre un taxi s'il en arrive un avant l'autobus. Soit X la v.a. donnant le temps d'arrivée en minutes du prochain autobus, et Y du prochain taxi. On suppose que X et Y sont indépendantes, que Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/5$ et que X est une v.a. discrète prenant trois valeurs

$$\mathbb{P}(X = 5) = 1/4 \quad \mathbb{P}(X = 15) = 1/2 \quad \mathbb{P}(X = 25) = 1/4.$$

- 1) Quelle est la probabilité pour que Mr D. attende plus de dix minutes ?
- 2) Quelle est la probabilité pour que Mr D. prenne un taxi plutôt qu'un bus ?
- 3) Quelle est la probabilité pour que Mr D. prenne un taxi plutôt que l'autobus, si l'on sait en outre qu'il a attendu plus de dix minutes ?

Exercice 64 Les questions sont indépendantes.

- 1) Soit X une v.a. de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Quelle est la loi de $Y = \exp(X)$?
- 2) Soit X une v.a. de Cauchy sur \mathbb{R}^+ de densité donnée par $f(x) = c(1+x^2)^{-1} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$. Que vaut c ? Quelle est la loi de $Y = 1/X$?
- 3) Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
 - (a) Quelle est la loi de X^2 ?
 - (b) Quelle est la loi de Y définie par

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } X \leq 1, \\ 2X & \text{si } X > 1. \end{cases}$$

4) Soit un réel $\alpha > 0$. Soient U une v.a. uniforme sur $[0, 1]$; Y une v.a. de Bernoulli de paramètre $1/(1 + \alpha)$; et X une v.a. de densité $f(x) = \alpha/x^{1+\alpha} \mathbb{1}_{]1, +\infty)}(x)$. Ces v.a. sont indépendantes.

(a) Calculer la fonction de répartition de X ; en déduire que X a même loi que $U^{-1/\alpha}$.

(b) On pose

$$Z = \begin{cases} X & \text{si } Y = 1 \\ U & \text{si } Y = 0 \end{cases}$$

Quelle est la fonction de répartition de Z , et sa densité si elle existe ? Graphe de ces fonctions.

Exercice 65 On considère un système constitué de n composants. On suppose que les durées de vie des composants sont des v.a. exponentielles T_1, \dots, T_n de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (strictement positifs); et que ces v.a. sont indépendantes.

1) On suppose que le système est en parallèle : il fonctionne lorsqu'au moins un des composants fonctionne. Exprimer la durée de vie T du système en fonction de v.a. $T_i, i \leq n$. Déterminer la fonction de répartition de T .

2) On suppose que le système est en série : il fonctionne lorsque tous les composants fonctionnent. Déterminer la fonction de répartition de T et reconnaître sa loi.

Exercice 66 Le cycle d'un feu de circulation est le suivant: le feu est vert sur l'intervalle $[0, v]$ et orange ou rouge sur $[v, v + r]$ ($v, r > 0$). L'instant d'arrivée U d'un automobiliste est supposé uniformément réparti sur le cycle $[0, r + v]$.

1) Exprimer en fonction de U le temps d'attente T de cet automobiliste au feu dans le cas où aucun automobiliste ne se trouve devant le feu à l'instant où il arrive.

2) Déterminer la probabilité que l'automobiliste passe immédiatement.

3) Montrer que pour toute fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée,

$$\mathbb{E}[h(T)] = \frac{v}{v+r} h(0) + \frac{1}{v+r} \int_0^r h(u) du.$$

4) Conclure que T n'est ni une v.a. à densité sur \mathbb{R} , ni une v.a. discrète: on écrira sa loi sous la forme $\sum_{i=1}^K f_i d\mu_i$ pour des densités f_i et des mesures μ_i à préciser.

Exercice 67 Une cerise est placée sur la circonférence d'un gateau rond que l'on partage en deux au hasard en pratiquant deux découpes suivant des rayons. Si on prend la position de la cerise comme origine des angles, les positions U et V des deux coups de couteau sont des variables uniformes sur $[0, 2\pi]$ et indépendantes.

1) Exprimer la taille T de la part contenant la cerise en fonction de U et de V .

2) Calculer son espérance et la probabilité qu'elle soit plus grosse que l'autre.

3) Quelle doit être la position d'un gourmand qui doit choisir entre la part avec la cerise et la part sans la cerise, avant le découpage ?

Exercice 68 On suppose que la durée de vie d'un équipement A est une v.a. S qui suit une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$; et que celle d'un équipement B est une v.a. T qui suit une loi de densité $f_T(x) = \beta^2 x \exp(-\beta x) \mathbb{1}_{[0, +\infty)}(x)$ ($\beta > 0$). S et T sont indépendantes.

- (1) Que vaut $\mathbb{P}(S \geq t + s | S \geq t)$ pour tout $t, s \geq 0$. Est-il judicieux de changer l'équipement A au temps t s'il fonctionne toujours ?
- (2) Quelle est la probabilité pour que l'équipement A tombe en panne avant l'équipement B ?

Exercice 69 Soit $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ $1 \leq i \leq d$ une famille d'espaces mesurables. On définit l'espace produit $\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d$ que l'on munit de la tribu produit $\otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i$. On définit les applications coordonnées pour $1 \leq i \leq d$ par $X_i : \Omega \rightarrow \Omega_i$, $X_i(\omega) = \omega_i$ où $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d)$.

- 1) Montrer que pour tout $1 \leq i \leq d$, X_i est une application mesurable de $(\Omega, \otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i)$ dans $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$.
- 2) Soit \mathcal{A} une tribu sur Ω telle que pour tout $1 \leq i \leq d$, X_i est une application mesurable de (Ω, \mathcal{A}) dans $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$. Montrer que $\otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$.

Conclusion : La tribu $\otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i$ est la plus petite tribu sur Ω qui rend les applications coordonnées mesurables. C'est donc la tribu engendrée par les applications $\{X_i, 1 \leq i \leq d\}$ sur Ω .

Exercice 70 λ désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} (x - y)/(x + y)^3 & \text{si } 0 < x, y \leq 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Montrer que $\int \lambda(dx) (\int f(x, y) \lambda(dy)) = 1/2$.
- 2) Montrer que $\int \lambda(dy) (\int f(x, y) \lambda(dx)) = -1/2$.
- 3) Calculer $\int |f(x, y)| \lambda(dx) \lambda(dy)$.
- 4) Conclusion ?

Exercice 71 Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ une v.a.r. positive de densité f_X . Montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq x) dx.$$

Proposer une relation similaire pour $\mathbb{E}[X^r]$, $r > 0$.

Exercice 72 Soit un réel α . Soit (X, Y) un couple de v.a.r. dont la loi jointe a pour densité

$$f(x, y) = \begin{cases} \alpha \exp(-x) \exp(-2y) & x, y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 1) Déterminer la constante α .
- 2) Déterminer la loi marginale de X . On précisera la densité de cette loi marginale si elle existe.
- 3) Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$.

4) Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 73 Soit (X, Y) un couple de v.a.r. dont la loi jointe est la loi uniforme sur le disque unité $\{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$: la densité est donnée par

$$f(x, y) = \alpha \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x, y) \quad \mathcal{C} := \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

- 1) Que vaut la constante α ?
- 2) Déterminer la loi marginale de X . Sans calculs, quelle est la loi de Y ?
- 3) Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 74 Soit (X, Y) un couple de v.a.r. dont la loi jointe est donnée par $f(x, y) = \exp(-x) \exp(-y)$ si $x, y \geq 0$ et 0 sinon.

- 1) Déterminer la fonction de répartition de la v.a.r. X/Y .
- 2) En déduire la densité de la v.a. X/Y .

Exercice 75 1) Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes et de loi donnée par leur densité f_X, f_Y . Exprimer la densité de la v.a. $S = X + Y$ en fonction de f_X et f_Y .

- 2) Expliciter la loi de S lorsque la loi du couple (X, Y) est donnée par la densité : $f(x, y) = \exp(-(x + y)) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+}(x, y)$.
- 3) Expliciter la loi de S lorsque X et Y sont des v.a. (indépendantes) uniformes sur $[0, 1]$.

Exercice 76 Soit $D(X)$ la matrice de variance-covariance d'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)^T$ défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- 1) Montrer que si les composantes $\{X_i, i \leq d\}$ sont indépendantes, la matrice de variance-covariance est diagonale.
- 2) Soit A une matrice de taille $l \times d$ déterministe.
 - (a) Montrer que AX est un vecteur aléatoire.
 - (b) Quelle relation lie $D(AX)$ à $D(X)$?
- 3) Si X et Y sont deux vecteurs aléatoires indépendants à valeur dans \mathbb{R}^d , montrer que $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.
- 4) Montrer que $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}[X] \in \text{Im}(D(X)) = 1)$. Pour ce faire, notons r le rang de $D(X)$.
 - (a) on pourra commencer par considérer le cas $r = d$.
 - (b) supposons que $r < d$: montrer qu'il existe $d - r$ vecteurs $u_k, 1 \leq k \leq d - r$, orthogonaux à $\text{Im}(D(X))$ et tels que $\mathbb{E}[(u'_k(X - \mathbb{E}[X]))^2] = 0$. En déduire que $u'_k(X - \mathbb{E}[X]) = 0$ p.s. et conclure.

Exercice 77 Soit X et Y deux v.a.r. de carré intégrable.

- (1) Calculer a_* et b_* solutions de

$$(a_*, b_*) = \operatorname{argmin}_{a,b} \mathbb{E}\{Y - (aX + b)\}^2,$$

en fonction des moments de X et Y , et de leur covariance. Interprétez le résultat.

- (2) On définit le coefficient de corrélation de X et Y par $\rho(X, Y) = \text{Cov}(X, Y) / \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}$.
- Montrer que $|\rho(X, Y)| \leq 1$.
 - Soient a, b, c, d des réels tels que $ac > 0$. Montrer que $\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y)$ (i.e. ρ est invariant par translation et changement d'échelle). Que devient cette relation si $ac < 0$?
 - Montrer que si $Y = aX + b$ alors $|\rho(X, Y)| = 1$.
 - Posons $Z = Y / \sqrt{\text{Var}(Y)} - \{\rho(X, Y) / \sqrt{\text{Var}(X)}\}X$. Montrer que $\text{Var}(Z) = 1 - \rho(X, Y)^2$. En déduire que si $|\rho(X, Y)| = 1$ alors Y est de la forme $aX + b$ pour $a \neq 0$.

Exercice 78 Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose

$$Y = \begin{cases} X & |X| > a, \\ -X & |X| \leq a, \end{cases} \quad \text{i.e. } Y = X\mathbb{1}_{|X|>a} - X\mathbb{1}_{|X|\leq a}$$

où a est tel que

$$\int_0^a x^2 \exp(-0.5x^2) dx = \sqrt{2\pi}/4.$$

Montrer que $\text{Cov}(X, Y) = 0$ mais que X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 79 Deux personnes se donnent un rendez-vous. L'heure d'arrivée de ces deux personnes est une v.a. aléatoire uniforme répartie sur l'intervalle $[20h; 21h]$; ces deux v.a. sont indépendantes. Quelle est la probabilité pour que la première personne arrivée attende plus de 10 minutes ?

Indic : on pourra introduire deux variables X, Y de loi uniforme sur $[0, 60]$ pour modéliser l'instant d'arrivée de chacune des deux personnes.

Exercice 80 Soit X, Y deux v.a. indépendantes, chacune de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose

$$U = \sqrt{-2 \ln X} \cos(2\pi Y), \quad V = \sqrt{-2 \ln X} \sin(2\pi Y)$$

- Quelle est la loi du couple (X, Y) ?
- Quelle est la loi du couple (U, V) ?
- Les v.a. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 81 (*Examen Décembre 06*) On rappelle que

$$\int_0^1 u^{-1/2} (1-u)^{-1/2} du = \pi.$$

Soit $X = (X_1, X_2) \sim \mathcal{N}_2(0, \text{Id})$. On pose

$$U = \frac{X_1^2}{X_1^2 + X_2^2} \quad V = X_1^2 + X_2^2.$$

- Calculer la densité de la loi de (U, V) .
- Donner les densités marginales de U et V . On précisera les constantes de normalisation.

3) Soit $Z = X_2^2/X_1^2$. Exprimer Z en fonction de U puis calculer la densité de la loi de Z .

Exercice 82 (*Examen Décembre 07, Corrigé sur site pédagogique*) Soit un couple de v.a. (X, Y) de densité conjointe $f(x, y) = cxy^2$ si $(x, y) \in \Delta$ et 0 sinon; où c est une constante positive et Δ est donné par

$$\Delta := \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], 0 < y < x^2 < 1\}.$$

- 1) Déterminer la constante c .
- 2) Déterminer les lois marginales de X et de Y .
- 3) Soit U une v.a. exponentielle de paramètre 8 et V une v.a. exponentielle de paramètre 3, indépendante de U . On pose

$$W = \exp(-U) \quad Z = \exp(-V)W^2.$$

Vérifier que f est la densité du couple (W, Z) .

Exercice 83 Soient $a, \lambda > 0$. On appelle loi Gamma de paramètres (a, λ) , que l'on note $\mathcal{G}(a, \lambda)$, la loi de probabilité sur \mathbb{R} de densité donnée par

$$f(x) = C \lambda^a \exp(-\lambda x) x^{a-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

On définit la fonction gamma - notée Γ - sur \mathbb{R}_*^+ par $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} \exp(-x) dx$ (on peut montrer par une intégration par parties que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$).

- (1) Soit $X \sim \mathcal{G}(a, \lambda)$. Calculer la constante de normalisation C en fonction de la fonction Γ .
- (2) Soient X et Y deux v.a. indépendantes, de lois respectives $\mathcal{G}(a, \lambda)$ et $\mathcal{G}(b, \lambda)$.
 - (a) Quelle est la loi de $(X+Y, X/(X+Y))$?
 - (b) les v.a. $X+Y$ et $X/(X+Y)$ sont-elles indépendantes ? préciser leurs lois.
 - (c) reconnaître la loi de $X+Y$.
 - (d) Dédire de la question précédente la valeur de $\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$.
- (3) Quelle est la loi de X/Y ?

Exercice 84 Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y \sim \Gamma(n/2; 1/2)$ (cf. exercice 83), $n \in \mathbb{N}^*$. Les v.a. X et Y sont indépendantes.

- (1) Quelle est la loi du couple $(X/\sqrt{Y/n}; \sqrt{Y})$?
- (2) Les v.a. $\sqrt{n}X/\sqrt{Y}$ et \sqrt{Y} sont-elles indépendantes ?
- (3) Donner la densité de la v.a. $\sqrt{n}X/\sqrt{Y}$. Cette v.a. est connue sous le nom de "loi de Student".

Exercice 85 On considère un couple de v.a. (X, Y) de densité conjointe

$$f(x, y) = \begin{cases} cy \exp(-x) & \text{si } (x, y) \in \Delta \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où c est une constante positive et Δ est le domaine de \mathbb{R}^2 défini par

$$\Delta := \{(x, y), 0 < y < x\}.$$

- 1) Déterminer la constante c .
- 2) Déterminer les lois marginales des variables X et Y .
- 3) Soient U une v.a. de loi $\mathcal{G}(3, 1)$ (cf. exercice 83) et V une v.a. uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de U . Quelle est la loi du couple $(U, \sqrt{V}U)$?

Exercice 86 Soient $\{X_n, n \geq 1\}$ une famille de v.a.r. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

On pose $T_n = X_1 + \dots + X_n$.

