



OPTIQUE ET PHOTONIQUE
COM101
1^{ère} année

TRAVAUX DIRIGES

Équipe pédagogique 2015-2016

- Didier Érasme
- Yves Jaouën
- Renaud Gabet (Responsable du module)
- Frédéric Grillot
- Sébastien Popoff
- Cédric Ware

Département Communications et Electronique
Télécom ParisTech

|

|

**PROPAGATION DANS UN MILIEU
PRESENTANT UN GRADIENT D'INDICE**

Exercice en classe

La fibre à gradient d'indice

On considère la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique dont l'indice de réfraction $n(x)$ ne dépend que de la coordonnée x .

On suppose le milieu illimité dans la direction Oy et l'on ne s'intéresse qu'à la propagation selon l'axe Oz .

On désigne par $\theta(x)$ l'angle entre la tangente au rayon et l'axe Oz et par $i(x)$ son complément.

1) Sachant que $n(x)\sin(i(x))$ est une constante A (loi de Descartes) et que $\cotg(i)=dx/dz$, établir l'équation $x(z)$ de la trajectoire d'un rayon lumineux dans le milieu (On déterminera la constante A à partir des conditions d'injection de la lumière dans la fibre x_0 et i_0).

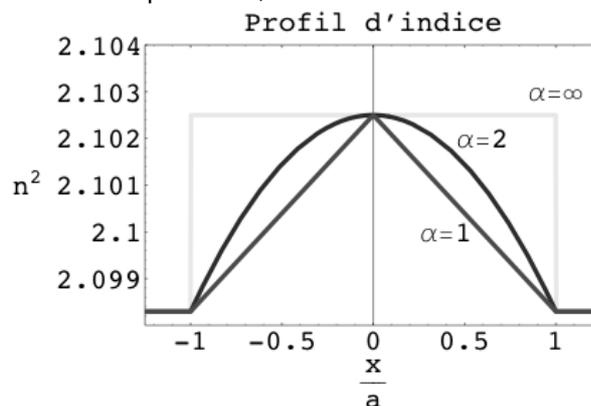
2) Prenons le cas d'une fibre dont le profil d'indice est :

$$|x| < a \quad n^2(x) = n_0^2 [1 - 2\Delta |x/a|^\alpha]$$

où Δ est une constante très inférieure à l'unité.

$$|x| < a \quad n^2(x) = n_0^2 [1 - 2\Delta]$$

Ce profil est représenté ci-dessous pour $\alpha=1$, $\alpha=2$ et $\alpha=+\infty$ en fonction de x/a et pour 1.45.



Déterminer la valeur du paramètre α conduisant à une fonction sinusoïdale de $x(z)$ de la forme $x(z) = X_0 \cos\left(\frac{2\pi z}{\Lambda} + \phi\right)$. Calculer X_0 et Λ .

3) Déterminer, quelque soit α , les conditions d'injection pour qu'un rayon au point $x_0 < a$ faisant un angle θ_0 avec l'axe de propagation, reste confiné dans le cœur de la fibre.

4) On suppose $\alpha=2$. Déterminer la différence de temps de propagation, sur une distance L grande devant la période de focalisation des rayons lumineux, entre un rayon injecté en $x_0=0$ avec l'angle θ et celui dont θ est nul.

- 5) Quelles sont les limites de ce modèle géométrique ?
- 6) On montre que dans une fibre optique, $\theta_{\max} \approx \sqrt{2\Delta}$. Cette valeur est appelée ouverture numérique (ON). Expliquer l'influence de la dispersion modale sur la transmission de signaux numériques. Déterminer le débit maximum permis dans une fibre optique multimode sur une distance de 1km ($\Delta = 10^{-2}$, $n_0 = 1.45$). On supposera que l'étalement de chaque impulsion ne doit pas dépasser $\frac{1}{4}$ du temps bit.

Exercices supplémentaires

La fibre à saut d'indice

- 1) Même question que 4) pour $\alpha = \infty$
- 2) A votre avis, pour obtenir le débit limite le plus important possible, vaut-il mieux utiliser une fibre à saut d'indice ou une fibre à profil parabolique ?

