

---

# Deux approches pour la comparaison de relations spatiales floues:

## Transport optimal et morphologie mathématique

Isabelle Bloch<sup>1</sup>, Jamal Atif<sup>2</sup>

1. LTCI, CNRS, Télécom ParisTech, Université Paris-Saclay, Paris, France  
isabelle.bloch@telecom-paristech.fr

2. PSL, Université Paris-Dauphine, LAMSADE UMR 7243, Paris, France  
jamal.atif@lamsade.dauphine.fr

---

*RÉSUMÉ.* Les relations spatiales sont au cœur de beaucoup de méthodes d'interprétation de scènes à l'aide d'informations structurelles. Lorsque ces scènes sont analysées par comparaison avec un modèle, ou lorsqu'elles sont dynamiques et que l'on s'intéresse à leur évolution, il faut alors développer des outils pour comparer des relations spatiales, souvent exprimées ou connues de manière imprécise. Dans cet article, nous proposons deux approches pour comparer des relations spatiales représentées par des ensembles flous, l'une par transport optimal et l'autre par morphologie mathématique. Des exemples sur des images médicales et des séquences vidéo illustrent l'intérêt de ces approches.

*ABSTRACT.* Spatial relations constitute the core of many methods for scene understanding based on structural information. When a scene is analyzed by comparison with a model, or when it is dynamic and its evolution should be assessed, then tools for comparing spatial relations, often known or expressed imprecisely, have to be developed. In this paper, we propose two approaches to compare spatial relations represented as fuzzy sets, relying on optimal transport and mathematical morphology, respectively. Examples on medical images and video sequences illustrate the interest of these approaches.

*MOTS-CLÉS :* relations spatiales floues, comparaison de relations spatiales, comparaison de distributions, transport optimal, morphologie mathématique, distances de Wasserstein, de Hausdorff, de Lévy-Prokhorov.

*KEYWORDS:* fuzzy spatial relations, comparison of spatial relations, comparison of distributions, optimal transport, mathematical morphology, Wasserstein, Hausdorff, Lévy-Prokhorov distances.

---

DOI:10.3166/RIA.29.595-619 © 2015 Lavoisier

## 1. Introduction

L'interprétation de scènes s'appuie de plus en plus souvent sur des informations structurelles, en particulier sur les relations spatiales entre les objets qui composent la scène. L'importance et l'intérêt de telles informations ont été montrés dans de nombreux travaux et de nombreuses applications (par exemple (Aksoy, 2006 ; Colliot *et al.*, 2006 ; Deruyver *et al.*, 2009 ; Freeman, 1975 ; Fouquier *et al.*, 2012 ; Gasós, Saffiotti, 2000 ; Guo *et al.*, 2013 ; Kuipers, 1978 ; Le Ber *et al.*, 2006 ; Mohan, Nevatia, 1992 ; Nempont *et al.*, 2013 ; Vanegas *et al.*, 2013)). Les relations spatiales, qu'elles soient mesurées dans une image ou issues d'une base de connaissances, sont souvent exprimées de manière imprécise, ce qui conduit à les représenter de manière floue (Bloch, 2005). Lorsque la configuration spatiale des scènes évolue, la quantification et l'interprétation de ces évolutions nécessite la comparaison des relations spatiales. De même, la reconnaissance d'objets dans des images à partir de connaissances a priori sur ces objets peut bénéficier de la comparaison des relations entre les observations de ces objets et des relations entre leurs représentations dans un modèle. Ainsi, l'observation de l'évolution d'une pathologie par imagerie médicale ou de l'occupation des sols par télédétection, la détection de changements dans des séquences vidéo, ou encore la mise à jour de systèmes d'information spatiale sont autant d'exemples qui peuvent bénéficier de la quantification et de la comparaison de relations spatiales entre les objets qui composent les scènes observées. C'est à cette question, encore peu abordée dans la littérature<sup>1</sup>, que nous répondons dans cet article, avec de premières propositions, en étendant nos travaux préliminaires (Bloch, Atif, 2014).

Nous cherchons en particulier à définir des mesures de comparaison qui permettent de répondre aux questions suivantes, en supposant que nous nous intéressons à un ensemble défini de relations spatiales qu'il est possible de calculer : deux objets  $A$  et  $B$ , connus dans un modèle comme partageant certaines relations, partagent-ils les mêmes relations dans leurs observations (dans des images par exemple) ? deux objets  $A'$  et  $B'$  peuvent-ils être reconnus comme  $A$  et  $B$  à l'aide de leurs relations spatiales ? comment les relations entre  $A$  et  $B$  évoluent-elles d'une date  $t$  à une date  $t'$  ? les relations entre  $A$  à la date  $t$  et  $A$  à la date  $t'$  sont-elles similaires aux relations entre  $B$  à la date  $t$  et  $B$  à la date  $t'$  ? ( $A$  et  $B$  étant des observations, ou des modèles d'objet, ou encore une observation et un modèle). Des questions similaires peuvent être exprimées pour des relations entre plus de deux objets, mais nous ne les aborderons pas dans cet article.