- 1) Déterminer la loi de $X_1 + \dots + X_n$.
- 2) En déduire la loi de T_n .
- 3) Calculer directement la fonction caractéristique de T_n .

Exercice 87 Soient $\{X_n, n \geq 1\}$ une famille de v.a.r. i.i.d. Soit N une v.a. à valeur dans \mathbb{N} , et indépendante des v.a. $\{X_n, n \geq 1\}$. On pose $S := \sum_{k=1}^N X_k$.

- 1) Montrer que la fonction caractéristique de S est égale à $\mathbb{E}[\{\phi(t)\}^N]$ où ϕ est la fonction caractéristique de la v.a. X_1 .
- 2) On suppose que $\mathbb{E}[N] + \mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$. Quelle relation lie les espérances de S , X_1 et N ?

Exercice 88 La fonction Γ est définie sur \mathbb{R}_*^+ par $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} \exp(-x)x^{a-1}dx$. La loi Gamma de paramètres (a, λ) ($a > 0$ et $\lambda > 0$) - notée $\mathcal{G}(a, \lambda)$ - est une loi sur \mathbb{R}^+ définie par la densité

$$f(x) = \alpha \exp(-\lambda x)(\lambda x)^{a-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

La loi Gamma $\mathcal{G}(n/2, 1/2)$ pour $n \in \mathbb{N}_*$ s'appelle aussi la loi du *Chi-2 à n degrés de liberté* et est notée $\chi^2(n)$.

- 1) Montrer que $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ pour tout $p > 0$ et $\Gamma(1) = 1$. En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier $n \geq 1$.
- 2) a) Exprimer la constante de normalisation α en fonction de la fonction Γ , a et λ .
b) Calculer l'espérance et la variance de la loi Gamma de paramètres (a, λ) .
- 3) On admettra que la fonction caractéristique d'une v.a. X de loi Gamma $\mathcal{G}(a, \lambda)$ est donnée par

$$\phi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^a.$$

- a) Reconnaître la loi Gamma de paramètres $(1, \lambda)$.
- b) En déduire une interprétation de la loi Gamma de paramètres (n, λ) , $n \in \mathbb{N}_*$ (*Loi d'Erlang*).
- c) Soient X et Y deux v.a. indépendantes, $X \sim \mathcal{G}(a, \lambda)$ et $Y \sim \mathcal{G}(b, \lambda)$. Quelle est la loi de $X + Y$?

- 4) a) Soit T une v.a. $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que T^2 est une loi Gamma dont on précisera les paramètres.
 b) En déduire la loi de la somme du carré de n v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
 c) Quelle est la loi de la somme de deux v.a. indépendantes suivant une loi du Chi-2 resp. à n_1 et n_2 degrés de liberté ?
 d) Quelles sont l'espérance et la variance d'une loi du Chi-2 à n degrés de liberté ?
- 5) La loi Gamma est utilisée pour modéliser la durée de vie X de composants : on définit le taux de défaillance

$$r(x) := \frac{f_X(x)}{\mathbb{P}(X > x)}$$

où $X \sim \mathcal{G}(a, \lambda)$.

- (a) Montrer que

$$\frac{1}{r(x)} = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda u) \left(1 + \frac{u}{x}\right)^{a-1} du.$$

- (b) En déduire que le taux de défaillance est strictement croissant, constant ou strictement décroissant suivant que $a > 1$, $a = 1$ et $0 < a < 1$.

Exercice 89 Soient $\{X_n, n \geq 0\}$ des v.a. réelles définies sur le même espace de probabilité, indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d). On suppose que ces v.a. possèdent un moment d'ordre 2: on note μ leur espérance et σ^2 la variance. On pose

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad Z_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \left(\frac{X_k - \mu}{\sigma} \right).$$

- 1) Quelles sont l'espérance et la variance de Z_n ?
 2) Montrer qu'il existe une fonction $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t \rightarrow 0} \xi(t) = 0$ et pour tout $k \geq 1$,

$$\phi_{\frac{X_k - \mu}{\sigma}}(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + t^2\xi(t).$$

- 3) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{Z_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On note $\phi(t)$ cette limite.
 4) De quelle loi, $t \mapsto \phi(t)$ est-elle la fonction caractéristique ?

On vient de démontrer le *Théorème Central Limite*.

Exercice 90 Soit un vecteur gaussien $X = (X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}_3(0, \text{Id})$. On pose

$$U = X_1 - X_2 + X_3 \quad T_1 = X_1 + X_2 \quad T_2 = X_2 + X_3 \quad T_3 = X_1 - X_3.$$

- 1) Quelle est la loi de U ?
 2) Montrer que U est indépendant du vecteur (T_1, T_2, T_3) , et indépendant de $T_i, i \in \{1, 2, 3\}$.
 3) On pose $V = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2$. Quelle est la loi de $V/3$? Indications :
 • Ecrire le vecteur $T = (T_1, T_2, T_3)$ sous la forme AX pour une matrice A de taille 3×3 .
 • Calculer les valeurs propres de $A^T A$.

- Conclure.

4) Quelle est la loi du couple (U, V) ?

Exercice 91 Loi des valeurs propres d'une matrice de Wigner 2×2 . Soit X_1, X_2 et X_3 trois v.a. gaussiennes indépendantes, centrées, de variances respectives $2\sigma^2$, $2\sigma^2$ et σ^2 . D'après le théorème spectral,

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_3 \\ X_3 & X_2 \end{bmatrix} = Q \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix} Q'$$

où Q est une matrice orthogonale 2×2 . On suppose $\Delta_1 \leq \Delta_2$. Le but de l'exercice est d'étudier la loi jointe de (Δ_1, Δ_2) .

1) Soient U et V , deux v.a. gaussiennes $\mathcal{N}(0, \theta^2)$ indépendantes.

(a) Quelle est la loi jointe de $U + V$ et $U - V$?

(b) Démontrer que $Z = \sqrt{U^2 + V^2}$ suit une loi de Rayleigh, i.e:

$$f_Z(t) = \frac{t}{\theta^2} e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t).$$

2) Démontrer que

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{(X_1 + X_2) - \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + 4X_3^2}}{2} \\ \Delta_2 &= \frac{(X_1 + X_2) + \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + 4X_3^2}}{2} \end{aligned}$$

3) En déduire qu'il existe des v.a.r. indépendantes R et T , telle que

$$\Delta_1 = R - T \quad \Delta_2 = R + T.$$

4) Identifier les lois de R et T .

5) Démontrer que la densité de (Δ_1, Δ_2) est donnée par

$$f_{(\Delta_1, \Delta_2)}(d_1, d_2) = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi\sigma^3} (d_2 - d_1) \exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2}(d_1^2 + d_2^2)\right) \mathbb{1}_{(d_2 > d_1)}$$

Exercice 92 Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de densité

$$f_{(X, Y)}(x, y) = C \exp\left(-\frac{\{3x^2 + 2xy + 3y^2\}}{8}\right).$$

1) Montrer que (X, Y) est un vecteur gaussien, de moyenne $\mu = (0, 0)$ et de matrice de variance-covariance

$$D = 0.5 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

En déduire la valeur de C .

2) Déterminer la loi de X , de Y . Quelle est la valeur de $\text{Cov}(X, Y)$? Les v.a. (X, Y) sont-elles indépendantes ?

- 3) On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Montrer que le couple (U, V) est gaussien, et caractériser sa loi. Les v.a.r. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 93 Soit $\{U_n, V_n, n \geq 1\}$ des variables aléatoires i.i.d., définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de même loi $\mathcal{U}([0, 1])$.

On pose

$$X_n := \begin{cases} 4, & \text{si } U_n^2 + V_n^2 \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad Z_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{U_k^2 + V_k^2 \leq 1}.$$

- 1) Quelle est la loi de X_n ?
- 2) (a) Montrer que $\{Z_n, n \geq 1\}$ converge p.s. vers π .
(b) Expliquez comment estimer π à partir de la réalisation $(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ du vecteur aléatoire $(U_1, V_1, \dots, U_n, V_n)$.
- 3) Soit $\alpha \in]0, 1[$.
(a) Quelle est l'espérance et la variance de Z_n ? En utilisant l'inégalité de Tchébichev, montrer que pour tout n ,

$$\mathbb{P} \left(|Z_n - \pi| \leq \sqrt{\frac{\pi(4 - \pi)}{(1 - \alpha)n}} \right) \geq \alpha.$$

En déduire n_0 tel que l'erreur d'approximation est inférieure à ϵ avec une probabilité au moins égale à α . A.N. lorsque $\alpha = 0.95$ et $\epsilon = 10^{-3}$.

- (b) En utilisant l'approximation donnée par le TCL, trouver n_0 tel que l'erreur d'approximation est inférieure à ϵ avec une probabilité au moins égale à α . Application numérique lorsque $\alpha = 0.95$ et $\epsilon = 10^{-3}$.

Exercice 94 On appelle *quantile d'ordre α* d'une v.a.r. Z (à densité sur \mathbb{R}), le réel c_α tel que $\mathbb{P}(Z \leq c) = \alpha$. Le quantile d'ordre 0.5 est la *médiane*.

Une agence de voyage dispose de 100 places sur un vol Paris/ New-York. Pour tenir compte des éventuels désistements, elle décide d'accepter 120 réservations. La probabilité pour qu'un passager ayant réservé, se présente à l'embarquement est 0.8 et les passagers sont supposés indépendants.

- 1) Quelle est la loi de la v.a. S égale au nombre de passagers, qui, ayant réservé leur place par l'agence, se présenteront effectivement à l'embarquement ?
- 2) En utilisant le TCL, proposer une approximation de la forme $\int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-0.5x^2) dx$ de la probabilité que le nombre de passagers présents à l'embarquement soit supérieur à 100.
- 3) Combien de réservations au maximum l'agence aurait-elle dû accepter pour que cette probabilité soit inférieure à 0.01 : on exprimera ce nombre en fonction d'un quantile (préciser l'ordre) de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 95 Soient f et g deux densités de probabilité sur \mathbb{R} , et c un réel tel que $f(x) \leq cg(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On souhaite obtenir des réalisations de v.a.r. de densité $f(x)$.

On suppose que l'on sait simuler des v.a. indépendantes Y de densité g . L'objectif de cet exercice est de construire un algorithme pour simuler des v.a. de densité f .

- 1) Montrer que $c \geq 1$.
- 2) Soit U une v.a.r. uniforme sur $[0, 1]$, et Y une v.a.r. de densité g , indépendante de U .
 - (a) Calculer la probabilité de l'événement $\{U \leq f(Y)/[cg(Y)], Y \leq t\}$ pour tout réel t , en fonction de c et de la fonction de répartition associée à la densité f .
 - (b) En déduire la probabilité de l'événement $\{U \leq [f(Y)/cg(Y)]\}$.
- 3) Soit $\{U_k, k \geq 1\}$ une famille de v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$, et $\{Y_k, k \geq 1\}$ une famille de v.a. de densité g . On suppose les v.a. $(U_1, Y_1, U_2, Y_2, \dots)$ indépendantes. On définit

$$T := \inf\{k \geq 1, U_k \leq [f(Y_k)/cg(Y_k)]\}.$$

- (a) On pose $X = Y_T$. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_*$, exprimer l'événement $\{X \leq t, T = n\}$ à l'aide des v.a. $U_1, \dots, U_n, Y_1, \dots, Y_n$. En déduire sa probabilité.
- (b) Quelle est la loi de T ?
- (c) Quelle est la loi de X ?
- 4) (a) Décrire un algorithme de simulation d'une v.a. de densité f , à partir d'une simulation du couple (U, Y) , dont les sorties successives sont indépendantes.
- (b) Sachant que les simulations de (U, Y) coûtent une unité CPU, quel est le temps moyen de cette procédure pour simuler une v.a. de densité f ?

Exercice 96 Soit $\{\tau_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a. i.i.d. de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

On pose

$$T_0 = 0 \quad T_n = T_{n-1} + \tau_n, \quad n \geq 1.$$

La suite de v.a. $\{\tau_n, n \geq 1\}$ représente la durée entre deux arrivées successives de clients dans une file d'attente, entre deux requêtes successives à un serveur, \dots .

On a donc $T_n = \tau_1 + \dots + \tau_n$ ce qui signifie que T_n est la somme de n v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$: d'après l'Exercice 81 qu. 3b, $T_n \sim \mathcal{G}(n, \lambda)$.

- 1) a) Quelle est la densité du couple (T_n, τ_{n+1}) ? (on pourra observer que T_n et τ_{n+1} sont indépendantes: pourquoi ?).
- b) En déduire que pour tout $s \geq 0, t > 0$,

$$\mathbb{P}(T_n \leq t < T_n + \tau_{n+1} - s) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t) \exp(-\lambda s). \quad (2)$$

- 2) Soit $t > 0$. On note N_t la v.a. qui compte le nombre de clients arrivés pendant l'intervalle $[0, t]$. On a donc

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{I}_{T_n \leq t}.$$

- a) Montrer que pour tout $n \geq 0, \{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$.

b) En utilisant (2), en déduire que N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt .

3) Soit $t > 0$. On appelle

- V_t le temps qui sépare t de la prochaine arrivée d'un client.
- U_t la durée qui sépare la dernière arrivée du client avant t , et t . Par convention :
 $U_t = t$ si il n'est pas arrivé de clients avant t .

Soient $y \geq 0$ et $x \in [0, t[$.

a) Montrer que $N_{t+y} - N_{t-x}$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(x + y)$.

b) Montrer que

$$[V_t > y, U_t \geq x] \iff [N_{t+y} - N_{t-x} = 0].$$

c) En déduire que $\mathbb{P}(V_t > y, U_t \geq x) = \exp(-\lambda(x + y))$.

d) Déduire de la question précédente : la loi de U_t , de V_t , et l'indépendance des v.a. U_t, V_t .

e) Un observateur observe la file à l'instant t : quelle est la durée moyenne avant l'arrivée du prochain client dans la file ? quelle est la durée moyenne entre la dernière arrivée avant t , et la première après t ?

CORRECTION

Correction Exercice 2 [qu. 1] $A \cap \bar{C}$.

[qu. 2] $A \cap \bar{C} = (A \cap \bar{C} \cap B) \cup (A \cap \bar{C} \cap \bar{B})$. Or, $A \cap \bar{C} \cap \bar{B} = \emptyset$ donc $A \cap \bar{C} = (A \cap \bar{C} \cap B) \subset B$.

[qu. 3a] On remarque que $A \cap B \cap \bar{C} = A \cap \bar{C}$ puisque $A \cap \bar{C} \subset B$ (en effet, un couple de $A \cap \bar{C}$ est tel que l'H a plus de 40 ans et la femme a moins de 40 ans; cela entraîne que la femme est plus jeune que l'homme; donc ce couple est élément de B). Ainsi $A \cap B \cap \bar{C}$ est : "l'H a plus de 40 ans et la femme a moins de 40 ans".

[qu. 3b] $A \setminus (A \cap B)$: l'H a plus de 40 ans et la F n'est pas plus âgée que l'H.

[qu. 3c] $A \cap \bar{B} \cap C$: l'H et la F ont plus de 40 ans et la F est plus âgée que l'H.