TD2

LASER A CAVITE FABRY-PEROT

Exercice en classe

Fonction de transfert d'un laser FP

Un laser se compose d'un milieu actif rendu amplificateur par un mécanisme de pompage approprié et enfermé dans une cavité résonante à faibles pertes (miroirs haute réflectivité).

1. Fonction de transfert d'une cavité vide

La cavité laser vide de type Fabry-Perot peut être schématisée par deux miroirs plans M_1 et M_2 parallèles et distants de d , de réflectivités d'amplitude r (transmission t), renfermant un milieu passif (non émissif) homogène d'indice n . La cavité ainsi formée peut être considérée comme un interféromètre illuminé par un champ extérieur, encore appelé champ exciteur.

- a. Etablir la réponse au champ exciteur, c'est-à-dire le champ transmis par l'interféromètre en fonction du déphasage φ .
- b. Quand φ est petit, quelle forme prend la fonction ? Déterminer la largeur à mi-hauteur des pics. Comment évolue cette largeur avec la réflectivité des miroirs ?

2. Milieu amplificateur

On dispose d'un matériau présentant des transitions atomiques capables d'absorber ou de céder de l'énergie à une onde électromagnétique. Lors de la propagation, on peut modéliser l'indice du milieu par une expression complexe du type :

$$n = n' - in''$$

- a. Montrer que lorsqu'une onde plane traverse ce milieu, elle subit un déphasage mais également une absorption ou une amplification.
- b. Dans quel cas le milieu est-il amplificateur ou atténuant ?

3. Le laser

Un laser est constitué d'un milieu amplificateur placé à l'intérieur d'une cavité. Le champ extérieur introduit dans la première question n'existe plus. Par contre, il existe un champ généré à l'intérieur de la cavité par le milieu amplificateur sous forme d'émission spontanée que nous appellerons $S(\nu)$. Le spectre de cette émission spontanée peut-être représenté par un spectre dont la largeur peut atteindre plusieurs dizaines de nanomètres pour un laser à semi-conducteur.

- a. Exprimer la nouvelle fonction de transfert de la cavité avec milieu amplificateur.
- b. Déterminer les conditions d'auto-oscillation de ce système, c'est-à-dire les conditions qui permettent un état auto-entretenu du laser même si $S(\nu)=0$. En déduire l'existence d'un seuil d'auto-oscillation ainsi que les fréquences d'oscillation de la cavité.

Exercices supplémentaires

Temps de vie du photon dans la cavité

1. Un milieu est placé dans une cavité Fabry-Perot. En supposant les pertes faibles, montrer que l'intensité I d'un train d'ondes de pulsation ω se propageant dans le milieu, selon l'axe z , décroît exponentiellement dans le temps.
2. Compte tenu de l'évolution temporelle du champ, en déduire le spectre en sortie de la cavité.
3. Comparer la largeur de cette fonction au résultat obtenu avec la fonction d'Airy quand R est proche de 1.

TD3

Les ondes dans le domaine temporel et fréquentiel

Le but de ce TD est de familiariser les élèves avec l'expression d'une onde, tant dans le domaine temporel que dans le domaine fréquentiel. C'est également le prétexte à une introduction à la Transformation de Fourier qui sera utilisée dans les TDs suivant.

Exercice en classe

1. Exprimer l'amplitude du spectre $E(\nu)$ d'une source de spectre monochromatique de fréquence ν_0 .
2. En déduire l'amplitude complexe de l'onde $E(t)$ ainsi que sa partie réelle $E^{(r)}(t)$
3. Exprimer l'amplitude du spectre $E(\nu)$ d'une source de lumière blanche dont le spectre est rectangulaire de phase constante s'étalant de ν_1 à ν_2 ?
4. Calculer l'amplitude complexe de l'onde $E(t)$ ainsi que sa partie réelle $E^{(r)}(t)$. Comparer au cas de la source monochromatique.
5. Quelle est la durée des trains d'onde ainsi que leur longueur dans le vide (milieu isotrope homogène permanent) pour la longueur d'onde moyenne d'un spectre de la source entre 0.4 et $0.8\mu\text{m}$?
6. Que se passe-t-il lorsque l'on élargi le spectre de la source ?
7. Comparer au cas du soleil ($\Delta\lambda = 0.4\mu\text{m}$ autour de $0.6\mu\text{m}$) : pourquoi, le soleil n'émet-il pas de manière impulsionnelle comme pourraient le laisser penser les résultats précédents.
8. Peut-on observer directement la forme de cette onde avec un détecteur ?
9. Quelle méthode permet de remonter à la forme de l'onde $E^{(r)}(t)$? Obtient-on exactement $E^{(r)}(t)$?