Nous considérons ici des relations spatiales représentées par des distributions ou des nombres flous sur un espace à une dimension, en prenant l'exemple de relations de direction et de distance, définies respectivement sur  $[0, 2\pi]$  et  $\mathbb{R}^+$  (quelques extensions sur des espaces de plus grande dimension seront suggérées au cours du texte). Leurs définitions sont rappelées dans la section 2. S'il existe de nombreuses mesures

---

1. A part dans les approches par mise en correspondance de graphes (Conte *et al.*, 2004), mais dans lesquelles les relations spatiales sont représentées par de simples nombres, constituant les attributs des arêtes (Cesar *et al.*, 2005).

de comparaison de distributions de probabilités, la plupart n'est pas adaptée à notre propos. En effet les mesures classiques procèdent par comparaisons point à point et ne prennent donc pas en compte la distance sur le domaine de définition des distributions. De plus, ces mesures ne prennent pas en compte le caractère circulaire de certaines relations spatiales, de direction par exemple. Nous proposons donc deux nouvelles approches dans la section 3, qui ne présentent pas ces limites des méthodes existantes, l'une adaptant des mesures existantes à partir de transport optimal (section 3.2) et l'autre reposant sur des dilatations morphologiques (section 3.3), et nous en donnons quelques propriétés. Pour illustrer l'effet et l'intérêt des mesures de comparaison, nous montrons les résultats obtenus sur des images du cerveau et sur des séquences vidéo dans la section 4. Les deux approches proposées ont une parenté qui s'exprime à partir des distances de Lévy-Prokhorov et de Wasserstein (Bloch, Atif, 2015).

## 2. Représentations floues de relations spatiales

Le cadre semi-quantitatif des ensembles flous est bien adapté pour représenter des relations spatiales, qu'elles soient calculées entre objets définis de manière imprécise, ou qu'elles soient elles-mêmes de nature imprécise (*proche, à droite...*) (Bloch, 2005). Étant donnés deux objets, une relation spatiale entre ces objets peut être évaluée et représentée sous différentes formes, comme un nombre, un intervalle, un nombre flou ou une distribution, un ensemble flou bipolaire, etc. Notons que nous ne faisons pas d'hypothèse ici sur la manière dont les objets sont représentés, et ils peuvent être des ensembles, des ensembles flous, des points d'intérêt... Ici, nous considérons le cas où les relations spatiales sont représentées par des nombres flous ou des distributions, avec deux exemples : les relations directionnelles représentées comme une fonction périodique par un histogramme d'angles sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  et les relations de distance représentées par un histogramme ou un nombre flou sur  $\mathbb{R}^+$ .

Rappelons les définitions de ces deux relations. Nous notons  $\mathcal{S}$  l'espace dans lequel sont définis les objets (par exemple  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{Z}^n$ ). Les histogrammes d'angles ont été introduits dans (Miyajima, Ralescu, 1994) et généralisés en 3D dans (Bloch, Ralescu, 2003). Nous ne donnons ici que la définition pour des objets définis dans un espace à deux dimensions ( $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{Z}^2$ ). L'histogramme d'angles normalisé  $ha_{A,B}$  entre deux objets  $A$  et  $B$  est défini par :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], ha_{A,B}(\theta) = \frac{h'_{A,B}(\theta)}{\sup_{\theta' \in [0, 2\pi]} h'_{A,B}(\theta')}, \quad (1)$$

avec

$$h'_{A,B}(\theta) = |\{(a, b), a \in A, b \in B \mid \angle(a, b) = \theta\}| \quad (2)$$

où  $\angle(a, b)$  est l'angle modulo  $2\pi$  entre  $\vec{ab}$  et l'axe horizontal. Lorsque  $A$  et  $B$  sont flous, la somme est pondérée par les degrés d'appartenance de  $a$  à  $A$  et de  $b$  à  $B$ . Elle peut également être pondérée par une fonction de la distance entre  $a$  et  $b$  comme

dans les histogrammes de force (Matsakis, Wendling, 1999). Des exemples d'histogrammes d'angles entre deux objets d'une séquence vidéo sont illustrés dans la partie expérimentale (figure 4).

Dans le cas des distances, nous pouvons définir de la même manière un histogramme de distances par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, hd_{A,B}(\lambda) = \frac{1}{D} |\{(a, b), a \in A, b \in B \mid d_S(a, b) = \lambda\}|, \quad (3)$$

où  $d_S$  est la distance sur  $S$  et  $D$  un facteur de normalisation. Nous utiliserons également des distances représentées par des nombres flous, exprimant le degré avec lequel la distance minimum ou de Hausdorff entre deux objets flous  $A$  et  $B$  est égale à  $\lambda$ , que nous notons  $d_{A,B}^{min}(\lambda)$  et  $d_{A,B}^{Haus}(\lambda)$ . Des définitions morphologiques ont été proposées pour cela dans (Bloch, 1999) (voir section 3.3). Des exemples de distributions de distances minimum et de Hausdorff obtenues par cette approche sont donnés pour deux structures du cerveau, dans la figure 14.

Afin de manipuler des valeurs dans  $[0, 1]$  (par convention), nous normalisons les distributions et histogrammes. Cette normalisation peut être faite par le sup ou le max (comme dans la définition de *ha* ci-dessus), ou par la somme. Le premier cas (normalisation par le sup ou le max) correspond à une interprétation floue ou possibiliste qui sera utile pour les définitions morphologiques ou pour comparer les relations à des valeurs de variables linguistiques. Le second cas (normalisation par la somme) correspond à une interprétation probabiliste qui permettra d'adapter des méthodes de comparaison de distributions de probabilités. Nous proposerons également une extension ne nécessitant pas de normalisation par la somme.

### 3. Comparaison de relations spatiales floues

La comparaison de relations spatiales floues peut être envisagée de manière qualitative (par exemple : une relation est-elle mieux satisfaite qu'une autre ?), ou de manière quantitative. Ici nous proposons des mesures quantitatives de comparaison, dans le cas où les relations sont représentées par des histogrammes ou des distributions, comme dans la section 2. Soit  $f$  et  $g$  les représentations à comparer. Dans les deux exemples considérés, ce sont des fonctions de  $[0, 2\pi]$  vers  $[0, 1]$  ou de  $\mathbb{R}^+$  vers  $[0, 1]$ . Nous noterons  $M$  le domaine de définition de la fonction,  $x, y, \dots$  des points de  $M$ , ou  $\theta, \alpha, \dots$  lorsqu'il s'agit d'angles.