Correction Exercice 3 [qu. 1] On a

$$\begin{aligned} (A\Delta B) \cup (A\Delta \bar{B}) &= ((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})) \cup ((A \cap B) \cup (\bar{B} \cap \bar{A})) \\ &= ((A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)) \cup ((B \cap \bar{A}) \cup (\bar{B} \cap \bar{A})) \\ &= (A \cap (\bar{B} \cup B)) \cup (\bar{A} \cap (\bar{B} \cup B)) = A \cup \bar{A} = \Omega \end{aligned}$$

[qu. 2a] Par définition de la différence symétrique, on a

$$A\Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \quad A\Delta C = (A \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap C).$$

Donc

$$\begin{aligned} (A\Delta B) \cap (A\Delta C) &= ((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)) \cap ((A \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap C)) \\ &= [(A \cap \bar{B}) \cap ((A \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap C))] \cup [(\bar{A} \cap B) \cap ((A \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap C))] \\ &= [(A \cap \bar{B}) \cap (A \cap \bar{C})] \cup [(A \cap \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap C)] \cup [(\bar{A} \cap B) \cap (A \cap \bar{C})] \cup [(\bar{A} \cap B) \cap (\bar{A} \cap C)] \\ &= [A \cap \bar{B} \cap \bar{C}] \cup \emptyset \cup \emptyset \cup [\bar{A} \cap B \cap C] \\ &= [A \cap \bar{B} \cap \bar{C}] \cup [\bar{A} \cap B \cap C]. \end{aligned}$$

[qu. 2b] Par définition de la différence symétrique, on a

$$A\Delta(B \cup C) = [A \cap \overline{B \cup C}] \cup [\bar{A} \cap (B \cup C)].$$

Donc,

$$\begin{aligned} A\Delta(B \cup C) &= [A \cap \bar{B} \cap \bar{C}] \cup [\bar{A} \cap B] \cup [\bar{A} \cap C] \\ &= [A \cap \bar{B} \cap \bar{C}] \cup [\bar{A} \cap B \cap C] \cup [\bar{A} \cap B \cap \bar{C}] \cup [\bar{A} \cap \bar{B} \cap C] \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\bar{A} \cap C = (\bar{A} \cap C \cap B) \cup (\bar{A} \cap C \cap \bar{B})$ et $\bar{A} \cap B = (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C})$.
[qu. 2c] On a l'égalité $A \Delta (B \cup C) = (A \Delta B) \cap (A \Delta C)$ ssi

$$[A \cap \bar{B} \cap \bar{C}] \cup [\bar{A} \cap B \cap C] = [A \cap \bar{B} \cap \bar{C}] \cup [\bar{A} \cap B \cap C] \cup [\bar{A} \cap B \cap \bar{C}] \cup [\bar{A} \cap \bar{B} \cap C]$$

En observant que à gauche de l'égalité, les unions sont deux à deux disjointes; et de même à droite; ces deux quantités sont égales ssi

$$[\bar{A} \cap B \cap \bar{C}] \cup [\bar{A} \cap \bar{B} \cap C] = \emptyset,$$

soit encore

$$[\bar{A} \cap B \cap \bar{C}] = \emptyset \quad [\bar{A} \cap \bar{B} \cap C] = \emptyset.$$

La condition de gauche est équivalente à : $B \cap \bar{C} \subset A$. Et celle de droite à $\bar{B} \cap C \subset A$. Autrement dit ces deux conditions sont équivalentes à $B \Delta \bar{C} \subset A$.

Correction Exercice 4

[qu. 1]

$$\overline{(A \cap B) \cup (C \cap D)} = \overline{(A \cap B)} \cap \overline{(C \cap D)} = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{C} \cup \bar{D}).$$

[qu. 2] D'une part, on a

$$(A \setminus B) \cup C = (A \cap \bar{B}) \cup C$$

et d'autre part

$$((A \cup C) \setminus B) \cup (B \cap C) = ((A \cup C) \cap \bar{B}) \cup (B \cap C) = (A \cap \bar{B}) \cup (C \cap \bar{B}) \cup (B \cap C) = (A \cap \bar{B}) \cup C.$$

D'où l'égalité des deux quantités.

[qu. 3] En utilisant la distributivité on a

$$(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap \Omega = A.$$

De même,

$$(\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \bar{A}.$$

Puis par associativité, cela donne le résultat.

[qu. 4]

$$B \setminus (B \setminus C) = B \cap \overline{B \cap \bar{C}} = B \cap (\bar{B} \cup C) = (B \cap \bar{B}) \cup (B \cap C) = B \cap C$$

De même, $A \setminus (A \setminus (B \cap C)) = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

Correction Exercice 9 Comme A et \bar{A} sont disjoints, $\mathbb{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A})$. Or, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ donc $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A})$.

[(ii) \Leftrightarrow (iii)] Soit $(A_n, n \geq 0)$ une suite croissante (resp. décroissante). Alors $(\bar{A}_n, n \geq 0)$ est décroissante (resp. croissante). L'équivalence des deux propriétés résulte de (a) $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A})$ et (b) des relations de De Morgan pour une famille dénombrable.

[(i) \Rightarrow (ii)] On écrit $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$, avec $B_n = (A_n \setminus A_{n-1})$ et $B_0 = A_0$. La famille $(B_n, n \geq 0)$ est alors une famille d'ensembles 2 à 2 disjoints. Donc $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(B_n)$. Or, $A_n = A_{n-1} \cup B_n$ et A_{n-1}, B_n sont disjoints; par déf de \mathbb{P} , on a donc $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-1}) + \mathbb{P}(B_n)$. Par suite, $\sum_n \mathbb{P}(B_n) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$ et cette limite est croissante.

[(ii) \Rightarrow (i)] Soit $B_n = \bigcup_{k \leq n} A_k$. Alors $(B_n, n \geq 0)$ est une suite croissante et $\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n$. Par suite, $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \lim_n \uparrow \mathbb{P}(B_n)$. Enfin, par déf de \mathbb{P} , $\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$ (la déf de \mathbb{P} donne la relation pour deux éléments, et par récurrence, cela reste vrai pour un nombre **fini** d'éléments).

Correction Exercice 12

[qu. 1] Montrons que $E \cap F = \emptyset$. On a

$$E \cap F = \{A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap (A \cap B)\} \cup \{A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap (A \cap C)\} = \emptyset$$

puisque $\bar{B} \cap B = \emptyset$ et $\bar{C} \cap C = \emptyset$.

[qu. 2] Montrons que $E \cup F = A$ (s'aider d'un dessin pour deviner le résultat). On a

$$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C})$$

donc par associativité

$$A = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup \{(A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)\} \cup \{(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap C)\}$$

ce qui donne

$$A = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (A \cap C) \cup (A \cap B) = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (A \cap (B \cup C)).$$

Correction Exercice 15

[qu. 1] On a

$$\liminf A_n = \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k = \bigcup_n (A \cap B) = A \cap B.$$

et

$$\limsup A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k = \bigcap_n (A \cup B) = A \cup B.$$

[qu. 2]

$$\liminf A_n = \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} [0, 1 + (-1)^k/k] = \bigcup_n [0, 1 + (-1)^{n'}/n']$$

avec $n' = n$ si n est impair et $n' = n + 1$ si n est pair. Donc $\liminf A_n = [0, 1[$.

$$\limsup A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} [0, 1 + (-1)^k/k] = \bigcap_n [0, 1 + 1/n']$$

avec $n' = n$ si n est pair et $n' = n + 1$ si n est impair. Donc $\limsup A_n = [0, 1]$.

Cette suite ne converge pas.

Correction Exercice 16

[qu. 1] On applique les lois de Morgan pour une union / intersection dénombrable.

[qu. 2] Montrons l'égalité des ensembles par double inclusion. Soit $x \in \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} \{A_k \cap B_k\}$. Il existe n tel que pour tout $k \geq n$, $x \in A_k \cap B_k$. Donc il existe n tel que pour tout $k \geq n$, $x \in A_k$: $x \in \liminf_n A_n$. Et il existe n tel que pour tout $k \geq n$, $x \in B_k$: $x \in \liminf_n B_n$. Ainsi, $x \in \liminf_n A_n \cap \liminf_n B_n$.

Montrons l'inclusion réciproque : soit $x \in \liminf_n A_n \cap \liminf_n B_n$, alors il existe n_1 et n_2 tel que pour tout $k \geq n_1$ et $j \geq n_2$, $x \in A_k$ et $x \in B_j$. Donc pour tout $l \geq n_1 \vee n_2$, $x \in A_l \cap B_l$. Ainsi, $x \in \liminf_n (A_n \cap B_n)$.

On obtient la relation sur la limsup en passant au complémentaire.

[qu. 3a] Soit $x \in \limsup_n (A_n \cap B_n)$. Pour tout n , il existe $k \geq n$ tel que $x \in A_k \cap B_k$. Donc pour tout n , il existe $k \geq n$ tel que $x \in A_k$. Donc $x \in \limsup A_n$. Idem pour B_n . Donc x est dans l'intersection.

[qu. 3b] L'inclusion réciproque n'est pas vrai (on ne peut pas garantir que l'indice k soit commun aux deux familles d'ensemble). On donne un contre-exemple. Quand n est pair ou impair, $(A_n \cap B_n) = \emptyset$; donc $\limsup_n (A_n \cap B_n) = \emptyset$. Par ailleurs, $\limsup_n A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k = \bigcap_n [0, 1 + 1/(n' + 2)]$ avec $n' = n$ si n est impair et $n' = n + 1$ si n est pair. Donc $\limsup_n A_n = [0, 1]$. D'autre part, $\limsup_n B_n = \bigcap_n [1 - 1/(n' + 2), 2]$ avec $n' = n$ si n est pair et $n' = n + 1$ si n est impair. Donc $\limsup_n B_n = [1, 2]$. Par suite, $\limsup_n A_n \cap \limsup_n B_n = \{1\}$.

Correction Exercice 21

[qu. 1] Ω est l'ensemble des n -uplets (listes ordonnées) que l'on peut faire à partir des nombres $\{1, 2, \dots, 365\}$, en s'autorisant à prendre plusieurs fois le même nombre. On munit Ω de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$; et de la probabilité uniforme. Comme $|\Omega| = (365)^n$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/(365)^n$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Comme \mathbb{P} est la probabilité uniforme, $\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega|$. Pour dénombrer les issues dans l'ensemble A "2 étudiants sont nés le même jour", il est plus simple de dénombrer l'évènement complémentaire. \bar{A} : "tous les étudiants ont des dates différentes". $|\bar{A}| = 365 \times \dots \times (365 - n + 1)$ donc $\mathbb{P}(A) = 1 - |\bar{A}|/|\Omega|$.

Pour que cette probabilité soit supérieure à 0.5 il faut que $n = 23$.

[qu. 2a] $(364/365)^n$.

[qu. 2b] $1 - (364/365)^n$ (complémentaire de la question précédente).

[qu. 2c] $n \cdot 364^{n-1}/(365)^n$.

[qu. 2d] Passer par l'évènement contraire : aucun ou un seul.

Correction Exercice 23

[qu. 1a] Toutes les chaussures ont même probabilité d'être tirées : on peut donc les numéroter de façon à les distinguer par exemple de la forme (k, d) ou (k, g) pour désigner la chaussure droite ou gauche de la paire k .

On peut poser pour Ω l'ensemble des listes non ordonnées à 4 éléments faites à partir de ces numéros (k, d) ou (k, g) . Par suite le cardinal de Ω est $\binom{20}{4}$. La probabilité uniforme est donc donnée par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{\binom{20}{4}}.$$

[qu. 1b] L'évènement A : “ parmi ces quatre chaussures, se trouve la paire de taille 42” est constitué de tous les sous-ensembles à 4 éléments dont deux sont constitués de la paire de taille 42; et les deux autres sont deux autres chaussures parmi les 18 restantes. Par suite, le nombre d'éléments de A est $\binom{18}{2}$.

[qu. 1c] On en déduit que la probabilité que parmi ces quatre chaussures, se trouve la paire de taille 42 est

$$\frac{\binom{18}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{18 \times 17 \times 4 \times 3}{20 \times 19 \times 18 \times 17} = \frac{3}{5 \times 19} = \frac{3}{95}.$$

[qu. 2] “parmi les 4 chaussures se trouve au moins une paire” signifie “parmi les 4 chaussures se trouve exactement une paire “ OU “parmi les 4 chaussures se trouvent deux paires”. Dénombrons le premier cas : il faut choisir la paire (on a $\binom{10}{1}$ possibilités) **puis** il faut prendre deux chaussures dans deux paires différentes ce qui signifie sélectionner deux paires (on a $\binom{9}{2}$ possibilités) puis pour chacune de ces deux paires, choisit la chaussure dans la paire (on a 4 possibilités). Ainsi, le cardinal de l'évènement “parmi les 4 chaussures se trouve exactement une paire “ est

$$\binom{10}{1} \times \binom{9}{2} \times 4$$

Dénombrons le cas “parmi les 4 chaussures se trouve deux paires”. Il faut choisir deux paires dans les 10, on a donc $\binom{10}{2}$ possibilités.

En conclusion, le cardinal de “parmi les 4 chaussures se trouve au moins une paire” est

$$\binom{10}{1} \times \binom{9}{2} \times 4 + \binom{10}{2}$$

et la probabilité de cet évènement est 99/323.

(autre solution pour cette question) passer par le complémentaire : sélectionner une paire et la chaussure dans la paire (10×2) puis une paire distincte et la chaussure dans la paire (9×2) et ainsi de suite. Donc on a $10 \times 2 \times 9 \times 2 \times 8 \times 2 \times 7 \times 2$ possibilités. La probabilité de l'évènement complémentaire est donc 224/323, d'où le résultat.

Correction Exercice 25 Il y a 20 boules dans l'urne.

[qu. 1] $|\Omega| = 20 \times 17 = 116\ 280$. Toutes les issues sont équiprobables. L'évènement “ro/no/bl/ja” est de cardinal $10 \times 5 \times 3 \times 2$. L'évènement “exactement 3 rouges” est de cardinal $10 \times 9 \times 8 \times 10 \times 4$ (choix des trois boules ordonnées, puis d'une boule qui n'est pas rouge puis placer la non-rouge).

[qu. 2] $|\Omega| = 20^3 = 8\ 000$. Toutes les issues sont équiprobables. L'évènement “deux rouges sur les trois” est de cardinal $10 \times 10 \times 10 \times 3$ (choix de deux rouges, puis de la non-rouge, puis position de la non-rouge). L'évènement “au moins deux rouges sur les trois” est $10 \times 10 \times 10 \times 3 + 10^3$ (question précédente OU les trois sont rouges).

Correction Exercice 40

[qu. 1] Si $k + m$ succès sont nécessaires, cela signifie

- qu'il y a succès à la tentative $k + m$

- qu'il y a $m - 1$ succès dans les $k + m - 1$ premières tentatives, et toutes les autres tentatives sont des échecs.