Exercices supplémentaires

10. Reprendre les questions 1) et 2) pour une source dont le spectre est gaussien.

TD4

Diffraction et résolution des appareils photo numériques: la course aux pixels est-elle sans limite ?

Exercice en classe

L'appareil photo numérique

Pour comprendre l'influence de la diffraction dans les instruments optiques, nous prendrons l'exemple de l'appareil photo numérique. Nous étudierons l'influence des dimensions de l'objectif sur la résolution de l'image puis nous verrons que ceci pose une limite théorique à la densité maximale de photosites sur un capteur numérique.

- 1) Calculer l'image $T(X,Y)$ obtenue dans le plan focal image (XOY) d'une lentille convergente de dimensions infinies lorsque cette dernière est éclairée par une onde plane sous incidence normale. On nommera O le centre de la lentille et Oz l'axe de celle-ci.
- 2) On appelle le plan (yOz) le plan d'incidence de cette onde. Que devient l'image si l'onde plane a un angle d'incidence θ par rapport à l'axe Oz . ? Montrer que ce résultat est conforme aux lois de l'optique géométrique ?
- 3) Que devient sous incidence normale l'image si on place un diaphragme carré de largeur D dans le plan focal objet ? Calculer la largeur de la tache de diffraction (on assimilera cette largeur à celle du lobe central).
- 4) Comment est modifiée l'image si on rapproche le diaphragme de la lentille ? En déduire l'image obtenue avec une lentille de dimension finie de largeur D .
- 5) Comment évolue cette tâche de diffraction en fonction de la longueur d'onde λ ? Comment faut-il faire pour améliorer la résolution des appareils optiques ? Pourquoi les bons appareils photos ou les télescopes ont-ils un diamètre de lentille (ou de miroir) très larges ? Pourquoi les lecteurs DVD Blue Ray utilisent-ils des longueurs d'onde plus courtes que les lecteurs CD ?
- 6) Dans le cas de la photo numérique, quelle condition doit-on fixer sur la taille des photosites (éléments qui transforment la lumière en courant, appelé également abusivement pixels) pour s'affranchir des effets de la diffraction sur l'image? AN : Soit un appareil photo compact réglé de telle manière que : $f = 5.6mm$ et $D = 2.8mm$. Si les dimensions du capteur sont de $4.62mm \times 6.16mm$, à partir de combien de photosites la diffraction devient-elle gênante pour une longueur d'onde moyenne de $0.5\mu m$? Quels autres défauts peuvent intervenir avant ?
- 7) Est-ce une limite irrémédiable ?

Exercices supplémentaires

EXERCICE 1 : Même exercice avec une lentille circulaire

- 1) Que devient l'image si la lentille est circulaire, de diamètre D (et l'onde plane est parallèle à Oz) ? Calculer la largeur de cette tache de diffraction (\sim largeur du lobe central).
- 2) AN : Soit un appareil photo compact réglé de telle manière que : $f = 5.6\text{mm}$ et $D = 2.8\text{mm}$. Si les dimensions du capteur sont de $4.62\text{mm} \times 6.16\text{mm}$, à partir de combien de photosites la diffraction devient-elle gênante pour une longueur d'onde moyenne de $0.5\mu\text{m}$?