Les méthodes de comparaison d'histogrammes ou de distributions de probabilités sont classiquement divisées en deux classes : celles qui font une comparaison « verticale » (appelées *bin-to-bin*, ou point à point), et celles qui prennent aussi en compte la distance sur le domaine de définition  $M$ , ou distance de base (appelées *cross-bins*) (Werman *et al.*, 1985 ; Rubner *et al.*, 2000 ; Pele, Werman, 2009 ; 2010 ; Rabin *et al.*, 2011). De même que pour le calcul de distances floues dans le domaine spatial (Bloch, 1999), les mesures prenant en compte la distance sur  $M$  sont mieux appropriées ici. Par exemple si deux distributions sont identiques à une translation près

et de supports (le support étant l'ensemble des points de valeur strictement positive) disjoints, seules les mesures prenant en compte la distance sur  $M$  pourront différencier les situations où cette translation varie. D'autres exemples sont proposés dans (Rubner *et al.*, 2000), illustrant que les distances point à point ne sont pas fidèles à la perception. Par exemple les avantages de la distance EMD (section 3.2.1) sur la divergence de Jeffreys sont montrés.

### 3.1. Distance sur le domaine de définition

La distance sur  $M$ , notée  $d$ , est définie de manière différente suivant la nature de  $M$  (selon qu'il s'agit d'un domaine infini ou circulaire). Si le domaine de définition de la distribution est  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{R}^+$  pour l'exemple des distributions de distances), alors la distance de base est simplement définie à partir d'une norme  $L_p$ , par exemple pour  $n = 1$  en 1D (quelle que soit la valeur de  $p$  dans ce cas) :

$$\forall (x, y) \in M^2, d(x, y) = |x - y|.$$

Pour des distributions périodiques (ou définies sur le cercle, la sphère ou une variété), la distance géodésique est utilisée. Ainsi pour une distribution périodique de période  $\rho$  en 1D nous utilisons

$$\forall (x, y) \in M^2, d(x, y) = \min(|x - y|, \rho - |x - y|) = \frac{\rho}{2} - \left| |x - y| - \frac{\rho}{2} \right|.$$

Dans l'exemple des histogrammes d'angles sur  $[0, 2\pi]$ , cette distance de base s'écrit

$$d(\theta, \theta') = \min(|\theta - \theta'|, 2\pi - |\theta - \theta'|) = \pi - \left| |\theta - \theta'| - \pi \right|.$$

Cela permet de prendre en compte le fait que des valeurs proches respectivement de 0 et de  $2\pi$  sont à faible distance l'une de l'autre. Si nous souhaitons normaliser les valeurs de la distance de base, des formulations telles que  $\frac{d(\theta, \theta')}{\pi}$  ou  $\sin \frac{|\theta - \theta'|}{2}$  peuvent être employées.

Lorsque les objets sont définis dans un espace à 3D, et donc l'histogramme d'angles est une fonction à 2D (de  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$  dans  $[0, 1]$ ), la distance angulaire géodésique entre deux valeurs  $(\alpha_1^1, \alpha_2^1)$  et  $(\alpha_1^2, \alpha_2^2)$  s'écrit

$$\arccos(\sin \alpha_2^1 \sin \alpha_2^2 + \cos \alpha_2^1 \cos \alpha_2^2 \cos(\alpha_1^2 - \alpha_1^1)).$$

Ces formulations se généralisent dans des espaces de dimension supérieure. Des distances non géodésiques peuvent également être employées, telles que des distances chordales par exemple (Golub, Van Loan, 2012).

### 3.2. Comparaison par transport optimal

Dans cette section nous proposons d'utiliser des métriques de transport (Monge, 1781 ; Kantorovich, 1942 ; Dudley, 1968) pour calculer des distances entre des distributions représentant des relations spatiales, normalisées par la somme. Nous discutons ensuite l'extension de ces métriques à des mesures qui ne nécessitent pas cette

normalisation ou dont les sommes ne sont pas égales. En particulier, nous étudions trois métriques, classiquement utilisées pour comparer des densités de probabilités (distance du terrassier ou du cantonnier, souvent appelée *earth mover's distance* ou EMD, Wasserstein, Lévy-Prokhorov), qui présentent l'avantage d'être apparentées à la même famille et d'avoir des liens avec la métrique de Hausdorff, qui peut s'exprimer en fonction d'opérateurs de morphologie mathématique.

Classiquement, la comparaison entre densités de probabilités s'effectue au travers de mesures de divergence telle que la divergence de Kullback-Leibler, la f-divergence ou de mesures de similarité associées (information mutuelle par exemple) (Cover, Thomas, 2012). Ces mesures, bien que invariantes par changement d'échelle ou par permutation, ne satisfont pas l'inégalité triangulaire et ne prennent pas toujours en compte la distance sur le domaine de définition. Les métriques de transport viennent combler ce manque.

De manière générale, une métrique de transport consiste à minimiser un coût (donné par la distance sur le domaine de définition) entre les plans de transport, les densités jointes ayant comme marginales les distributions à comparer. Plus de détails peuvent être trouvés dans (Villani, 2009 ; Delon *et al.*, 2010 ; Rabin *et al.*, 2011 ; Delon *et al.*, 2012).