Comme ces tentatives sont indépendantes, on a

$$p_{k+m} = p C_{m+k-1}^{m-1} (1-p)^k p^{m-1} = \binom{m+k-1}{m-1} p^m (1-p)^k.$$

[qu. 2] Pour vérifier que c'est une loi de probabilité, il suffit de vérifier que tous les termes p_{k+m} sont positifs (c'est vrai), inférieurs à 1, et que $\sum_{k \geq 0} p_{k+m} = 1$. Il suffit de démontrer cette somme et cela entraînera nécessairement que $p_{k+m} \leq 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} p_{k+m} &= \sum_{k \geq 0} \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!k!} (1-p)^k p^m = \frac{p^m}{(m-1)!} \sum_{k \geq 0} \frac{(m+k-1)!}{k!} (1-p)^k \\ &= \frac{p^m}{(m-1)!} \sum_{k \geq 0} (m+k-1)(m+k-2) \cdots (k+1)(1-p)^k. \end{aligned}$$

Considérons la fonction définie par

$$p \mapsto G(p) = \sum_{k \geq 0} (1-p)^k$$

pour $p \in]0, 1[$. Cette série est C^∞ sur $]0, 1[$ et sa dérivée q -ième est donnée par

$$G^q(p) = (-1)^q \sum_{k \geq 0} (k+q)(k+q-1) \cdots (k+1)(1-p)^k$$

de sorte que

$$\sum_{k \geq 0} p_{k+m} = \frac{p^m}{(m-1)!} (-1)^{m-1} G^{m-1}(p).$$

Par ailleurs, $G(p) = 1/p$ sur $]0, 1[$ donc $G^q(p) = (-1)^q q! / p^{q+1}$. On a donc bien $\sum_{k \geq 0} p_{k+m} = 1$. Cette loi est connue dans la littérature comme la loi *binômiale négative*.

[qu. 2'] **Montrons qu'une loi binômiale négative de paramètres (m, p) est la loi de la somme de m v.a. géométriques indépendantes de paramètre p** On sait que la fonction génératrice de la somme de m v.a. indépendantes géométriques de même paramètre est donnée par

$$\left(\frac{sp}{1-s(1-p)} \right)^m.$$

Il suffit donc de calculer la fonction génératrice de la loi binômiale négative : si ces fonctions sont égales sur $] -1, 1[$, on peut conclure à l'égalité des lois puisque la fonction génératrice caractérise la loi. On a

$$G(s) = \sum_{q \geq m} s^q p_q = s^m \sum_{k \geq 0} s^k p_{k+m} = \frac{s^m p^m}{(m-1)!} \sum_{k \geq 0} (m+k-1)(m+k-2) \cdots (k+1) [s(1-p)]^k.$$

définie pour $s \in [0, 1/(1-p)]$. En raisonnant comme dans la question précédente (lire la série comme la dérivée $(m-1)$ -ième d'une fonction de s), on montre que la série est égale à

$$\frac{(m-1)!}{[1-s(1-p)]^m},$$

pour tout $0 < s < 1/(1-p)$. Par suite, $G(s) = \left(\frac{sp}{1-s(1-p)}\right)^m$ sur l'intervalle $] -1, 1[$ en particulier.
[qu. 3a] On applique la définition de l'espérance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{m-1}{X-1}\right] &= \sum_{k \geq 0} \frac{m-1}{k-1} p_k = \sum_{k \geq m} \frac{m-1}{k-1} p_k = \sum_{k \geq 0} \frac{m-1}{k+m-1} p_{k+m} \\ &= \frac{p^m}{(m-2)!} \sum_{k \geq 0} (m+k-2) \cdots (k+1) (1-p)^k = \frac{p^m}{(m-2)!} \frac{(m-2)!}{p^{m-1}} = p.\end{aligned}$$

[qu. 3b] Vérifions l'indication

$$\frac{m-1}{X-1} + \frac{X-m}{X(X-1)} = \frac{Xm - X + X - m}{X(X-1)} = \frac{m}{X}.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\frac{m}{X}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{m-1}{X-1} + \frac{X-m}{X(X-1)}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{m-1}{X-1}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{X-m}{X(X-1)}\right]$$

Comme $X \geq m > 1$, il vient que $(X-m)/(X(X-1)) \geq 0$ donc l'espérance de cette v.a. est positive et même strictement positive puisque $\mathbb{P}((X-m)/(X(X-1)) = 0) < 1$. Ainsi

$$\mathbb{E}\left[\frac{m}{X}\right] > \mathbb{E}\left[\frac{m-1}{X-1}\right] = p.$$

Correction Exercice 41

[qu. 1] S est le nombre de bébés qui vont survivre.

[qu.2] X est une v.a. de Poisson, donc

$$G_X(s) = \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k s^k}{k!} \exp(-\lambda) = \exp(-\lambda(1-s)).$$

Y est une loi de Bernoulli: $G_Y(s) = (1-p) + sp$.

[qu. 3 et 4] voir exercice 30. S suit une loi de Poisson de paramètre λp .

[qu. 5] Si $k > m$, la quantité vaut 0. Si $k \leq m$,

$$\mathbb{P}(X = m | S = k) = \frac{\mathbb{P}(S = k | X = m) \mathbb{P}(X = m)}{\mathbb{P}(S = k)} = \frac{C_m^k p^k (1-p)^{m-k} \lambda^m}{m!} \exp(-\lambda) \frac{k! \exp(\lambda p)}{[\lambda p]^k}$$

de sorte que $\mathbb{P}(X = m | S = k) = \exp(-\lambda(1-p)) [\lambda(1-p)]^{m-k} / (m-k)!$.

Correction Exercice 42 Pour deux v.a. X, Y définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeur dans \mathbb{R} , on appelle *covariance de X et Y* le nombre réel donné par

$$\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

quand il existe. Il est noté $\text{Cov}(X, Y)$. On a la relation

$$\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

[qu. 1] Vue comme une fonction de c , $\mathbb{E}[(X-c)^2] = \mathbb{E}[X^2 + c^2 - 2cX]$ est une fonction quadratique qui tend vers $+\infty$ donc il y a un unique minimum. c_* est solution de $\partial_c \mathbb{E}[(X-c)^2] = 0$, ce qui donne $c_* = \mathbb{E}[X]$. Ainsi $\mathbb{E}[X]$ est la meilleure approximation de X par une constante, au sens L^2 .

[qu. 2] Vue comme une fonction de a, b , la fonction vaut

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y^2] + \mathbb{E}[(aX + b)^2] - 2\mathbb{E}[Y(aX + b)] &= \mathbb{E}[Y^2] + a^2\mathbb{E}[X^2] + b^2 - 2a\mathbb{E}[XY] \\ &= \text{Var}[Y] + \text{Var}[X^2] \left(a^2 - 2a \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]} \right) + b^2 \\ &= \text{Var}[Y] - \left(\frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]} \right)^2 + \text{Var}[X] \left(a - \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]} \right)^2 + b^2 \end{aligned}$$

Elle est minimale en $b = 0$ et $a = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]}$.

Si les variables ne sont pas centrées, on a

$$Y - (\bar{a}X + \bar{b}) = (Y - \mathbb{E}[Y]) - \bar{a}(X - \mathbb{E}[X]) - \bar{b} + \mathbb{E}[Y] - \bar{a}\mathbb{E}[X] = (Y - \mathbb{E}[X]) - a(X - \mathbb{E}[X]) - b$$

en posant $a = \bar{a}$ et $b = \bar{b} - \mathbb{E}[Y] + \bar{a}\mathbb{E}[X]$.

En particulier le coefficient a est inchangé : la meilleure approximation de Y au sens L^2 par une fonction affine de X est $\bar{a}X + \bar{b}$. Le signe de \bar{a} est celui de $\text{Cov}[X, Y]$: quand la covariance est positive, la droite est croissante \rightarrow corrélation positive.

Correction Exercice 44

On peut modéliser l'expérience de la façon suivante : on définit les couples (a, b) avec en première position le sexe du premier enfant, et en seconde position, le sexe du second enfant. Ainsi

$$\Omega = \{(f, f), (f, g), (g, f), (g, g)\}.$$

Chacune de ces issues est équiprobable et donc de probabilité $1/4$. Ci-après, \mathbb{P} désigne donc la probabilité uniforme sur Ω .²

[qu. 1] L'évènement A : "il a au moins un garçon" est

$$A = \{(g, g), (g, f), (f, g)\}.$$

Donc $\mathbb{P}(A) = 3/4$.

[qu. 2] Soit B : "il a au moins une fille". On cherche $\mathbb{P}(A|B)$. On a $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$. Or

$$A \cap B = \{(f, g), (g, f)\}$$

donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/2$. Et $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) = 3/4$. Par suite, $\mathbb{P}(A|B) = 2/3$.

[qu. 3] Soit C : "une fille répond". On cherche $\mathbb{P}(A|C) = \mathbb{P}(A \cap C)/\mathbb{P}(C)$.

²on aurait pu aussi définir l'univers comme l'ensemble des paires $\Omega' = \{\{f, g\}, \{f, f\}, \{g, g\}\}$ dans lequel l'ordre n'a pas d'importance. Dans ce cas, il faut faire attention que la probabilité de l'évènement $\{\{f, g\}\}$ est deux fois plus grande que la probabilité de chacune des autres paires. En conséquence, cet univers doit être muni d'une probabilité non uniforme donnée par

$$\mathbb{P}'(\{\{f, g\}\}) = 1/2 \quad \mathbb{P}'(\{\{g, g\}\}) = \mathbb{P}'(\{\{f, f\}\}) = 1/4.$$

En écrivant que Ω est la réunion disjointe de ses éléments, on a

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C \cap \{(f, f)\}) + \mathbb{P}(C \cap \{(f, g)\}) + \mathbb{P}(C \cap \{(g, f)\}) + \mathbb{P}(C \cap \{(g, g)\})$$

Or

- (i) $\mathbb{P}(C \cap \{(g, g)\}) = 0$ car on ne peut pas avoir deux garçons et une fille qui répond.
- (ii) $\mathbb{P}(C \cap \{(f, f)\}) = \mathbb{P}(C|\{(f, f)\})\mathbb{P}(\{(f, f)\}) = \mathbb{P}(\{(f, f)\}) = 1/4$ car sachant qu'on a deux filles, c'est nécessairement une fille qui répond donc $\mathbb{P}(C|\{(f, f)\}) = 1$.
- (iii) $\mathbb{P}(C \cap \{(f, g)\}) = \mathbb{P}(C|\{(f, g)\})\mathbb{P}(\{(f, g)\}) = p/4$.
- (iv) $\mathbb{P}(C \cap \{(g, f)\}) = \mathbb{P}(C|\{(g, f)\})\mathbb{P}(\{(g, f)\}) = p/4$.

Ainsi, $\mathbb{P}(C) = (2p + 1)/4$.

De même, on écrit

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C \cap \{(f, f)\}) + \mathbb{P}(A \cap C \cap \{(f, g)\}) + \mathbb{P}(A \cap C \cap \{(g, f)\}) + \mathbb{P}(A \cap C \cap \{(g, g)\})$$

et on a

- (i) $\mathbb{P}(A \cap C \cap \{(f, f)\}) = 0$ car $A \cap \{(f, f)\} = \emptyset$.
- (ii) $\mathbb{P}(A \cap C \cap \{(f, g)\}) = \mathbb{P}(C \cap \{(f, g)\}) = p/4$ puisque $\{f, g\} \in A$,
- (iii) $\mathbb{P}(A \cap C \cap \{(g, f)\}) = \mathbb{P}(C \cap \{(g, f)\}) = p/4$,
- (iv) $\mathbb{P}(A \cap C \cap \{(g, g)\}) = \mathbb{P}(C \cap \{(g, g)\}) = 0$.

Donc $\mathbb{P}(A \cap C) = 2p/4$.

Par suite, $\mathbb{P}(A|C) = 2p/(2p + 1)$.

Correction Exercice 45 (en partie)

[qu. 5-a] Comme les v.a. Y possèdent un moment d'ordre 2, G est de classe C^2 sur $[0, 1]$; donc G est strictement convexe ssi $G''(s) > 0$ sur $[0, 1]$. Soit encore $\sum_{j \geq 2} j(j-1)s^{j-2}p_j > 0$. Puisque $p_0 + p_1 < 1$, il existe $j \geq 2$ tel que $p_j > 0$ et donc $G''(s) > 0$ sur $]0, 1[$.

Si G est strictement convexe, H aussi.

[qu. 5-b] Soit $s \in]0, 1[$. Puisque H est convexe :

$$H(1) = H(s) + \int_s^1 H'(t)dt < H(s) + H'(1)(1-s) = G(s) - s + (m-1)(1-s)$$

et donc $G(s) > (1-m) + sm$.

On cherche la solution de $G(s) = s$ sur $[0, 1]$. $G(0) = p_0 > 0$ donc $s = 0$ n'est pas solution; pour $s \in]0, 1[$, $s > 1 + m(s-1)$ ssi $s(1-m) > 1-m$

Quand $1-m > 0$, alors $s > 1 \rightarrow$ il n'y a pas de solutions à $G(s) = 1$ sur $[0, 1[$. Comme 1 est toujours solution, c'est la seule solution.

De même, si $m = 1$, on a $s > s$ pas possible. Comme 1 est toujours solution, c'est la seule solution.

Si en moyenne, le nombre de garçons est inférieur à 1 pour chaque père, alors extinction du nom.

Si $m > 1$ alors $G(s) = s$ sur $]0, 1[$ ssi $s < 1$. Donc il existe

[qu. 5-c] $H(0) = p_0 > 0$; $H(1) = 0$ et $H'(1) = m - 1 > 0$. Comme H' est continue, il existe $\tilde{s} \in]0, 1[$ tel que pour tout $s \in [\tilde{s}, 1]$, $H'(s) > 0$. Donc $H(1) > H(\tilde{s}) + H'(\tilde{s})(1 - \tilde{s})$ soit encore

$$0 > H(\tilde{s}) + H'(\tilde{s})(1 - \tilde{s}) > H(\tilde{s}).$$

Puisque H est continue et $H(0) > 0$, il existe $s_* \in]0, 1[$ tel que $H(s_*) = 0$. La stricte convexité entraîne l'unicité de ce point. Donc $\eta \in]0, 1[$.

[qu. 6] On a

$$G(s) = 1 - \beta + \frac{\beta ps}{1 - s(1 - p)} = 1 - \beta + \frac{\beta p}{(1 - p)} \left(\frac{1}{1 - (1 - p)s} - 1 \right)$$

G est de classe C^2 sur $[-1, 1]$ donc $\text{Var}(Y) < +\infty$. De plus, $m = G'(1) = \beta/p$.

Les solutions de $G(s) = s$ sont données par 1 et $(1 - \beta)/(1 - p)$. Si $\beta \leq p$, $(1 - \beta)/(1 - p) \geq 1$ et $s = 1$ est la plus petite racine. Si $\beta > p$ alors $0 < (1 - \beta)/(1 - p) < 1$ et $\eta = (1 - \beta)/(1 - p)$.

Correction Exercice 51 [qu. 1] Y est une v.a. puisque c'est la composée de F mesurable (puisque continue) et de X (v.a.)

Puisque F est strictement croissante, $0 < F < 1$. Donc $F(t) \in]0, 1[$. Ainsi $Y \in]0, 1[$. Si $t \leq 0$, alors $F_Y(t) = 0$. Si $t \geq 1$, $F_Y(t) = 1$.

F est bijective de $\mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$ donc $F^{-1} :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ existe et est croissante. Si $t \in]0, 1[$ alors

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(F(X) \leq t) = \mathbb{P}(F^{-1} \circ F(X) \leq F^{-1}(t)) = \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(t)) = F \circ F^{-1}(t) = t.$$

Ainsi F_Y est égale à F_U : Y est une v.a. uniforme sur $[0, 1]$.

[qu. 2a] On pose $y_n = F^{-1}(x) + 1/n$. Alors $\lim_n \downarrow y_n = F^{-1}(x)$. Puisque F est continue à droite, $\lim_n F(y_n) = F(\lim_n y_n) = F \circ F^{-1}(x)$. D'autre part, $y_n > F^{-1}(x)$ donc $F(y_n) \geq x$. Par suite, $\lim_n F(y_n) \geq x$. Ce qui donne le résultat voulu.