EXERCICE 2 : Diffraction par une ouverture carrée

- 1) Soit un objet diffractant composé d'une fente infiniment haute de largeur a éclairée par une onde plane, parallèle à l'axe Oz , de longueur d'onde $\lambda = 0,6\mu\text{m}$. Calculer et décrire le phénomène observé à l'infini. La figure de diffraction exprimée en coordonnées « fréquences spatiales » dépend-elle de λ ?
- 2) Que se passe-t-il si on décale la fente suivant l'axe x d'une distance a_0 ?
- 3) Que se passe-t-il si la fente est de hauteur b avec $b \gg a$? Etudier l'influence de la valeur de b par rapport à a .
- 4) Que se passe-t-il si la fente subit une rotation θ autour de l'axe Oz ?

TD5

Diffraction par une structure périodique bidimensionnelle : Réflexion d'une source ponctuelle sur un écran à cristaux liquides

Exercice en classe

Le but de cet exercice est d'étudier la diffraction d'une onde plane par un écran périodique et de comprendre par exemple pourquoi, lorsque l'on observe le soir un lampadaire à travers un rideau de type voilage, on observe une figure en forme de croix, figure que l'on observe également lorsque l'on regarde le reflet d'une source ponctuelle sur un écran de téléphone portable. En réflexion, les lois de la diffraction sont les mêmes. On traitera ce problème en transmission pour plus de clarté.

- 8) Calculer la TF d'un réseau bidimensionnel composé d'une infinité de fentes infiniment hautes et infiniment fines, espacées de x_0 , éclairé par une onde plane ?
- 9) Calculer et représenter la figure de diffraction de Fraunhofer d'un réseau bidimensionnel composé d'une infinité de fentes de largeur a , espacées de x_0 , et que l'observation se fait dans le plan focal d'une lentille de distance focale f ? Que se passe-t-il si la largeur des fentes augmente ? Si les fentes se rapprochent ?
- 10) Que se passe-t-il si la largeur du réseau est A avec $A \gg x_0 > a$
- 11) Calculer l'image à travers une lentille d'un maillage de pixel éclairé par une onde plane en incidence normale.
- 12) Que se passe-t-il si la longueur d'onde varie ? Que se passe-t-il si le spectre de la source s'étale du bleu au rouge ?

⇒ A ce stade, vous pouvez observer le résultat en utilisant le flash d'un smartphone et en observant la réflexion de cette source sur l'écran du téléphone portable de votre voisin.
- 13) Théorème de Shannon : Lorsque l'on fait la TF d'un signal par ordinateur, pour enregistrer ce dernier, il est obligatoire de l'échantillonner. Comparer la TF d'une porte à la TF d'une porte échantillonnée. En déduire le théorème d'échantillonnage appelé également théorème de Shannon.

TD6

TRAITEMENT OPTIQUE DE L'INFORMATION

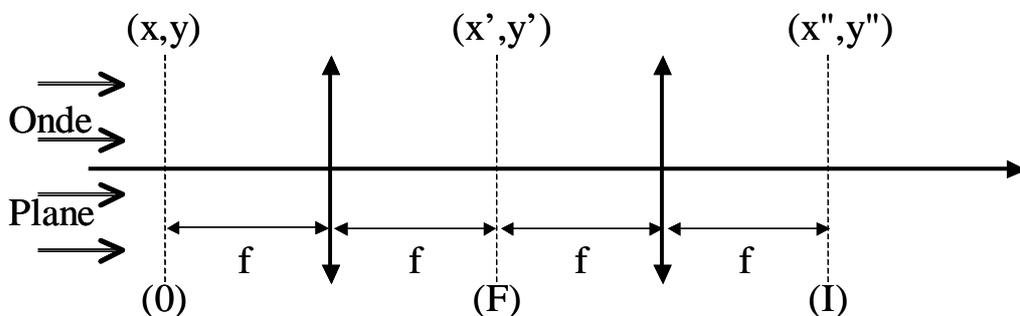
Exercice en classe

On considère le montage à double diffraction ou montage « $4f$ » comportant :

- Un plan objet (O)
- Un plan de Fourier (F) ou plan de filtrage
- Un plan image (I).