### 3.2.1. Distance du terrassier ou EMD (Earth Moving Distance)

La distance EMD a été popularisée en vision par ordinateur dans (Rubner *et al.*, 2000) mais trouve des origines dans les travaux de Werman *et al.* (Werman *et al.*, 1985). C'est une distance *cross-bins* qui peut s'interpréter en termes de transport optimal comme nous le détaillerons par la suite. Elle est définie pour deux distributions  $f$  et  $g$  définies sur des domaines discrets (de taille  $m$  et  $n$ ) par :

$$\text{EMD}(f, g) = \min_{\{c_{ij}\}} \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} d_{ij}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}} \quad (4)$$

$$\text{sous les contraintes } \forall i, \sum_{j=1}^n c_{ij} \leq f_i, \forall j, \sum_{i=1}^m c_{ij} \leq g_j, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} = \min\left(\sum_{i=1}^m f_i, \sum_{j=1}^n g_j\right), c_{ij} \geq 0. \quad (6)$$

avec  $f_i$  et  $g_j$  les valeurs de  $f$  et  $g$  aux points d'indices  $i$  et  $j$  du domaine de définition,  $d_{ij}$  la distance entre ces points, et  $c_{ij}$  le flot à optimiser (intuitivement, il s'agit de la proportion de  $f_i$  qui est transportée vers  $f_j$ ).

### 3.2.2. Métrique de Wasserstein

Afin de mieux mettre en évidence son lien avec la distance de Hausdorff, nous donnons ici la définition de la métrique de Wasserstein en termes de couplage et de correspondance (Memoli, 2007 ; Villani, 2009). Cette dernière notion nous sera aussi

utile pour la réécriture de la distance de Hausdorff. Nous indexons dans ce qui suit les mesures de probabilités<sup>2</sup> par leurs supports. Nous considérons un espace métrique  $(M, d)$  complet et séparable auquel nous associons une tribu borélienne  $\mathcal{B}(M)$ . Nous notons  $\mathcal{P}(M)$  la collection des mesures de probabilités définies sur l'espace mesurable  $(M, \mathcal{B}(M))$  :  $\mathcal{P}(M) = \{(X, f_X) \mid X \in \mathcal{B}(M)\}$ , où  $f_X$  est une mesure dont le support est  $X$ .

Un *couplage* entre deux mesures  $f_X, g_Y \in \mathcal{P}(M)$  est une mesure  $\mu$  définie sur  $X \times Y$  telle que

$$\mu(X_0 \times Y) = f_X(X_0), \quad \mu(X \times Y_0) = g_Y(Y_0)$$

pour tous les ensembles boréliens  $X_0 \subset X$ ,  $Y_0 \subset Y$ . Nous notons  $\mathcal{M}(f_X, g_Y)$  l'ensemble des couplages entre  $f_X$  et  $g_Y$ . Intuitivement, un couplage est une mesure sur le produit cartésien dont les deux marginales donnent exactement les deux mesures de départ (par exemple la distribution conjointe de mesures de probabilités).

Pour deux ensembles  $X$  et  $Y$ ,  $R \subset X \times Y$  est une *correspondance* (entre  $X$  et  $Y$ ) si  $\forall x \in X, \exists y \in Y$  tel que  $(x, y) \in R$ , et  $\forall y \in Y, \exists x \in X$  tel que  $(x, y) \in R$ . Nous notons  $\mathcal{R}(X, Y)$  l'ensemble des correspondances possibles entre  $X$  et  $Y$ .

Pour  $f_X, g_Y \in \mathcal{P}(M)$ , et  $\mu$  un couplage, la métrique de Wasserstein s'écrit :

$$d_W^p(f_X, g_Y) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(f_X, g_Y)} \left( \int_{X \times Y} d(x, y)^p d\mu(x, y) \right)^{\frac{1}{p}}$$

pour  $p \geq 1$ ,

$$d_W^p(f_X, g_Y) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(f_X, g_Y)} \int_{X \times Y} d(x, y)^p d\mu(x, y)$$

pour  $0 < p < 1$ , et

$$d_W^\infty(f_X, g_Y) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(f_X, g_Y)} \sup_{(x, y) \in R(\mu)} d(x, y),$$

où  $R(\mu)$  est le support de  $\mu$  (qui est bien un couplage).

On peut remarquer que, dans le cas de probabilités discrètes et pour  $p = 1$ , la distance de Wasserstein s'écrit :

$$d_W^1(f_X, g_Y) = \min_{\mu \in \mathcal{M}(f_X, g_Y)} \left\{ \sum_{x \in X, y \in Y} d(x, y) \mu(x, y) \mid \sum_{x \in X} \mu(x, y) = g_Y(y), \sum_{y \in Y} \mu(x, y) = f_X(x) \right\}$$

2. Notons que nous n'avons pas forcément besoin d'une mesure de probabilité mais simplement d'une mesure additive.

$$\sum_{x \in X, y \in Y} \mu(x, y) = \sum_{x \in X} f_X(x) = \sum_{y \in Y} g_Y(y),$$

ce qui n'est rien d'autre que la distance EMD pour des distributions de masses égales. Notons de plus que dans le cas de distributions à une dimension, et pour  $p = 1$ , la métrique de Wasserstein se réduit à une norme  $L_1$  entre les fonctions de répartition (Villani, 2009).

### 3.2.3. Métrique de Lévy-Prokhorov

Une autre distance possible entre distributions de probabilités est la métrique de Lévy-Prokhorov  $d_{Pr} : \mathcal{P}(M)^2 \rightarrow [0, +\infty[$  (Prokhorov, 1956), qui présente entre autres l'intérêt de s'écrire sous forme d'une dilatation. Pour deux distributions  $f_X$  et  $g_Y$  (nous omettons dans la suite les indices pour simplifier les notations) elle s'écrit :

$$d_{Pr}(f, g) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \forall Z \in \mathcal{B}(M), f(Z) \leq g(\delta^\varepsilon(Z)) + \varepsilon \text{ et } g(Z) \leq f(\delta^\varepsilon(Z)) + \varepsilon\} \quad (7)$$

où  $\delta^\varepsilon(Z)$  correspond à la dilatation de taille  $\varepsilon$  de  $Z$  (voir section 3.3).