[qu. 2b] Si $x \leq F(t)$ alors $\inf\{y, F(y) \geq x\} \leq t$. Donc $F^{-1}(x) \leq t$.

Réciproquement, $F^{-1}(x) \leq t$ signifie $\inf\{y, F(y) \geq x\} \leq t$. Puisque F est croissante, $F \circ F^{-1}(x) \leq F(t)$; enfin, par la question 2a, $F(t) \circ F^{-1}(x) \geq x$. Ce qui conclut la démonstration.

[qu. 2c] Soit $t \in \mathbb{R}$; montrons que $\{\omega, F^{-1}(U(\omega)) \leq t\} \in \mathcal{A}$. D'après la question précédente, $\{\omega, F^{-1}(U(\omega)) \leq t\} = \{\omega, U(\omega) \leq F(t)\}$. Or U est une v.a. donc $\{\omega, U(\omega) \leq F(t)\} \in \mathcal{A}$. Ainsi $\{\omega, F^{-1}(U(\omega)) \leq t\} \in \mathcal{A}$ et $F^{-1}(U)$ est une v.a.

D'après la question 2b, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq t) = \mathbb{P}(U \leq F(t))$. Or, si $x \in [0, 1]$, $\mathbb{P}(U \leq x) = x$; comme $F \in [0, 1]$, $\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq t) = F(t)$. Ainsi la v.a. $F^{-1}(U)$ est une v.a. dont la fonction de répartition est F : pour simuler une telle v.a. il suffit de tirer une réalisation d'une loi uniforme sur $[0, 1]$ et d'appliquer la transformation F^{-1} .

[qu. 2d] $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ sur \mathbb{R}^+ , à valeur dans $[0, 1[$. Pour tout $x \in]0, 1[$, $F(t) = x$ ssi $-\ln(1 - x)/\lambda = t$. Donc $F^{-1}(t) = -\ln(1 - t)/\lambda$ sur $]0, 1[$. La v.a. $-\ln(1 - U)/\lambda$ suit une loi exponentielle de paramètre λ .

Correction Exercice 53 [qu. 1a] $\emptyset =]a, a]$ donc

$$\lambda(\emptyset) = F(a) - F(a) = 0.$$

[qu. 1b] Soient $a < b < c$. Alors

$$\lambda(]a, c]) = F(c) - F(a) = F(c) - F(b) + F(b) - F(a) = \lambda(]a, b]) + \lambda(]b, c]).$$

[qu. 1c] Soit $(b_n, n \geq 0)$ une suite décroissante et convergente vers a . Alors d'après la question 1b, $\lambda(]a, b_n]) \leq \lambda(]a, b_{n+1}])$ donc

$$\lim_n \lambda(]a, b_n]) = \lim_n \downarrow \lambda(]a, b_n]) \leq \lim_n \downarrow F(b_n) - F(a) = F(a) - F(a) = 0,$$

puisque F est continue (donc $\lim_n F(b_n) = F(a)$).

[qu. 1d] si $]a, b] \subset]a', b']$ alors $a \geq a'$ et $b \leq b'$ donc en utilisant la croissance de la fonction F on a

$$\lambda(]a, b]) = F(b) - F(a) \leq F(b') - F(a') = \lambda(]a', b']).$$

[qu. 2a] On écrit

$$]a, b_n] =]a_1, b_1] \cup]b_1, a_2] \cup \dots \cup]b_{n-1}, a_n] \cup]a_n, b_n].$$

Donc, d'après la question 1c et 1d on a

$$\sum_{k=1}^n \lambda(]a_k, b_k]) \leq \sum_{k=1}^n \{\lambda(]a_k, b_k]) + \lambda(]b_k, a_{k+1}])\} = \lambda(]a, a_{n+1}]) = \lambda(]a, b_n]) \leq \lambda(]a, b]).$$

Comme cette relation est vraie pour tout n et que $\lambda(]a_n, b_n]) \geq 0$ pour tout n , on passe à la limite et on obtient $\lambda(]a, b]) \geq \sum_{k \geq 1} \lambda(]a_k, b_k])$.

[qu. 2b] Si $a = b$ alors $\lambda(]a, b]) = \lambda(\emptyset) = 0$ d'après la question 1a. Donc la minoration est vraie.

[qu. 2c] On suppose que $a < b$ et on fixe $\epsilon > 0$ tel que $a + \epsilon < b$. Comme F est continue, elle est uniformément continue sur tout compact. Donc pour b_n , il existe ϵ_n tel que pour tout a vérifiant $|b_n - a| \leq \epsilon_n$, on a : $|F(b_n) - F(a)| \leq \epsilon/2^n$. En particulier, pour $a = b_n + \epsilon_n$ et en utilisant la croissance de F il vient

$$F(b_n + \epsilon_n) - F(b_n) \leq \frac{\epsilon}{2^n}.$$

L'intervalle compact $[a + \epsilon, b]$ est recouvert par l'union dénombrable $\bigcup_n]a_n, b_n + \epsilon_n]$. Comme $[a + \epsilon, b]$ est compact, il vient que l'on peut extraire un recouvrement fini. Donc il existe un ensemble I de cardinal m tel que

$$[a + \epsilon, b] \subset \bigcup_{k \in I}]a_k, b_k + \epsilon_k]$$

et en réordonnant (et renumérotant) les termes de sorte que $a_1 \leq a + \epsilon$ et $a_k \leq b_{k-1} + \epsilon_{k-1}$ il vient

$$[a + \epsilon, b] \subset \bigcup_{k \leq m}]a_k, b_k + \epsilon_k].$$

Par suite en utilisant la monotonie de F ,

$$\begin{aligned} \lambda([a + \epsilon, b]) &\leq \lambda([a + \epsilon, b_m + \epsilon_m]) \leq \sum_{k=1}^m \lambda(]a_k, b_k + \epsilon_k]) \\ &\leq \sum_{k=1}^m \lambda(]a_k, b_k]) + \sum_{k=1}^m \lambda(]b_k, b_k + \epsilon_k]) \leq \sum_{k=1}^m \lambda(]a_k, b_k]) + \sum_{k=1}^m \frac{\epsilon}{2^k} \\ &\leq \sum_{k=1}^m \lambda(]a_k, b_k]) + \epsilon \leq \sum_{k \geq 1} \lambda(]a_k, b_k]) + \epsilon. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F(b) - F(a + \epsilon) \leq \sum_{k \geq 1} \lambda(]a_k, b_k]) + \epsilon.$$

Puis quand $\epsilon \rightarrow 0$, comme F est continue, il vient

$$\lambda(]a, b]) = F(b) - F(a) \leq \sum_{k \geq 1} \lambda(]a_k, b_k]).$$

[qu. 2d] En combinant les résultats des questions 2c et 2a, on a

$$\lambda(]a, b]) = \sum_{k \geq 1} \lambda(]a_k, b_k]),$$

càd que λ est σ -additive sur l'ensemble des intervalles semi-ouverts.

[qu. 3a] Montrons que l'algèbre est incluse dans la famille \mathcal{C} des unions finies de ce type d'intervalle. L'ensemble vide et \mathbb{R} sont dans cette famille \mathcal{C} ; si on prend un intervalle semi-ouvert $]a, b]$ alors son complémentaire est $] - \infty, a] \cup]b, +\infty[$ qui est bien dans la famille \mathcal{C} . Enfin, une union finie d'intervalles semi-ouverts est dans la famille \mathcal{C} .

[qu. 3b] L'intervalle $] - \infty, a]$ s'écrit comme union dénombrable d'intervalles de la forme $]a_{k+1}, a_k]$ pour une suite a_k qui tend en décroissant vers $-\infty$ et $a_1 = a$. On peut donc poser

$$\lambda(] - \infty, a]) = \sum_{k \geq 1} \lambda(]a_{k+1}, a_k]).$$

Il faut vérifier que cette quantité ne dépend pas de la suite $(a_k, k \geq 0)$ choisie. Prenons une autre famille d'intervalles semi-ouverts tels que $\bigcup B_k =] - \infty, a]$ et 2 à 2 disjoints. Alors

$$\begin{aligned} \lambda(] - \infty, a]) &= \sum_{k \geq 1} \lambda(]a_{k+1}, a_k]) = \sum_{k \geq 1} \lambda \left(]a_{k+1}, a_k] \cap \bigcup_l I_l \right) \\ &= \sum_{k \geq 1} \lambda \left(\bigcup_l \{]a_{k+1}, a_k] \cap I_l \} \right) = \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} \lambda(]a_{k+1}, a_k] \cap I_l) \\ &= \sum_{l \geq 1} \sum_{k \geq 1} \lambda(]a_{k+1}, a_k] \cap I_l) = \sum_{l \geq 1} \lambda(I_l), \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $I_l \cap]a_{k+1}, a_k]$ est un intervalle semi-ouvert, et la σ -additivité de la mesure λ sur les intervalles semi-ouverts.

[qu. 3c] On peut de même définir la mesure des intervalles de la forme $]b, +\infty[$. Puis, toute union d'intervalles de la forme $] - \infty, a[$, $]b, +\infty[$ ou $]a, b[$ est union dénombrable d'intervalles semi-ouverts (deux à deux disjoints). Donc on sait définir la mesure de tous les éléments de \mathcal{C} et donc en particulier, λ est définie sur l'algèbre engendrée par les intervalles semi-ouverts.

[qu. 4] On applique ensuite le théorème de prolongement.

Correction Exercice 59 Par Fatou,

$$\int X d\mu = \int \liminf_n X_n d\mu \leq \liminf_n \int X_n d\mu$$

Or pour tout n , $\int X_n d\mu \leq M$ donc $\liminf_n \int X_n d\mu \leq M$ ³, ce qui conclut la démonstration.

Correction Exercice 62

[qu. 1a] f est mesurable; c'est donc une densité ssi $f \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 1$. Ce qui entraîne $\alpha \geq 0$ et $\int_{x_{\min}}^{\infty} \alpha x^{-1-r} dx = 1$. On obtient donc $\alpha = r x_{\min}^r$.

[qu. 1b] $F(t) = \mathbb{P}(] \infty, t]) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$. Comme $f(t) = 0$ pour tout $t \leq x_{\min}$, $F(t) = 0$ pour $t \leq x_{\min}$. Soit $t > x_{\min}$,

$$F(t) = \alpha \int_{x_{\min}}^t x^{-(1+r)} dx = 1 - \left(\frac{x_{\min}}{t} \right)^r.$$

On peut vérifier que $0 \leq F \leq 1$, F est croissante, $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} F = 1$.

[qu. 1c] $\mathbb{P}([0, 4x_{\min}[) = F(4x_{\min}^-) - F(0) + \mathbb{P}(\{0\})$. Comme la densité est nulle sur $] - \infty, x_{\min}[$, $\mathbb{P}(\{0\}) = 0$. De plus, $F(0) = 0$ et F est continue en $4x_{\min}$. Par suite, $\mathbb{P}([0, 4x_{\min}[) = 1 - (1/4)^r$.

[qu. 1d] L'application $g_p : x \mapsto |x|^p$ est \mathbb{P} -intégrable ssi

$$\int g_p d\mathbb{P} < +\infty \quad \text{i.e.} \quad \int |x|^p f(x) dx < +\infty.$$

On a

$$\int |x|^p f(x) dx = \alpha \int_{x_{\min}}^{+\infty} \frac{x^p}{x^{1+r}} dx$$

qui est finie ssi $1 + r - p > 1$ c-à-d $p < r$.

[qu. 2a] Y est une v.a. réelle comme le minimum de deux fonctions mesurables (cf. cours).

OU : $t \mapsto \min(t, a)$ est continue et X est une v.a. donc Y est la composée de deux v.a. et c'est donc une v.a.

[qu. 2b]

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = a) &= \mathbb{P}(Y = a, X = \min(X, a)) + \mathbb{P}(Y = a, a = \min(X, a)) \\ &= \mathbb{P}(X = a, X \leq a) + \mathbb{P}(a = a, X \geq a) = \mathbb{P}(X \geq a) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X < a) = 1 - F(a^-) = 1 - F(a), \end{aligned}$$

³en effet, $\liminf_n u_n = \sup_n \inf_{k \geq n} u_k$; si $(u_n, n \geq 0)$ est majorée par M alors

$$[u_k \leq M] \Rightarrow \left[\inf_{k \geq n} u_k \leq M \right] \Rightarrow \left[\sup_n \inf_{k \geq n} u_k \leq M \right]$$

puisque F est continue.

$\mathbb{P}(Y > a) = 0$ car par définition, $Y \leq a$ (avec probabilité 1).

Soit $y < a$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y < y) &= \mathbb{P}(Y < y, X = \min(X, a)) + \mathbb{P}(Y < y, a = \min(X, a)) \\ &= \mathbb{P}(X < y, X \leq a) + \mathbb{P}(a < y, X \geq a) = \mathbb{P}(X < y, X \leq a),\end{aligned}$$

la dernière égalité se justifiant par le fait que $y < a$ par définition. Or, comme $y < a$, $\{X < y\} \subset \{X \leq a\}$ ce qui entraîne que $\{X < y, X \leq a\} = \{X < y\}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(X < y) = F(y^-) = F(y),$$

où l'on a utilisé la continuité de F .

[qu. 2c] La fonction de répartition est $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t)$. De la question précédente, on déduit

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq x_{\min}, \\ 1 - \left(\frac{x_{\min}}{t}\right)^r & x_{\min} \leq t < a \\ 1 & t \geq a. \end{cases}$$

[qu. 2d] F_Y est dérivable sur $] -\infty, a[$ (par morceaux), et sur $]a, +\infty[$; et présente un saut de discontinuité en $t = a$. Sa loi admet donc une densité par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur tous les intervalles où elle est dérivable (et on a $f = F'_Y$); et aussi une composante de Dirac au point a . Ainsi, sa loi s'écrit

$$0 \mathbb{I}_{]-\infty, x_{\min}[} + r x_{\min}^r y^{-r-1} \mathbb{I}_{]x_{\min}, a[} + 0 \mathbb{I}_{]a, +\infty[} + \left(\frac{x_{\min}}{a}\right)^r \delta_a(dy) = r x_{\min}^r y^{-r-1} \mathbb{I}_{]x_{\min}, a[} + \left(\frac{x_{\min}}{a}\right)^r \delta_a(dy).$$

La taille du saut en a est $\mathbb{P}(Y = a)$.

[qu. 2e] Y est une v.a. bornée puisque l'on a $|Y| \leq a$. Donc elle possède tous les moments : pour tout $p \geq 0$, $\mathbb{E}[Y^p] < +\infty$ soit encore

$$\int g_p d\mathbb{P}_Y = \mathbb{E}[Y^p] < +\infty.$$

Correction Exercice 60 On pose $J(t) = \int f(x, t) d\mu(x)$.

[qu. 2] Montrons que pour toute suite $\{h_n, n \geq 1\}$ telle que $\lim_n h_n = 0$, $\lim_n [J(t + h_n) - J(t)]/h_n$ existe et calculons sa valeur.

$$\lim_n \frac{J(t + h_n) - J(t)}{h_n} = \lim_n \int \frac{f(x, t + h_n) - f(x, t)}{h_n} d\mu(x) =$$

Si le théorème de convergence dominée s'applique, on a alors

$$\lim_n \frac{J(t + h_n) - J(t)}{h_n} = \int \partial_t f(x, t) \mu(dx).$$

Vérifions les conditions du théorème. Par le théorème des valeurs intermédiaires⁴, pour tout n , il existe c_n dans l'intervalle de bornes t et $t + h_n$ tel que $[f(x, t + h_n) - f(x, t)]/h_n = \partial f(x, c_n)$. On peut supposer comme dans la question précédente que l'intervalle de bornes t et $t + h_n$ est dans I de sorte que $c_n \in I$. Par suite

$$\left| \frac{f(x, t + h_n) - f(x, t)}{h_n} \right| = |\partial_t f(x, c_n)| \leq g(x)$$

et g est μ -intégrable. Le théorème de convergence dominée s'applique donc.