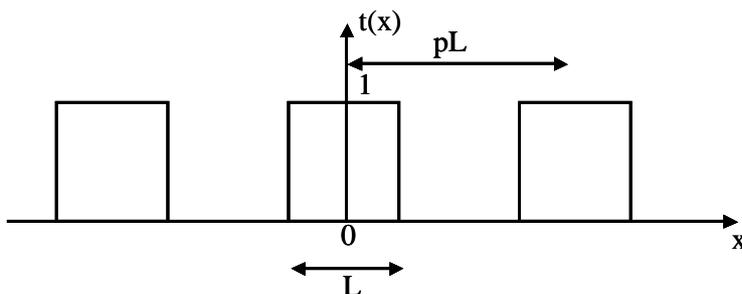
L'éclairage est effectué au moyen d'une onde plane cohérente de longueur d'onde λ .

AN : $f = 50\text{cm}$, $\lambda = 0.5\mu\text{m}$.



EXERCICE 1 : Expérience d'Abbe

On place dans le plan objet un réseau binaire dont la transmittance est seulement fonction de x :

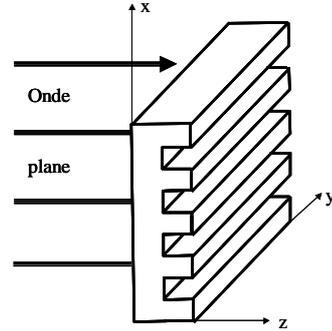
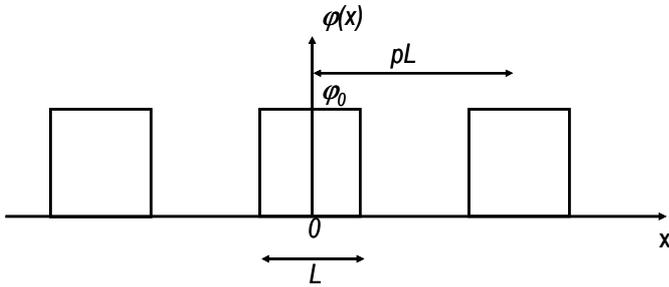


Pour cet exercice, nous prendrons $p = 2$.

- 1) Décrire le spectre dans le plan de Fourier. On place en (F) sur l'axe optique un petit point totalement absorbant de façon à obturer totalement l'ordre 0. Quelles sont les variations de l'intensité de l'image obtenue ?
- 2) Quelle doit être la taille maximale de la tâche absorbante ? Quelle doit être cette taille si on tient compte du diamètre fini des lentilles ($D=10\text{cm}$), quelle doit être l'ordre de grandeur de la taille de la tâche absorbante ?

- 3) On remplace la tâche absorbante par un diaphragme de diamètre $d=350\mu\text{m}$. Qu'observe-t-on en (I) ? On remplace la tâche absorbante, qu'observe-t-on en (I) ?