Cette distance a été introduite pour généraliser la distance de Lévy définie en 1D entre fonctions de répartition par :

$$d_L(F, G) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R}, G(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq F(x) \leq G(x + \varepsilon) + \varepsilon\}, \quad (8)$$

où  $F$  et  $G$  sont les fonctions de répartition de  $f$  et  $g$ . En effet, la tribu des boréliens sur  $\mathbb{R}$  est engendrée par exemple par les intervalles de la forme  $Z = ] - \infty, x[$ . On a alors pour ces intervalles  $\delta^\varepsilon(Z) = ] - \infty, x + \varepsilon[$  (il s'agit ici de la dilatation classique d'un ensemble par un élément structurant de taille  $\varepsilon$ ), et  $f(Z) \leq g(\delta^\varepsilon(Z)) + \varepsilon \Leftrightarrow \int_{-\infty}^x f(t)dt \leq \int_{-\infty}^{x+\varepsilon} g(t)dt + \varepsilon \Leftrightarrow F(x) \leq G(x + \varepsilon) + \varepsilon$ . La deuxième partie se montre de la même manière. Notons que dans le cas général on a seulement  $d_L \leq d_{Pr}$ .

La distance de Lévy-Prokhorov peut, à l'instar des distances EMD et de Wasserstein, être reformulée comme un problème de programmation linéaire (Garel, Massé, 2009), mettant en évidence la notion de transport. Nous exploitons cependant ici son équivalence avec la distance de Lévy puisque les distributions sont définies sur  $[0, 2\pi]$  ou  $\mathbb{R}^+$  dans nos exemples.

Cette approche sera utilisée dans la partie expérimentale pour calculer des distances entre distributions de distances (tableau 2 par exemple).

### 3.2.4. Transport sur le cercle

Plusieurs travaux se sont intéressés à la définition des métriques de transport sur le cercle (Werman *et al.*, 1986 ; Cabrelli, Molter, 1995 ; Pele, Werman, 2008 ; Delon *et al.*, 2010 ; Rabin *et al.*, 2011 ; Delon *et al.*, 2012). Dans le cadre de l'EMD, Pele a introduit la distance  $EMD_{MOD}$  où la distance sur le domaine de définition est la distance géodésique et a proposé un algorithme linéaire pour la calculer (Pele, Werman, 2008). Plus récemment, il a été démontré (Rabin *et al.*, 2011) que, dans le cas de dis-



tributions discrètes sur le cercle, pour  $p = 1$  et en considérant la distance géodésique, la distance de Wasserstein s'écrit sous la forme :

$$d_W(f, g) = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \sum_{i=0}^{\rho-1} |F(i) - G(i) - \alpha| = \|F - G - \nu\|_1,$$

où  $F$  et  $G$  sont les fonctions de répartition de  $f$  et  $g$ ,  $\nu$  la valeur médiane de l'ensemble  $\{F - G\}$ , et  $i$  correspond aux indices de la discrétisation de 0 ( $i = 0$ ) à  $2\pi$  ( $i = \rho$ ).

Dans le cas de la distance de Lévy-Prokhorov, l'extension au cas circulaire peut se faire en considérant une dilatation par un élément structurant circulaire comme cela sera défini dans la section 3.3. Cette distance est difficilement calculable et n'a d'intérêt que dans des espaces de dimension supérieure à 1. En revanche, nous pouvons exploiter la formulation de la distance de Lévy en termes de distance de Hausdorff, démontrée dans (Rachev, 1983), pour en proposer une version circulaire. En effet la distance de Lévy peut s'écrire pour des distributions sur  $M = [0, 1]$  :

$$d_L(F, G) = \max\left(\sup_{x \in M} \inf_{y \in M} \max(|x - y|, G(y) - F(x)), \sup_{y \in M} \inf_{x \in M} \max(|x - y|, F(x) - G(y))\right). \quad (9)$$

Cette formulation permet de mettre en évidence la distance sur le domaine de définition. Sa version circulaire peut alors s'écrire :

$$d_L(F, G) = \max\left(\sup_{x \in M} \inf_{y \in M} \max(d(x, y), G(y) - F(x)), \sup_{y \in M} \inf_{x \in M} \max(d(x, y), F(x) - G(y))\right), \quad (10)$$

avec  $d(x, y)$  la distance géodésique sur le cercle.

Ces formules sont détaillées dans (Bloch, Atif, 2015), où d'autres formes sont aussi proposées.

Notons que la distance entre fonctions de répartition induit directement une distance entre les distributions.

Dans les exemples de la section 4, nous appliquerons ces méthodes de transport sur le cercle au cas d'histogrammes d'angles, qui sont des exemples typiques de distributions sur le cercle (figures 6 et 7, tableau 4).

### 3.2.5. Normalisation

Dans sa formulation générale, la distance EMD présente deux avantages. Elle ne requiert pas que les histogrammes soient normalisés par leurs sommes respectives ni qu'ils soient de la même taille. Cependant elle ne satisfait l'inégalité triangulaire que sous la condition que les masses totales des histogrammes (leurs sommes respectives) soient égales. Dans ce dernier cas, Pele et Werman ont proposé une extension per-

mettant à l'EMD de vérifier les propriétés d'une métrique (Pele, Werman, 2008) (en supposant  $m = n$  dans leur démonstration) :

$$\widetilde{\text{EMD}}(f, g) = \min_{\{c_{ij}\}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} d_{ij} + \left| \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^n g_j \right| \times \alpha \max_{i,j} \{d_{ij}\}, \quad (11)$$

sous les contraintes des équations 5 et 6, avec  $\alpha \in [1/2, 1]$ .