Correction Exercice 64 [qu. 2] Il faut $\int f(x)dx = 1$; on obtient donc $c = 2/\pi$. X ne prend que des valeurs positives ou nulles et $\mathbb{P}(X = 0) = 0$. On procède par identification : soit h positive mesurable alors en faisant le changement de variable $y = 1/x$:

$$\mathbb{E}[h(Y)] = c \int_0^\infty h(1/x) \frac{1}{1+x^2} dx = c \int_0^{+\infty} h(y) \frac{y^2}{1+y^2} \frac{dy}{y^2} = c \int_0^{+\infty} h(y) \frac{1}{1+y^2} dy.$$

Ainsi, Y suit une loi de Cauchy sur \mathbb{R}^+ .

[qu. 3a] X^2 ne prend que des valeurs positives et comme X est à valeur dans \mathbb{R}^+ , X^2 peut prendre toutes les valeurs de \mathbb{R}^+ . On propose deux méthodes de résolution, l'une consistant à déterminer la fonction de répartition, et l'autre à déterminer la loi de X^2 par une méthode d'identification.

• MÉTHODE 1 On devrait donc trouver $F_{X^2}(t) = 0$ pour $t < 0$. Soit $t \in \mathbb{R}$. On calcule la fonction de répartition de X^2 :

$$F_{X^2}(t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \mathbb{P}(X \leq \sqrt{t}) & t \geq 0. \end{cases}$$

Dans le cas $t \geq 0$, on a $F_{X^2}(t) = F_X(\sqrt{t}) = 1 - \exp(-\lambda\sqrt{t})$. Ainsi X^2 est une v.a. de fonction caractéristique

$$F_{X^2}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda\sqrt{t}) & t \geq 0. \end{cases}$$

On retrouve bien que $F_{X^2}(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

• MÉTHODE 2 On peut aussi chercher la loi de X^2 (on doit trouver qu'elle est ne charge par \mathbb{R}^- puisque X^2 ne prend que des valeurs positives). Soit h une fonction mesurable positive. On pose $Z = X^2$. On a d'une part $\mathbb{E}[h(Z)] = \int h(z) \mathbb{P}_Z(dz)$ et d'autre part,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(Z)] &= \mathbb{E}[h(X^2)] = \int h(x^2) f_X(x) dx \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} h(x^2) \exp(-\lambda x) dx = \lambda \int_0^{+\infty} h(z) \exp(-\lambda\sqrt{z}) \frac{dz}{2\sqrt{z}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int h(z) d\mathbb{P}_Z(z) = \lambda \int_0^{+\infty} h(z) \exp(-\lambda\sqrt{z}) \frac{dz}{2\sqrt{z}}$$

⁴soit f à valeur dans \mathbb{R} , continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $[f(b) - f(a)]/(b - a) = f'(c)$

et comme cette relation est vraie pour toutes les fonctions h positives mesurables, on peut **identifier** la loi de Z : elle possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, donnée par

$$f_Z(z) = \lambda \exp(-\lambda\sqrt{z}) \frac{1}{2\sqrt{z}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(z).$$

On peut vérifier que cette fonction f_Z est bien la dérivée de F_{X^2} trouvée par l'autre méthode de résolution.

[qu. 3b] Déterminons sa fonction de répartition. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq t) &= \mathbb{P}(Y \leq t, X \leq 1) + \mathbb{P}(Y \leq t, X > 1) = \mathbb{P}(X \leq t, X \leq 1) = \mathbb{P}(2X \leq t, X > 1) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \min(1, t)) + \mathbb{P}(1 < X \leq t/2). \end{aligned}$$

Pour la première quantité, on distingue le cas $\min(1, t) = 1$ et $\min(1, t) = t$ ce qui revient à distinguer les cas $t \geq 1$ et $t < 1$. On obtient donc

$$\mathbb{P}(X \leq \min(1, t)) = \begin{cases} F_X(t) & \text{si } t \leq 1 \\ F_X(1) & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Pour la seconde quantité, il faut distinguer les cas $t > 2$ et $t \leq 2$:

$$\mathbb{P}(1 < X \leq t/2) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) = 0 & \text{si } t \leq 2 \\ F_X(t/2) - F_X(1) & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

Ainsi, en remplaçant F_X par sa valeur on obtient

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 - \exp(-\lambda) & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ 1 - \exp(-\lambda t/2) & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

On peut vérifier que la fonction F_Y est croissante, tend vers 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$. Dans cet exemple, elle est continue et dérivable par morceaux, donc Y possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda \exp(-\lambda t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ 0.5 \lambda \exp(-\lambda t/2) & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

Correction Exercice 65 [qu. 1] Il fonctionne tant que au moins un des composants fonctionne, donc $T = \sup_{i \leq n} T_i$. On a, en utilisant l'indépendance des v.a. T_i :

$$\mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}\left(\sup_{i \leq n} T_i \leq t\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{T_i \leq t\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(T_i \leq t) = \prod_{i=1}^n (1 - \exp(-\lambda_i t)).$$

[qu. 2] Il fonctionne jusqu'à ce que un défaille donc $T = \min_{i \leq n} T_i$. On a, en utilisant l'indépendance des v.a. T_i :

$$\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}\left(\min_{i \leq n} T_i > t\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{T_i > t\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(T_i > t) = \prod_{i=1}^n \exp(-\lambda_i t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i t\right).$$

Ainsi $\mathbb{P}(T \leq t) = 1 - \exp(-\sum_{i=1}^n \lambda_i t)$: on reconnaît une loi exponentielle de paramètre $\sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Correction Exercice 67

[qu. 1] Si $0 \leq U \leq V \leq 2\pi$ alors la part qui contient l'origine (la cerise) est de taille $2\pi - (V - U)$. Si $0 \leq V \leq U \leq 2\pi$ alors la taille est $2\pi - (U - V)$. Donc la taille de la part est

$$2\pi - |U - V|.$$

[qu. 2] • Pour calculer son espérance, il faut la loi du couple (U, V) . Comme les v.a. sont indépendantes, la loi du couple est égale au produit des lois marginales donc la loi du couple a pour densité

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(u) \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(v)$$

L'espérance de la part est donc

$$\mathbb{E}[2\pi - |U - V|] = 2\pi - \mathbb{E}[|U - V|] = 2\pi - \mathbb{E}[(U - V) \mathbb{1}_{U-V \geq 0}] - \mathbb{E}[(V - U) \mathbb{1}_{U-V < 0}].$$

Calculons la première espérance

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(U - V) \mathbb{1}_{U-V \geq 0}] &= \int_{\mathbb{R}^2} (u - v) \mathbb{1}_{u-v \geq 0} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(u) \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(v) du dv \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{[0, 2\pi]^2} (u - v) \mathbb{1}_{u \geq v} du dv = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^u (u - v) dv du \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} \frac{u^2}{2} du = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Par symétrie, la seconde espérance vaut aussi $\pi/3$. Donc

$$\mathbb{E}[2\pi - |U - V|] = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

• On cherche $\mathbb{P}(2\pi - |U - V| \geq \pi)$, soit encore $\mathbb{P}(\pi \geq |U - V|)$. En utilisant un argument de symétrie on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\pi \geq |U - V|) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\pi \geq |U - V|}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\pi \geq U - V, U \geq V}] + \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\pi \geq V - U, V \geq U}] = 2\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\pi \geq U - V, U \geq V}] \\ &= 2 \int \mathbb{1}_{\pi \geq u - v, u \geq v} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(u) \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(v) du dv \\ &= 2 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} dv \int_v^{(2\pi) \wedge (v + \pi)} du \\ &= 2 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^\pi dv \int_v^{v + \pi} du + 2 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_\pi^{2\pi} dv \int_v^{2\pi} du \\ &= 2 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \left(\pi^2 + \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

[qu. 3] Le gourmand espère avoir la part la plus grosse. Or la probabilité que cette part soit celle qui contienne la cerise est $3/4$. Donc il doit répondre qu'il préfère prendre la part avec la cerise.

Paradoxe de l'autobus On modélise la durée qui sépare l'arrivée de deux autobus par une v.a. τ_k de loi exponentielle de paramètre λ . On pose $T_0 = 0$ et on définit itérativement

$$T_{k+1} = T_k + \tau_{k+1} = \tau_1 + \cdots + \tau_{k+1}$$

qui est la suite des instants d'arrivée des autobus. On suppose les v.a. $\{\tau_k, k \geq 1\}$ indépendantes.

Un voyageur se présente à l'arrêt d'autobus à l'instant t : la durée d'attente du prochain autobus est

$$U_t := \inf\{T_n, T_n \geq t\} - t$$

et le temps qui s'est écoulé depuis le dernier passage d'autobus est

$$V_t := t - \sup\{T_n, T_n < t\}.$$

On peut montrer le résultat suivant :

- (1) les variables (U_t, V_t) sont indépendantes.
- (2) la v.a. U_t suit une loi exponentielle de paramètre λ . Cela entraîne que la durée d'attente du prochain autobus est en moyenne de $1/\lambda$ (alors que l'on pourrait penser que c'est $1/(2\lambda)$)
- (3) la v.a. V_t suit une loi exponentielle tronquée à t :

$$F_{V_t}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \exp(-\lambda x) & \text{si } 0 \leq x < t \\ 1 & \text{si } x \geq t \end{cases}$$

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, V_t converge en loi vers une v.a. exponentielle de paramètre λ . De plus, pour t grand, $\mathbb{E}[V_t] \sim 1/\lambda$. Donc pour t grand, la durée moyenne de l'intervalle qui contient t est $\mathbb{E}[U_t + V_t] \sim 2/\lambda$.

Le paradoxe est donc le suivant : alors que l'intervalle moyen entre deux autobus est en moyenne d'une durée de $1/\lambda$, l'intervalle moyen entre deux arrivées pour un usager est de $2/\lambda$. Cela s'explique par le fait qu'un usager a plus de chances d'arriver à l'intérieur d'un intervalle de grande taille qu'à l'intérieur d'un intervalle de petite taille.

Correction Exercice 69

[qu. 1] Soit $A \in \mathcal{A}_i$. Alors $X_i^{-1}(A_i) = \Omega \times \cdots \times \Omega \times A_i \times \Omega \times \cdots \times \Omega$. Cette image réciproque est bien dans $\otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i$ donc X_i est mesurable de $(\Omega, \otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i)$ dans $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$.

[qu. 2] Soient $A_k \in \mathcal{A}_k$. Alors

$$A_1 \times \cdots \times A_d = \bigcap_{i=1}^d (\Omega \times \cdots \times \Omega \times A_i \times \Omega \times \cdots \times \Omega) = \bigcap_{i=1}^d X_i^{-1}(A_i)$$

Puisque X_i est mesurable de (Ω, \mathcal{A}) dans $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, il vient que $X_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{A}$ et donc $\bigcap_i X_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{A}$ puisque \mathcal{A} est une tribu. Ainsi, les éléments qui engendrent la tribu $\otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i$ sont des éléments de la tribu \mathcal{A} . Par définition de la tribu engendrée (plus petite tribu qui \cdots), on a $\otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$.

Correction Exercice 70 Observons la décomposition

$$f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^2} - \frac{2y}{(x+y)^3} = \frac{2x}{(x+y)^3} - \frac{1}{(x+y)^2}. \quad (3)$$

[qu. 1] En utilisant (3), on voit que pour tout $x \in (0, 1]$,

$$\int_0^1 f(x, y) dy = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Donc, $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = 1/2$.

[qu. 2] On exploite la symétrie dans la décomposition (3) - ou on refait les calculs ... - pour montrer que $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = -1/2$.

[qu. 3] Le calcul de $\int |f(x, y)| dx dy$ montre que cette quantité vaut $+\infty$.

[qu. 4] f est du signe de $x - y$ donc elle n'est pas nécessairement positive. Par suite, Fubini s'applique si $\int |f(x, y)| dx dy < +\infty$. Cette condition n'étant pas vérifiée, Fubini ne s'applique pas. C'est bien ce que nous avons constaté: nous avons vérifié explicitement que l'ordre dans lequel on intégrait en chacune des deux variables avait une influence sur la valeur de l'intégrale. La fonction f n'est donc pas intégrable.

Correction Exercice 74 La loi jointe du couple (X, Y) est donnée par la densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \exp(-x) \exp(-y) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+}(x, y).$$

Observons que cette densité s'exprime comme le produit d'une fonction de la variable x et d'une fonction de la variable y : donc les v.a. X et Y sont indépendantes, et la densité de chacune est de la forme

$$f_X(x) = C_1 \exp(-x) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \quad f_Y(y) = C_2 \exp(-y) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(y),$$

avec $C_1 C_2 = 1$. On détermine la valeur des constantes C_i en utilisant le fait que $\int f_X(x) dx = 1$ et on obtient $C_1 = C_2 = 1$.

[qu. 1] Le ratio X/Y est défini ssi $Y \neq 0$. Or, $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$ car Y est une v.a. à densité par rapport à Lebesgue donc

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{0\}}(Y)] = \int \mathbb{I}_{\{0\}}(y) f_Y(y) dy = 0$$

en utilisant l'exercice 55.

Par suite, le ratio X/Y est défini partout sauf sur un ensemble de mesure nulle: il est donc défini presque-sûrement (p.s.), et on peut écrire " X/Y " sans soucis ...

Par définition, $X \geq 0$ et $Y \geq 0$ p.s. (ce sont des v.a. positives) donc $X/Y \geq 0$. Ainsi, $\mathbb{P}(X/Y \leq t) = 0$ pour tout $t < 0$. Soit $t > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X/Y \leq t) &= \mathbb{P}(X/Y \leq t, Y > 0) + \mathbb{P}(X/Y \leq t, Y \leq 0) = \mathbb{P}(X/Y \leq t, Y > 0) \\ &= \mathbb{P}(X \leq tY, Y > 0) = \mathbb{P}(X \leq tY) = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{(x,y) : x \leq yt\}}(X, Y)] \\ &= \int \mathbb{I}_{\{(x,y) : x \leq yt\}}(x, y) f_{(X,Y)}(x, y) dx dy = \int \mathbb{I}_{\{(x,y), x \leq yt\}}(x, y) f_{(X,Y)}(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{yt} \exp(-x) dx \right) \exp(-y) dy = 1 - \frac{1}{t+1}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\mathbb{P}(Y > 0) = 1 = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 0)$; et utilisé le théorème de Fubini (tout est positif donc pas de conditions à vérifier pour l'appliquer). Nous avons donc établi

$$F_{X/Y}(t) = \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t).$$

On peut vérifier que $F_{X/Y}$ a toutes les propriétés d'une fonction de répartition : la fonction est continue à droite (et même continue ici), croissante, vaut 0 en $-\infty$ et tend vers 1 en $+\infty$.