EXERCICE 2 : Lame de phase : strioscopie

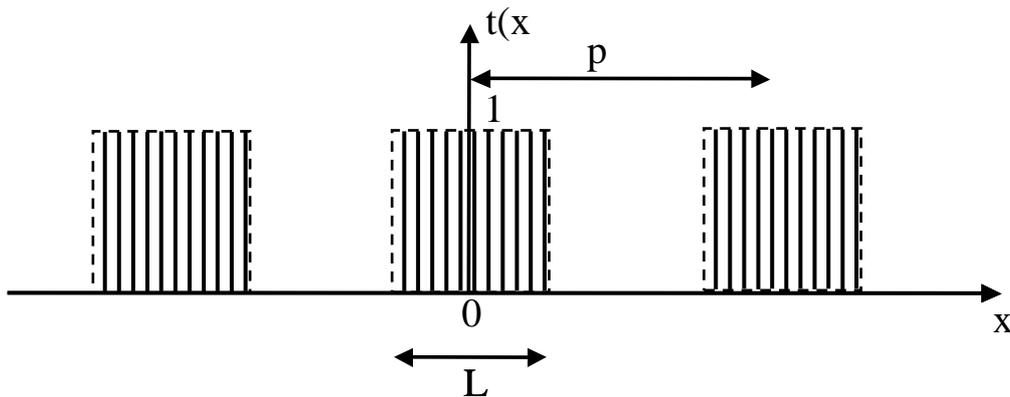


- 1) On reprend l'expérience à double diffraction. On place dans le plan focal objet de la première lentille l'objet de phase dont les variations de phase sont représentées ci-dessus figure gauche (avec $P=4/3$). On suppose $\phi_0 \ll \pi$. Un exemple de lame de phase est donné sur la figure de droite. Dans notre exemple, on négligera la phase commune accumulée quelque soit x et on ne s'intéressera qu'aux variations de phase. Décrire l'image obtenue en (I) sans filtrage dans le plan (F).
- 2) Que ce passe-t-il si on place en (F) une pastille absorbante filtrant l'ordre 0. Intérêt ?

Exercices supplémentaires

EXERCICE 3 : Détramage

On considère une photographie tramée de l'objet de l'exercice 1. Un tel objet est représentable par une transmittance formée de points noirs ou blanc, infiniment fins et régulièrement répartis aux sommets d'une maille carrée de pas $l = 50\mu\text{m}$ ($\ll L$). $p=4/3$.



Décrire l'allure du spectre observé en (F). On place dans le plan (F) un diaphragme. Quel doit être le diamètre de ce dernier pour obtenir un détramage ? Décrire dans ce cas l'image obtenue.

EXERCICE 4 : Détection d'un défaut

On place dans le plan objet un réseau plan infini, de pas x_0 , percé de fentes infiniment fines.

Par suite d'une erreur lors de la gravure du réseau, une fente supplémentaire a été tracée : sa position est inconnue.

On dispose d'une fente rectangulaire réglable que l'on peut positionner dans le plan de filtrage (F). Quelle est la largeur à donner à cette fente et où faut-il la placer pour obtenir sur l'écran I la meilleur image possible du trou parasite et elle seule ? Quelle sera alors la largeur de cette image ? Montrer que l'on peut ainsi retrouver la position de la fente supplémentaire.

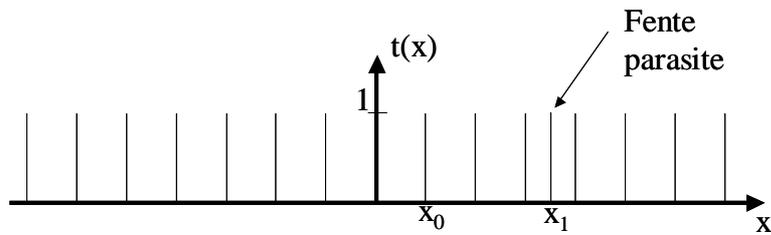


TABLEAU DE TRANSFORMÉES DE FOURIER

1- FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE

Utilisation du tableau :

Temps / fréquences :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \exp(j2\pi\nu t) d\nu$$

→ a = t et α = ν

Espace / Fréquences spatiales

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \exp(-j2\pi ux) dx$$

→ a = u et α = x

Variables duales	
a	α
Expressions	
$f(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \exp(j2\pi\alpha a) d\alpha$	$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \exp(-j2\pi\alpha a) da$
$\delta(a) = \text{"delta de Dirac"}$	1
$\delta(a - a_0)$	$\exp(-j2\pi\alpha a_0)$
1	$\delta(\alpha)$
$\exp(j2\pi\alpha_0 a)$	$\delta(\alpha - \alpha_0)$
$\sin(2\pi\alpha_0 a)$	$\frac{j}{2} [\delta(\alpha + \alpha_0) - \delta(\alpha - \alpha_0)]$
$\cos(2\pi\alpha_0 a)$	$\frac{1}{2} [\delta(\alpha + \alpha_0) + \delta(\alpha - \alpha_0)]$