Plus généralement, il a été démontré que toute métrique de transport  $d_T$  pouvait être étendue pour permettre la comparaison de distributions de masses non égales (chapitre 3.1/2.B de (Gromov, 1999)) comme suit :

$$D(f, g) = d_T \left( \frac{f}{f(X)}, \frac{g}{g(Y)} \right) + |f(X) - g(Y)|.$$

### 3.3. Comparaison par morphologie mathématique

L'idée dans cette partie est d'exploiter le lien entre dilatation morphologique et certaines distances (Serra, 1982 ; Bloch, 1999). Ainsi, la distance minimum entre deux ensembles est la taille minimale de boule de la métrique de base telle que la dilatation d'un des deux ensembles par cette boule intersecte l'autre ensemble. La distance de Hausdorff est égale à la taille minimale de boule telle que la dilatation de chacun des ensembles par cette boule contienne l'autre ensemble. Nous proposons d'utiliser le même principe sur des représentations floues de relations spatiales.

#### 3.3.1. Dilatation morphologique d'une distribution normalisée

Nous supposons ici que les distributions représentant les relations spatiales sont normalisées par le sup (le noyau, ensemble des points du domaine ayant une valeur égale à 1, est donc non vide), et nous considérons des éléments structurants binaires pour simplifier. Si le domaine de définition  $M$  de la distribution est la droite réelle ou  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{R}^+$  pour des distributions de distances) la morphologie mathématique classique s'applique et on a :

$$\forall x \in M, \delta_B(f)(x) = \sup_{y \in B_x} f(y), \quad (12)$$

où  $f$  est la distribution à dilater,  $B$  l'élément structurant et  $B_x$  son translaté en  $x$  ( $B_x = x + B$ ).

Lorsque la distribution est périodique, cette périodicité doit être prise en compte dans la dilatation et l'élément structurant. Considérons une distribution  $f$  sur le cercle unité. Nous définissons la dilatation par un élément structurant de taille  $\alpha$  par :

$$\delta_{B^\alpha}(f)(\theta) = \sup_{\theta' \in B_\theta^\alpha} f(\theta') \quad (13)$$

où  $B^\alpha$  est un élément structurant d'ouverture angulaire  $\alpha$ , que nous définissons par :

- si  $\alpha \leq \pi$  :
  - $B_\theta^\alpha = [\theta - \alpha, \theta + \alpha]$  si  $\theta - \alpha \geq 0$  et  $\theta + \alpha \leq 2\pi$
  - $B_\theta^\alpha = [0, \theta + \alpha] \cup [\theta - \alpha + 2\pi, 2\pi]$  si  $\theta - \alpha \leq 0$  et  $\theta + \alpha \leq 2\pi$
  - $B_\theta^\alpha = [\theta - \alpha, 2\pi] \cup [0, \theta + \alpha - 2\pi]$  si  $\theta - \alpha \geq 0$  et  $\theta + \alpha \geq 2\pi$
- si  $\alpha \geq \pi$  :  $B_\theta^\alpha = [0, 2\pi]$ . Notons que le cas  $\theta - \alpha \leq 0$  et  $\theta + \alpha \geq 2\pi$  implique  $\alpha \geq \pi$ .

La figure 1 illustre la dilatation d'une distribution sur  $[0, 2\pi]$ .

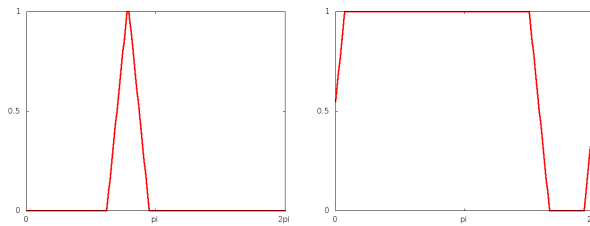


Figure 1. Distribution sur  $[0, 2\pi]$  et exemple de dilatation prenant en compte la périodicité

Ces définitions s'étendent à une distribution  $f$  sur la sphère unité, soit en définissant deux éléments structurants en considérant séparément la longitude et la latitude, soit en définissant un élément structurant par seuillage de la distance géodésique sur la sphère.

La normalisation garantit que le noyau de la distribution est étendu selon la taille de l'élément structurant par dilatation. En particulier, il est toujours possible de trouver une taille de dilatation telle qu'un point donné du domaine de définition appartienne au noyau de la distribution dilatée.

Il est facile de montrer

- que  $B^\alpha$  est une boule de rayon  $\alpha$  de  $d$
- et que  $\forall \theta \in [0, 2\pi], \delta_{B^\alpha}(f)(\theta) = \sup\{f(\theta') \mid \theta' \in [0, 2\pi], d(\theta, \theta') \leq \alpha\}$ .