[qu. 2] $F_{X/Y}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: la densité s'obtient par dérivation et on a

$$f_{X/Y}(t) = 0 \quad t < 0$$

et

$$f_{X/Y}(t) = \frac{1}{(t+1)^2} \quad t > 0.$$

En $t = 0$, on peut donner n'importe quelle valeur à $f_{X/Y}$ sans que cela change la probabilité associée.

Donc par exemple,

$$f_{X/Y}(t) = \frac{1}{(t+1)^2} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t).$$

Correction Exercice 76 [qu. 4] Comme $D(X)$ est une matrice symétrique à coefficients réels, il existe une matrice Q orthogonale et une matrice Δ diagonale telles que

$$D(X) = Q\Delta Q^T.$$

De plus, $D(X)$ est semi-définie positive donc ses valeurs propres sont positives ou nulles : si $D(X)$ est de rang $r < d$, alors Δ possède r éléments diagonaux strictement positifs (disons les r premiers éléments diagonaux) et $(d-r)$ éléments diagonaux nuls. Donc: l'espace image de $D(X)$ est l'espace engendré par les r premières colonnes de Q .

Notons u_{r+1}, \dots, u_d les $(d-r)$ dernières colonnes de Q : ces vecteurs sont orthogonaux aux r premières colonnes de Q donc, orthogonaux à l'image de $D(X)$. Par suite, pour chacun de ces $(d-r)$ vecteurs,

$$\mathbb{E} [\{u_k^T (X - \mathbb{E}[X])\}^2] = u_k^T \mathbb{E} [(X - \mathbb{E}[X]) (X - \mathbb{E}[X])^T] u_k = u_k^T D(X) u_k = 0$$

puisque $D(X)u_k \in \text{Im}(D(X))$ et u_k est orthogonal à cet espace image. Dire que l'espérance d'une v.a. positive est nulle, entraîne que cette v.a. vaut zero avec probabilité 1 donc $\mathbb{P}(u_k^T \{X - \mathbb{E}[X]\} = 0) = 1$.

Ainsi $X - \mathbb{E}[X]$ est (avec proba 1) orthogonal à l'espace engendré par les vecteurs u_{r+1}, \dots, u_d : il est donc avec proba 1, dans l'espace $\text{Im}(D(X))$.

Correction Exercice 77 [qu. 1] On développe l'expression et on a

$$\mathbb{E}\{[Y - (aX + b)]^2\} = \mathbb{E}[Y^2] + a^2\mathbb{E}[X^2] + b^2 + 2ab\mathbb{E}[X] - 2a\mathbb{E}[XY] - 2b\mathbb{E}[Y].$$

Cette expression est un polynôme en (a, b) qui de plus, possède un unique minimum. On dérive cette expression par rapport à a, b pour trouver ce minimum: on obtien

$$a_\star = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} \quad b_\star = \frac{\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[XY]\mathbb{E}[X]}{\text{Var}(X)}.$$

Remarques :

- on est en train de chercher la meilleure approximation de Y , par une fonction affine de X ; approximation au sens quadratique (i.e. on veut minimiser le carré moyen de l'erreur d'approximation $Y - (aX + b)$).
- on observe que la droite est d'équation $a_\star X + b_\star$ et en particulier : la pente de cette droite est liée à la covariance $\text{Cov}(X, Y)$ (et du signe de cette covariance). Ainsi, si $\text{Cov}(X, Y) > 0$ alors la droite est croissante: quand les variables sont positivement corrélées, l'augmentation de l'une entraîne l'augmentation de l'autre. Interprétation analogue lorsque $\text{Cov}(X, Y) < 0$.
- Si X et Y sont indépendantes, $\text{Cov}(X, Y) = 0$ et l'on voit que la meilleure approximation de Y par une fonction affine est \dots la droite d'équation $y = b_\star$.
- Enfin, la droite d'équation $y = a_\star x + b_\star$ passe par le point de coordonnées $(\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y])$.

[qu. 2a)] Par application de Hölder,

$$\begin{aligned} |\text{Cov}(X, Y)| &\leq \mathbb{E}[|\{X - \mathbb{E}[X]\} \{Y - \mathbb{E}[Y]\}|] \\ &\leq (\mathbb{E}\{\{X - \mathbb{E}[X]\}^2\})^{1/2} (\mathbb{E}\{\{Y - \mathbb{E}[Y]\}^2\})^{1/2} = \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)} \end{aligned}$$

Donc $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.

[qu. 2b)] Par définition de la variance: $\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X)$ et $\text{Var}(cY + d) = c^2\text{Var}(Y)$; par définition de la covariance,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(aX + b, cY + d) &= \mathbb{E}\{\{aX + b - \mathbb{E}[aX + b]\} \{cY + d - \mathbb{E}[cY + d]\}\} \\ &= \mathbb{E}[ac \{X - \mathbb{E}[X]\} \{Y - \mathbb{E}[Y]\}] = ac \text{Cov}(X, Y). \end{aligned}$$

Donc $\rho(aX + b, cY + d) = ac/|ac| \rho(X, Y) = \text{sign}(ac)\rho(X, Y)$.

[qu. 2c)] Si $Z = aX + b$ alors $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, aX + b) = a\text{Cov}(X, X) = a\text{Var}(X)$. De plus, $\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X)$. Donc $\rho(X, aX + b) = \text{sign}(a)$.

[qu. 2d)] On a

$$\text{Var}(Z) = \frac{\text{Var}(Y)}{\text{Var}(Y)} + \frac{\rho(X, Y)^2}{\text{Var}(X)} \text{Var}(X) - 2 \frac{\rho(X, Y) \text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

puisque pour tout réel, $\text{Var}(aY) = a^2\text{Var}(Y)$ et que $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$. Ainsi

$$\text{Var}(Z) = 1 + \rho(X, Y)^2 - 2\rho(X, Y)^2 = 1 - \rho(X, Y)^2.$$

Si $|\rho(X, Y)| = 1$, $\text{Var}(Z) = 0$ ce qui signifie que Z est une v.a. constante : il existe c tel que $Z = c$ avec probabilité 1. Donc,

$$\frac{Y}{\sqrt{\text{Var}(Y)}} - \frac{\rho(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}}X = c,$$

ce qui montre que Y est une fonction affine de X .

On vient d'établir que

- la corrélation est un nombre dans l'intervalle $[-1, 1]$.
- la corrélation est égale à 1 ou -1 si et seulement si les v.a. X et Y sont une fonction affine l'une de l'autre : il existe a, b tels que $Y = aX + b$

Rappel Préliminaire:

Deux densités (par rapport à la mesure de Lebesgue) qui sont égales partout sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, définissent la même loi de probabilité. En conséquence, on peut modifier une densité sur un ensemble négligeable (pour la mesure de Lebesgue) sans que cela ne modifie la loi associée. Par exemple : la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^2 est la mesure qui à tout ensemble associe sa surface. Par conséquent, un point est de mesure nulle; une droite (demi-droite/segment) est de mesure nulle.

Dans la correction des exercices, on pourra donc modifier les domaines d'intégration de certaines intégrales sans que cela ne modifie l'intégrale (tant que la modification ne porte que sur des ensembles négligeables).

Correction Exercice 80 [qu. 1] X et Y sont indépendantes, donc la loi du couple (X, Y) est la densité égale au produit des densités marginales

$$f_{(X, Y)}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \mathbb{1}_{[0, 1] \times [0, 1]}(x, y).$$

[qu. 2] On a $(U, V) = \phi(X, Y)$ avec

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \phi(x, y) = \begin{bmatrix} \sqrt{-2 \ln x} \cos(2\pi y) \\ \sqrt{-2 \ln x} \sin(2\pi y) \end{bmatrix}$$

Cette fonction est définie ssi $0 < x \leq 1$. Il s'agit d'un changement de variable en coordonnées polaires:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} r = \sqrt{-2 \ln x} \\ \theta = 2\pi y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

et donc, c'est un C^1 -difféomorphisme de $]0, 1[\times]0, 1[$ dans $\Delta := \mathbb{R}^2 \setminus [0, x)$.

Calculons le jacobien :

$$[J_\phi](x, y) = \begin{bmatrix} \frac{-\cos(2\pi y)}{x\sqrt{-2\ln x}} & -2\pi\sqrt{-2\ln x}\sin(2\pi y) \\ \frac{-\sin(2\pi y)}{2x\sqrt{-2\ln x}} & 2\pi\sqrt{-2\ln x}\cos(2\pi y) \end{bmatrix}$$

donc $|\det(J_\phi(x, y))| = 2\pi/|x|$. De plus, $x = \exp(-0.5(u^2 + v^2))$. Ainsi,

$$|\det(J_\phi(\phi^{-1}(u, v)))| = 2\pi \exp(0.5(u^2 + v^2)).$$

Pour toute fonction g positive mesurable, on a en utilisant le rappel préliminaire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(U, V)] &= \mathbb{E}[g \circ \phi(X, Y)] = \int g(\phi(x, y)) f_{(X, Y)}(x, y) dx dy \\ &= \int g(\phi(x, y)) f_X(x) f_Y(y) dx dy = \int \mathbb{1}_{]0, 1[}(x) \mathbb{1}_{]0, 1[}(y) g(\phi(x, y)) dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus [0, x)}(u, v) g(u, v) \exp(-0.5(u^2 + v^2)) dudv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(u, v) \exp(-0.5(u^2 + v^2)) dudv. \end{aligned}$$

On a utilisé la relation $\mathbb{1}_{]0, 1[\times]0, 1[}(\phi^{-1}(u, v)) = \mathbb{1}_\Delta(u, v)$. En effet

$$\mathbb{1}_{]0, 1[\times]0, 1[}(\phi^{-1}(u, v)) = 1 \Leftrightarrow \phi^{-1}(u, v) \in]0, 1[\times]0, 1[\Leftrightarrow (u, v) \in \phi(]0, 1[\times]0, 1[) = \Delta \Leftrightarrow \mathbb{1}_\Delta(u, v) = 1.$$

On reconnaît la loi de (U, V) : c'est une loi gaussienne bi-dimensionnelle de paramètres $0_{\mathbb{R}^2}$ et Id_2 (resp. le vecteur nul de \mathbb{R}^2 et la matrice identité de taille 2×2).

[qu. 3] On a

$$f_{(U, V)}(u, v) = \frac{1}{2\pi} \exp(-0.5(u^2 + v^2)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-0.5u^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-0.5v^2)$$

qui est le produit de deux densités connues sur \mathbb{R} :

$$U \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad V \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

De plus, U et V sont indépendantes puisque la loi jointe est égale au produit des marginales.

Cette méthode est la méthode de Box-Muller pour simuler des v.a. indépendantes centrées réduites, à partir de v.a. uniformes sur $[0, 1]$.

Correction Exercice 81 [qu. 1] Soit g une application mesurable positive sur \mathbb{R}^2 : on a

$$\mathbb{E}[g(U, V)] = \int g(u, v) f_{(U, V)}(u, v) dudv$$

d'une part, et d'autre part,

$$\mathbb{E}[g(U, V)] = \mathbb{E}[g(\phi(X, Y))] = \int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2\right) f_{(X, Y)}(x, y) dx dy.$$

Or, X et Y sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$, donc on a

$$f_{(X, Y)}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \exp(-0.5(x^2 + y^2)).$$

On aimerait faire le changement de variable suivant :

$$(u, v) = \phi(x, y) = \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}; x^2 + y^2 \right),$$

mais celui-ci ne peut pas être bijectif de \mathbb{R}^2 dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$: par exemple, les points (x, y) , $(-x, -y)$ ou encore $(-x, y)$ et $(x, -y)$ ont même image. Donc on va se ramener à quatre domaines sur lesquels ϕ peut être bijective. On écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(U, V)] &= \int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2\right) \frac{1}{2\pi} \exp(-0.5(x^2 + y^2)) \, dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} g\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2\right) \exp(-0.5(x^2 + y^2)) \, dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-} g\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2\right) \exp(-0.5(x^2 + y^2)) \, dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+} g\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2\right) \exp(-0.5(x^2 + y^2)) \, dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-} g\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2\right) \exp(-0.5(x^2 + y^2)) \, dx dy \\ &= \frac{4}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} g\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2\right) \exp(-0.5(x^2 + y^2)) \, dx dy \end{aligned}$$

en utilisant des arguments de parité dans la dernière égalité. On peut maintenant définir le changement de variable. On pose

$$(u, v) = \phi(x, y) = \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}; x^2 + y^2 \right),$$

avec $\phi : \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ \rightarrow]0, 1[\times \mathbb{R}_*^+$ et

$$\phi^{-1}(u, v) = \left(\sqrt{uv}; \sqrt{v(1-u)} \right).$$

Le jacobien de ϕ^{-1} est donné par

$$|\det J_{\phi^{-1}}(u, v)| = \frac{|v|}{4\sqrt{uv^2(1-u)}} = \frac{1}{4\sqrt{u(1-u)}},$$

qui est bien défini puisque $u \in]0, 1[$. Par suite,

$$\begin{aligned} f_{(U, V)}(u, v) &= 4f_{(X, Y)}(x, y) \left(\sqrt{uv}, \sqrt{v(1-u)} \right) \frac{1}{4\sqrt{u(1-u)}} \mathbb{I}_{]0, 1[\times \mathbb{R}_*^+}(u, v) \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp(-0.5v) u^{-1/2} (1-u)^{-1/2} \mathbb{I}_{]0, 1[\times \mathbb{R}_*^+}(u, v). \end{aligned}$$

[qu. 2] La densité marginale de U est donnée par

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int f_{(U, V)}(u, v) dv = \frac{1}{2\pi} \mathbb{I}_{]0, 1[}(u) u^{-1/2} (1-u)^{-1/2} \int \exp(-0.5v) \mathbb{I}_{\mathbb{R}_*^+}(v) dv \\ &= \frac{1}{\pi} u^{-1/2} (1-u)^{-1/2} \mathbb{I}_{]0, 1[}(u); \end{aligned}$$

(on reconnaît une loi Beta de paramètres $(1/2, 1/2)$ cf. Exercice 83). De même, la loi de V est donnée par

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int f_{(U,V)}(u, v) du = \frac{1}{2} \exp(-0.5v) \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^*}(v) \left(\int \frac{1}{\pi} u^{-1/2} (1-u)^{-1/2} \mathbb{I}_{]0,1[}(u) du \right) \\ &= \frac{1}{2} \exp(-0.5v) \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^*}(v) \int f_U(u) du = \frac{1}{2} \exp(-0.5v) \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^*}(v), \end{aligned}$$

en utilisant le fait que f_U est une densité dont son intégrale vaut 1. Comme modifier une densité sur un ensemble négligeable ne change pas la loi, on peut écrire

$$f_V(v) = \frac{1}{2} \exp(-0.5v) \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(v).$$

[qu. 3] $Z = 1/U - 1$. Caractérisons la loi de Z en donnant sa densité. Pour ce faire, on va commencer par déterminer la fonction de répartition de Z en fonction de celle de U , puis on obtiendra la densité par dérivation.