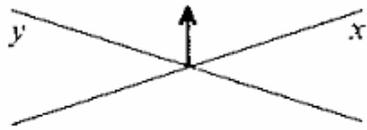
$\text{Sign}(a) = \begin{cases} 1 \text{ pour } a > 0 \\ 0 \text{ pour } a = 0 \\ -1 \text{ pour } a < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{j\pi a}$
$\frac{-1}{j\pi a}$	$\text{Sign}(\alpha) = \begin{cases} 1 \text{ pour } \alpha > 0 \\ 0 \text{ pour } \alpha = 0 \\ -1 \text{ pour } \alpha < 0 \end{cases}$
$\text{Step}(a) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x > 0 \\ 1/2 \text{ pour } x = 0 \\ 0 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{2} \left[\delta(\alpha) + \frac{1}{j\pi \alpha} \right]$
$\frac{1}{2} \left[\delta(a) - \frac{1}{j\pi a} \right]$	$\text{Step}(\alpha) = \begin{cases} 1 \text{ pour } \alpha > 0 \\ 1/2 \text{ pour } \alpha = 0 \\ 0 \text{ pour } \alpha < 0 \end{cases}$
<p>"Peigne de Dirac"</p> $\begin{aligned} \text{III}_L(a) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(a - nL) \\ &= \frac{1}{L} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp\left(j \frac{2\pi m a}{L}\right) \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{1}{L} \text{III}_{\frac{1}{L}}(\alpha) &= \frac{1}{L} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha - m/L) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi m L \alpha) \end{aligned}$
<p>fonction "porte"</p> $\Pi\left(\frac{a}{L}\right) = \Pi_L(a) = \begin{cases} 1 \text{ pour } a \leq \frac{L}{2} \\ 0 \text{ pour } a > \frac{L}{2} \end{cases}$	$L \frac{\sin(\pi L \alpha)}{\pi L \alpha} = L \text{Sinc}(L \alpha)$
$L \frac{\sin(\pi L a)}{\pi L a} = L \text{Sinc}(\pi L a)$	$\Pi\left(\frac{\alpha}{L}\right) = \Pi_L = \begin{cases} 1 \text{ pour } \alpha \leq \frac{L}{2} \\ 0 \text{ pour } \alpha > \frac{L}{2} \end{cases}$

$Sinc^2(a)$	$tri(\alpha)$
$tri(a)$	$Sinc^2(\alpha)$
fonction Gaussienne $Gaus\left(\frac{a}{A}\right) = \exp\left(-\pi\frac{a^2}{A^2}\right)$	$AGaus(A\alpha) = A\exp(-\pi A^2\alpha^2)$
$\exp\left[\pm j\pi\left(a^2 - \frac{1}{4}\right)\right]$	$\exp(\pm(-1)j\pi\alpha^2)$
$\cos(\pi a^2)$	$\cos\left[\pi\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)\right]$
$\sin(\pi a^2)$	$-\sin\left[\pi\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)\right]$
$\exp\left[-\pi\left(\frac{a^2}{A+ jc}\right)\right]$ avec $A \geq 0$ et $A^2 + c^2 < \infty$	$(A+ jc)^{1/2} \exp[\pi(A+ jc)\alpha^2]$
$\exp[- a]$	$\frac{2}{1+(2\pi\alpha)^2}$
$\frac{2}{1+(2\pi a)^2}$	$\exp[- \alpha]$
$\left(\frac{1}{ a }\right)^{1/2}$	$\left(\frac{1}{ \alpha }\right)^{1/2}$

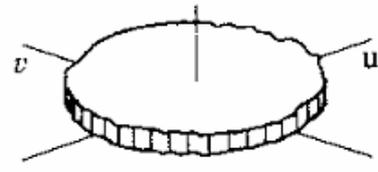
2- FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Ce tableau s'applique pour le cas de la diffraction, c'est-à-dire de l'espace (x,y) à l'espace des fréquences spatiales (u,v)