### 3.3.2. Distance minimum par dilatation

Une fois que la dilatation est définie, la distance minimum peut être calculée selon le principe décrit en introduction de cette section (Serra, 1982 ; Bloch, 1999). Soit  $\Delta_\cap(f, g)$  le degré d'intersection entre  $f$  et  $g$ . Dans le cas flou général, la distance minimum entre deux distributions  $f$  et  $g$  définies sur  $M$  est un nombre flou défini par (Bloch, 1999) :

$$d_{\min}(f, g)(0) = \Delta_\cap(f, g)$$

et

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*}, d_{\min}(f, g)(\lambda) = t(\Delta_\cap(f, \delta_{B^\lambda}(g)), \inf_{0 \leq \lambda' < \lambda} c(\Delta_\cap(f, \delta_{B^{\lambda'}}(g)))) \quad (14)$$

où  $B^\lambda$  est un élément structurant de taille  $\lambda$ ,  $t$  est une t-norme et  $c$  une complémentation<sup>3</sup>. Le degré d’intersection peut être défini classiquement par :

$$\Delta_\cap(f, g) = \sup_{x \in M} t(f(x), g(x)).$$

Les propriétés de la distance minimum floue peuvent être trouvées dans (Bloch, 1999). Si l’on souhaite réduire ce nombre flou à un nombre précis, nous proposons d’utiliser soit le centre de gravité :

$$\frac{\int_0^\infty d_{\min}(f, g)(\lambda) \lambda d\lambda}{\int_0^\infty d_{\min}(f, g)(\lambda) d\lambda},$$

soit la définition suivante :

$$d_{\min}(f, g) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \Delta_\cap(\delta_{B^\lambda}(f), g) = 1\} \tag{15}$$

avec une définition binaire du degré d’intersection, telle que :

$$\Delta_\cap(f, g) = 1 \Leftrightarrow \exists x \in M \mid \min(f(x), g(x)) \neq 0.$$

En pratique les valeurs sont quantifiées, et les propriétés de la dilatation floue (Bloch, 1999 ; 2009) permettent de ne considérer pour  $\lambda'$  que la plus grande valeur immédiatement inférieure à  $\lambda$  dans l’équation 14.

Un exemple de distribution sur  $[0, 2\pi]$  (histogramme d’angles par exemple) est montré dans la figure 2, avec trois translations. Les valeurs de distances selon l’équation 15 sont données dans le tableau 1. Comme cela était attendu sur cet exemple très simple, les résultats correspondent à la distance minimum entre les supports des distributions.

*Tableau 1. Distances minimum et de Hausdorff, calculées par dilatations morphologiques (équations 15 et 17), entre la première distribution de la figure 2 et toutes les autres (valeurs en radians dans  $[0, 2\pi]$ )*

Distance	$T = 0$	$T = 2,45$	$T = 3,68$	$T = 4,9$
Minimum	0	1,47	1,62	0,39
Hausdorff	0	2,45	2,60	1,37

Un exemple de distance minimum définie comme un nombre flou est donné dans le cas de distributions de distances entre structures du cerveau à la figure 15.

3. Une t-norme est une conjonction floue, définie comme un opérateur  $t$  de  $[0, 1] \times [0, 1]$  dans  $[0, 1]$  commutatif, associatif, croissant par rapport aux deux variables, et tel que  $\forall a \in [0, 1], t(a, 0) = 1$  et  $t(1, 1) = 1$ . Une complémentation généralise au cas des ensembles flous la notion de complémentaire d’un ensemble, un exemple typique étant  $c(a) = 1 - a$  (Dubois, Prade, 1980).

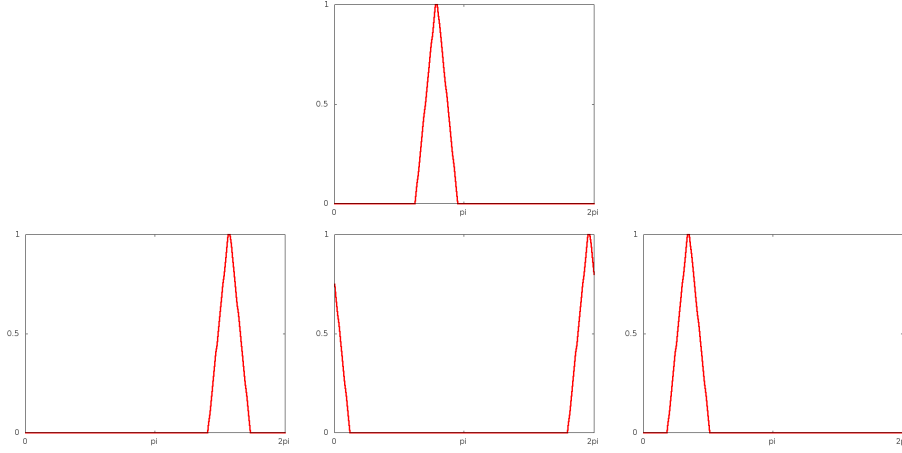


Figure 2. Exemple de distribution sur  $[0, 2\pi]$  et trois translations  
 ( $T = 2, 45, T = 3, 68, T = 4, 9$ )

3.3.3. Distance de Hausdorff par dilatation

Selon la même approche, la distance de Hausdorff peut être définie à partir d'un degré d'inclusion  $\Delta_{\subseteq}(f, g)$  (degré avec lequel  $f$  est inclus dans  $g$ ) et de dilatations (Bloch, 1999) :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*}, d_H(f, g)(\lambda) = t(d'_H(f, g)(\lambda), d'_H(g, f)(\lambda)) \tag{16}$$

avec

$$d'_H(f, g)(\lambda) = t(\Delta_{\subseteq}(f, \delta_{B^\lambda}(g)), \inf_{0 \leq \lambda' < \lambda} c(\Delta_{\subseteq}(f, \delta_{B^{\lambda'}}(g))))$$

et

$$d'_H(f, g)(0) = \Delta_{\subseteq}(f, g).$$

Le degré d'inclusion s'écrit classiquement :

$$\Delta_{\subseteq}(f, g) = \inf_{x \in M} I(f(x), g(x))$$

où  $I$  est une implication floue<sup>4</sup>. Les propriétés de la distance de Hausdorff floue, ainsi que des références à d'autres définitions de cette distance, peuvent être trouvées dans (Bloch, 1999). Pour réduire ce nombre flou à un nombre précis, nous proposons, comme pour la distance minimum, d'utiliser son centre de gravité, ou la définition suivante :

$$d_H(f, g) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x \in M, \delta_{B^\lambda}(f)(x) \geq g(x) \text{ et } \delta_{B^\lambda}(g)(x) \geq f(x)\}, \tag{17}$$