Remarquons que $0 < U < 1$ donc $Z > 0$. Donc pour tout $t \leq 0$, $F_Z(t) = 0$ et $f_Z(t) = 0$ pour $t \leq 0$. Soit $t > 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \leq t) &= \mathbb{P}(1/U \leq t+1) = \mathbb{P}(1/(t+1) \leq U) = 1 - \mathbb{P}(U < 1/(t+1)) \\ &= 1 - \mathbb{P}(U \leq 1/(t+1)) = 1 - F_U(1/(t+1)). \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que (a) U était positive p.s. (sa densité est nulle sur \mathbb{R}^-) donc $1/U \leq t+1$ entraîne $U \geq 1/(t+1)$; et (b) U était une v.a. à densité, donc $\mathbb{P}(U = t+1) = 0$. Par suite, en observant que $t > 0$ entraîne $0 < 1/(t+1) < 1$, on a

$$f_Z(t) = - (F_U(1/(t+1)))' = - \left(\frac{-1}{(t+1)^2} \right) f_U \left(\frac{1}{t+1} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{t+1} \mathbb{I}_{]0,1[}(1/(t+1)).$$

Donc la loi de Z est donnée par

$$f_Z(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{t+1} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(t).$$

Correction Exercice 84 [qu. 1] On pose

$$(u, v) = \phi(x, y) = \left(\frac{\sqrt{nx}}{\sqrt{y}}; \sqrt{y} \right),$$

avec $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Vérifions que c'est bijectif : on a l'injectivité, il faut vérifier la surjectivité. Soit $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$(u, v) = \left(\frac{\sqrt{nx}}{\sqrt{y}}; \sqrt{y} \right) \iff (uv, v^2) = (\sqrt{nx}, y) \iff (x, y) = (uv/\sqrt{n}, v^2).$$

On veut $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$: il n'y a pas de conditions supplémentaires sur (u, v) pour garantir cela. Ainsi ϕ est bijective. Elle est aussi de classe C^1 .

On a

$$(x, y) = \phi^{-1}(u, v) = \left(\frac{uv}{\sqrt{n}}; v^2 \right).$$

de sorte que $|\det J_\phi(\phi^{-1}(u, v))| = 2v^2/\sqrt{n}$. En notant que l'indépendance des v.a. X et Y entraîne

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-0.5x^2) \frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \exp(-0.5y) y^{n/2-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y),$$

on obtient par la formule du changement de variable

$$f_{(U,V)}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \frac{(1/2)^{n/2-1/2}}{\Gamma(n/2)} v^n \exp(-0.5u^2v^2/n) \exp(-0.5v^2) \mathbb{1}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+}(u, v).$$

[qu. 2] Cette densité n'est pas sous forme produit : les v.a. U et V ne sont pas indépendantes.

[qu. 3] La densité de U est

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int f_{(U,V)}(u, v) dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \frac{(1/2)^{n/2-1/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} v^n \exp(-0.5v^2) \exp(-0.5u^2v^2/n) dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \frac{(1/2)^{n/2-1/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} v^n \exp(-0.5(1 + u^2/n)v^2) dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \frac{(1/2)^{n/2+1/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} z^{(n-1)/2} \exp(-0.5(1 + u^2/n)z) dz \end{aligned}$$

Dans l'intégrale, on reconnaît la densité d'une loi Gamma à une constante près, donc

$$\int_0^{+\infty} z^{(n-1)/2} \exp(-0.5(1 + u^2/n)z) dz = \Gamma((n+1)/2) \left(\frac{1 + u^2/n}{2} \right)^{-(n+1)/2}$$

Ainsi, on obtient

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \frac{1}{\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{(n+1)/2}}$$

connue dans la littérature sous le nom de *Loi de Student de paramètre n* ($n \in \mathbb{N}_*$).

Correction Exercice 86

[qu. 1] On ne peut pas proposer le changement de variable $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n$ car il n'y a aucune chance qu'il soit bijectif ($\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$). Donc on va faire un changement de variable ϕ de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que une des composantes de $\phi = [\phi_1, \dots, \phi_n]$ - disons la dernière - soit telle que

$$\phi_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n.$$

On obtiendra alors la loi de $X_1 + \dots + X_n$ comme la loi marginale de la loi de $\phi(X_1, \dots, X_n)$.

Posons

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ \dots \\ x_1 + \dots + x_{n-1} \\ x_1 + \dots + x_n \end{bmatrix},$$

de sorte que

$$\phi^{-1}(z_1, \dots, z_n) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 - z_1 \\ \cdots \\ z_{n-1} - z_{n-2} \\ z_n - z_{n-1} \end{bmatrix},$$

Alors ϕ est C^1 -difféomorphisme de $(\mathbb{R}^+)^n$ dans

$$\Delta := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < z_1 < z_2 < \dots < z_n\},$$

et le jacobien est donné par

$$|\text{Det} J_{\phi^{-1}}(z_1, \dots, z_n)| = 1.$$

On applique la formule du changement de variable et on obtient

$$f_{(Z_1, \dots, Z_n)}(z_1, \dots, z_n) = f_{(X_1, \dots, X_n)}(\phi^{-1}(z_1, \dots, z_n)) \times 1.$$

Or, les v.a. $\{X_k, k \geq 1\}$ sont indépendantes et de même loi exponentielle, donc

$$f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \lambda^n \exp(-\lambda \sum_{k=1}^n x_k) \mathbb{1}_{(\mathbb{R}^+)^n}(x_1, \dots, x_n).$$

Par suite, en posant $z_0 = 0$ par convention,

$$\begin{aligned} f_{(Z_1, \dots, Z_n)}(z_1, \dots, z_n) &= \lambda^n \exp(-\lambda \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1})) \mathbb{1}_{(\mathbb{R}^+)^n}(\phi^{-1}(z_1, \dots, z_n)) \\ &= \lambda^n \exp(-\lambda z_n) \mathbb{1}_{\Delta}(z_1, \dots, z_n). \end{aligned}$$

La loi de $Z_n = X_1 + \dots + X_n$ est donc donnée par

$$f_{X_1 + \dots + X_n}(z_n) = \int f_{(Z_1, \dots, Z_n)}(z_1, \dots, z_n) dz_1 \cdots dz_{n-1}.$$

En remarquant que

$$\int \mathbb{1}_{\Delta}(z_1, \dots, z_n) dz_1 \cdots dz_{n-1} = \frac{z_n^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(z_n)$$

on a

$$f_{X_1 + \dots + X_n}(z_n) = \frac{\lambda^n z_n^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda z_n) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(z_n).$$

[qu. 2] On reconnaît une loi Gamma :

$$X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{G}(n, \lambda).$$

[qu. 3] T_n est la somme de n v.a. indépendantes exponentielle : sa fonction caractéristique est donc le produit des fonction caractéristiques $\phi_{X_1}, \dots, \phi_{X_n}$. Or, la fonction caractéristique d'une loi exponentielle de paramètre λ est

$$\phi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Donc,

$$\phi_{X_1+\dots+X_n}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^n.$$

Telle est donc la fonction caractéristique d'une loi Gamma de paramètres (n, λ) .

Correction Exercice 88

[qu. 5a] Le taux de défaillance s'interprète comme le ratio de la probabilité que la défaillance survienne à x , et de celle que le produit soit encore en fonctionnement à x .

On a

$$\mathbb{P}(X > x) = \int_x^{+\infty} f_X(t) dt.$$

Donc pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} 1/r(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{t^{a-1} \exp(-\lambda t)}{x^{a-1} \exp(-\lambda x)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{(t+x)^{a-1} \exp(-\lambda(t+x))}{x^{a-1} \exp(-\lambda x)} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^{a-1} \exp(-\lambda t) dt \end{aligned}$$

[qu. 5b] Lorsque $a = 1$, cette quantité ne dépend pas de x : donc le taux de défaillance ne dépend pas de l'âge du composant.

Lorsque $a > 1$ (resp. $0 < a < 1$), c'est une fonction décroissante (resp. croissante) de x donc le taux de défaillance est une fonction croissante (resp. décroissante) de l'âge **Attention : on regarde la monotonie de $1/r(x)$!!**

Correction Exercice 89 [qu. 1] Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}[Z_n] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma} (\mathbb{E}[X_k] - \mu)$$

et puisque $\mathbb{E}[X_k] = \mu$, il vient que $\mathbb{E}[Z_n] = 0$. Les v.a. X_k étant indépendantes, on a

$$\text{Var}(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma^2} \text{Var}(X_k - \mu) = 1.$$

Donc Z_n est une v.a. centrée et réduite.

[qu. 2] La v.a. $(X_k - \mu)/\sigma$ est centrée et réduite. Elle possède un moment d'ordre 2 donc (cf. cours) il existe une fonction ξ telle que $\lim_0 \xi = 0$ et

$$\phi_X(t) = 1 + it\mathbb{E}[X] - \frac{1}{2}t^2\mathbb{E}[X^2] + t^2\xi(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2\mathbb{E}[X^2] + t^2\xi(t)$$

où ϕ_X désigne la fonction de répartition de $(X_k - \mu)/\sigma$.

[qu. 3] En utilisant l'indépendance des v.a. X_k on a en posant $t_n = t/\sqrt{n}$,

$$\phi_{Z_n}(t) = \mathbb{E} \left[\exp\left(i \sum_{k=1}^n \sigma^{-1}(X_k - \mu)t_n\right) \right] = (\phi_X(t_n))^n.$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, $t_n \rightarrow 0$ donc $\phi_X(t_n) \sim 1 - 0.5t_n^2$ et $[\phi_X(t_n)]^n \sim \exp(-0.5n t_n^2) = \exp(-0.5t^2)$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{Z_n}(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(-0.5t^2)$$

[qu. 4] Pour tout t , $\phi_{Z_n}(t)$ converge vers la fonction caractéristique d'une gaussienne centrée, réduite. Cela signifie que $\{Z_n, n \geq 0\}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$: ce résultat est vrai quelle que soit la loi des v.a. X_k .

Correction Exercice 91 [qu. 1a] Le couple (U, V) est un vecteur gaussien : en effet, comme U et V sont des v.a. gaussiennes indépendantes, toute combinaison linéaire de U et V est encore une v.a. gaussienne. Donc puisque,

$$\begin{bmatrix} U + V \\ U - V \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \quad A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

le couple $(U + V, U - V)$ est une transformation linéaire d'un vecteur gaussien. C'est donc encore un vecteur gaussien, de moyenne $0_{\mathbb{R}^2}$ et de matrice de variance-covariance $\theta^2 A \text{Id}_2 A^T = 2\theta^2 \text{Id}_2$. On peut remarquer que cette matrice de variance-covariance est diagonale, donc $U + V$ et $U - V$ **sont indépendantes**.

[qu. 1b - méthode 1] Calculons la fonction de répartition. Pour tout $t \leq 0$, $\mathbb{P}(Z \leq t) = 0$. Soit $t > 0$.

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(U^2 + V^2 \leq t^2) = \int_{\{(u,v), u^2+v^2 \leq t^2\}} f_{(U,V)}(u, v) \, dudv.$$

Or, les v.a. U et V sont indépendantes, donc

$$f_{(U,V)}(u, v) = f_U(u)f_V(v) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\theta^2} \exp(-0.5(u^2 + v^2)/\theta^2).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \leq t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\theta^2} \int_{\{(u,v), u^2+v^2 \leq t^2\}} \exp(-0.5(u^2 + v^2)/\theta^2) \, dudv \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\theta^2} \int_0^{2\pi} \int_0^t \exp(-0.5r^2/\theta^2) \, r dr d\tau \\ &= \frac{1}{\theta^2} \int_0^t r \exp(-0.5r^2/\theta^2) \, dr, \end{aligned}$$

où l'on a fait un changement en coordonnées polaires pour calculer l'intégrale. Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(Z \leq t) = \int_{-\infty}^t f_Z(r) dr$ en ayant posé

$$f_Z(r) = \frac{r}{\theta^2} \exp(-0.5r^2/\theta^2) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(r).$$

[qu. 1b - méthode 2] On peut calculer la densité en faisant un changement de variable: $(U, V) \rightarrow Z$. Néanmoins, cette transformation n'a aucune chance d'être bijective. Donc on va faire le changement de variable

$$(U, V) \rightarrow (Z, U)$$

et déterminer la loi du couple (Z, U) . On en déduira la loi de Z en calculant la loi marginale de la loi du couple. Les détails sont laissés à l'étudiant intéressé ... réponse:

$$f_Z(r) = \frac{r}{\theta^2} \exp(-0.5r^2/\theta^2) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(r).$$

[qu. 2] Δ_i sont les racines du polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_3 \\ X_3 & X_2 \end{bmatrix}$$

i.e. ce sont les racines de

$$\lambda^2 - \lambda(X_1 + X_2) + X_1X_2 - X_3^2.$$

Le discriminant vaut

$$(X_1 + X_2)^2 - 4(X_1X_2 - X_3^2) = (X_1 - X_2)^2 + 4X_3^2$$

et est donc toujours positif. Il existe donc deux racines réelles dont les expressions sont

$$\Delta_1 = \frac{(X_1 + X_2) - \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + 4X_3^2}}{2} \quad \Delta_2 = \frac{(X_1 + X_2) + \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + 4X_3^2}}{2}.$$

[qu. 3-4] Elles s'expriment resp. sous la forme $R - T$ et $R + T$ en posant

$$R := \frac{X_1 + X_2}{2} \quad T := \frac{\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + 4X_3^2}}{2}$$

(a) *Loi de R.* R est une combinaison linéaire de deux v.a. gaussiennes indépendantes : donc R est une v.a. gaussienne. De plus, $\mathbb{E}[R] = 0$ et $\text{Var}(R) = 2(2\sigma^2)/4 = \sigma^2$.

OU : Comme (X_1, X_2) est un vecteur gaussien, alors $R = [1/2 \ 1/2][X_1 \ X_2]^T$ donc (a) c'est une v.a. gaussienne, (b) de moyenne 0 et de variance

$$2\sigma^2 [1/2 \ 1/2] [1/2 \ 1/2]^T = \sigma^2.$$

(b) *Loi de T.* T s'écrit sous la forme $\sqrt{U^2 + V^2}$ avec

$$U := \frac{X_1 - X_2}{2} \quad V := X_3.$$

U et V sont

- indépendantes (car U est une fonction de X_1, X_2 et V est une fonction de X_3 ET les v.a. X_1, X_2, X_3 sont indépendantes).
- des gaussiennes centrées et de même variance σ^2 .

Donc, en utilisant la question 1b, T suit une loi de Rayleigh.

(c) *Indépendance de R et de T.* Enfin R et T sont indépendantes : en effet, à la question 1a on a vu que la demie-somme et la demie-différence de v.a. gaussiennes indépendantes de même moyenne et variance, étaient deux v.a. indépendantes. On en déduit que $X_1 - X_2$ est indépendant de $X_1 + X_2$. Donc en particulier, R est indépendant de $(X_1 - X_2)/2$. De plus, (X_1, X_2) est indep de X_3 dont R est indépendant de X_3 . Par suite, R est indépendant de T (qui est une fonction de X_3 et de $(X_1 - X_2)/2$).

[qu. 5] On fait le changement de variable

$$\phi : \begin{bmatrix} R \\ T \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} R - T \\ R + T \end{bmatrix},$$

de sorte que

$$\phi^{-1} : \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} (\Delta_1 + \Delta_2)/2 \\ (\Delta_2 - \Delta_1)/2 \end{bmatrix},$$

et ϕ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . La formule du changement de variable donne

$$f_{(\Delta_1, \Delta_2)}(d_1, d_2) = \frac{1}{2} f_{(R, T)}((d_1 + d_2)/2, (d_2 - d_1)/2).$$

Par ailleurs,

$$f_{(R, T)}(r, t) = f_R(r) f_T(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-0.5r^2/\sigma^2) \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t).$$

Donc

$$f_{(\Delta_1, \Delta_2)}(d_1, d_2) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}\sigma^3} (d_2 - d_1) \exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2}(d_1^2 + d_2^2)\right) \mathbb{1}_{(d_2 > d_1)}.$$