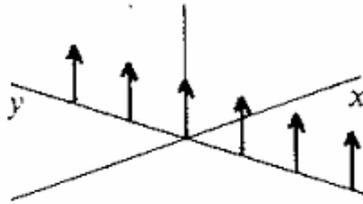
$f(\vec{\rho}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} [F(\vec{r})] \exp(j2\pi\vec{r}\vec{\rho}) d^2\vec{r}$ <p>avec $\rho(u,v)$</p>	$F(\vec{r}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} [f(\vec{\rho})] \exp(-j2\pi\vec{r}\vec{\rho}) d^2\vec{\rho}$ <p>avec $\vec{r}(x,y)$</p>
$f(\vec{\rho}) = \int_0^{+\infty} [F(r)] J_0(2\pi\rho r) dr$ <p>$r = \vec{r}$ et $\rho = \vec{\rho}$</p> <p>Transformée de Hankel d'ordre 0 ou Transformée de Fourier-Bessel</p>	<p>$F(\vec{r})$ symétrie sphérique</p>
<p>$f(u).g(v)$</p>	<p>$F(x).G(y)$ fonction à variables séparables</p>
<p>$\mathbf{1}(u).\mathbf{1}(v)$</p>	<p>$\delta(x,y)$</p>
$\frac{\pi D^2}{4} \text{Somb}(\rho D) = \frac{\pi D^2}{4} \frac{2J_1(\pi\rho D)}{\pi\rho D}$	$\text{Circ}\left(\frac{r}{D}\right) = \begin{cases} 1 \text{ pour } r \leq \frac{D}{2} \\ 0 \text{ pour } r > \frac{D}{2} \end{cases}$
$\lambda z \exp(\pm (-1) j\pi \lambda z \rho^2)$	$\exp\left[\pm j\pi\left(\frac{r^2}{\lambda z} - \frac{1}{2}\right)\right]$
$r_o^2 \text{Gaus}(\rho r_o) = r_o^2 \exp(-\pi r_o^2 \rho^2)$	$\text{Gaus}\left(\frac{r}{r_o}\right) = \exp\left(-\pi \frac{r^2}{r_o^2}\right)$



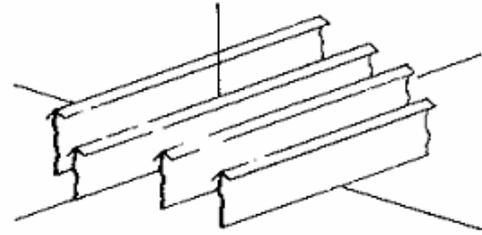
$$\delta^2(x, y)$$



$$1$$



$$\mathbb{H}(y) \delta(x)$$



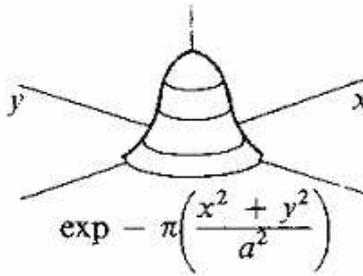
$$\mathbb{H}(v)$$



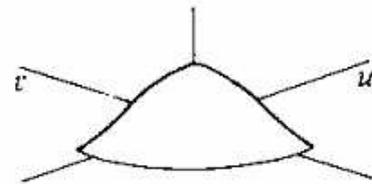
$$\mathbb{H}(y) \delta(x)$$



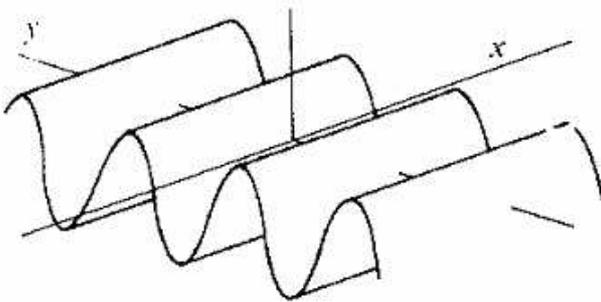
$$\mathbb{H}(v)$$



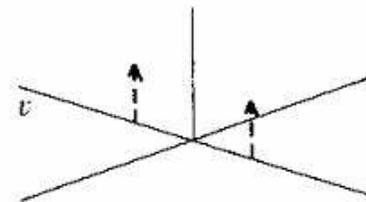
$$\exp - \pi \left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} \right)$$



$$a \exp - \pi a^2 (u^2 + v^2)$$



$$\sin \pi y$$



$$\frac{i}{2} \delta^2 \left(u, v - \frac{1}{2} \right) - \frac{j}{2} \delta^2 \left(u, v + \frac{1}{2} \right)$$