4. Une implication floue est un opérateur  $I$  de  $[0, 1] \times [0, 1]$  dans  $[0, 1]$  décroissant par rapport à la première variable, croissant par rapport à la seconde, et tel que  $I(0, 0) = I(0, 1) = I(1, 1) = 1, I(1, 0) = 0$  (Dubois, Prade, 1980).

ce qui correspond à une définition nette de l'inclusion. Les valeurs obtenues pour les exemples de la figure 2 sont données dans le tableau 1. Elles correspondent à la distance entre les noyaux des distributions, ce qui était attendu pour ce cas simple.

Un exemple de distance de Hausdorff définie comme un nombre flou est donné dans le cas de distributions de distances entre structures du cerveau à la figure 15.

### 3.4. Propriétés

Les définitions proposées ont les propriétés suivantes (les preuves sont immédiates) :

- dans le cas où les distributions sont des fonctions de Dirac (une seule valeur non nulle, en  $f_0$  et  $g_0$ ), les distances proposées sont égales à  $d(f_0, g_0)$ , où  $d$  est la distance de base sur le domaine de définition des distributions (la preuve est immédiate) ;
- toutes les distances proposées sont positives et symétriques, par construction ;
- les métriques de transport satisfont l'inégalité triangulaire ;
- la distance morphologique minimum, comme dans le cas ensembliste classique, n'est pas séparable (elle vaut 0 dès que les supports des distributions s'intersectent) et ne satisfait pas l'inégalité triangulaire ;
- la distance morphologique de Hausdorff avec une version stricte du degré d'inclusion (équation 17) est séparable et vérifie l'inégalité triangulaire, alors que la version floue du degré d'inclusion donne une distance (équation 16) qui est séparable pour l'implication de Lukasiewicz ( $I$  telle que  $I(a, b) = \min(1, 1 - a + b)$ ), mais ne satisfait pas l'inégalité triangulaire (Bloch, 1999) ;
- les métriques de transport considérées dans cet article correspondent à la distance de Hausdorff entre les supports dans le cas de distributions uniformes sur le support, comme le montre la réécriture de la distance de Hausdorff entre ensembles en termes de correspondance (section 3.2.2) :

$$d_H(X, Y) = \inf_{R \in \mathcal{R}(X, Y)} \sup_{(x, y) \in R} d(x, y).$$

## 4. Exemples

Nous présentons dans cette section deux exemples pour illustrer les résultats obtenus avec les approches proposées. L'objectif est de valider expérimentalement les approches proposées, en montrant en particulier que les changements dans les relations spatiales entre les objets présents dans les images sont bien mis en évidence dans les résultats.

### 4.1. Evolution temporelle de relations spatiales

Le premier exemple illustre l'utilisation des mesures proposées pour quantifier l'évolution temporelle de relations spatiales dans des séquences vidéo. A terme, les

résultats sont destinés à être utilisés dans des méthodes de détection d'événements dans des vidéos, caractérisés par des changements dans les relations spatiales (par exemple des personnes qui se rejoignent, marchent ensemble un certain temps, puis partent dans des directions différentes).

Quelques images d'une vidéo synthétique sont montrées dans la figure 3. L'objet gris se rapproche de l'objet blanc selon une direction constante, puis change de direction et s'éloigne. Nous montrons ici que les approches proposées permettent de bien retrouver ce changement de direction, qui se produit vers le milieu de la séquence. Les histogrammes d'angles  $ha$  entre ces deux objets, calculés comme décrit dans la section 2, sont illustrés dans la figure 4.



Figure 3. Quelques images d'une séquence vidéo synthétique. L'objet gris se rapproche de l'objet blanc selon une direction constante, puis change de direction et s'éloigne dans cette nouvelle direction

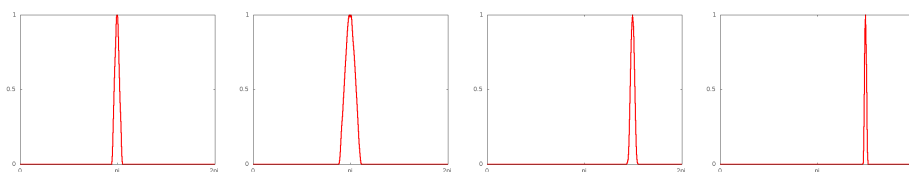


Figure 4. Histogrammes d'angles entre les deux objets de la séquence de la figure 3

Ces histogrammes sont ensuite comparés selon les différentes mesures proposées, en calculant la distance entre l'histogramme à l'instant  $t$  et l'histogramme dans la première image de la séquence. Les courbes montrant cette distance au cours du temps sont données dans la figure 5 pour les distances minimum et de Hausdorff morphologiques (calculées par dilations), dans la figure 6 pour l'EMD (avec les deux normalisations, par le sup et par la somme), et dans la figure 7 pour la distance de Lévy-Prokhorov. Dans toutes ces courbes, on remarque un saut au moment du changement de direction, ce qui était attendu. On notera aussi la grande similarité entre ces courbes, en particulier entre celle de la distance de Hausdorff et celle de l'EMD obtenue pour la normalisation par le sup. Les différentes définitions proposées permettent donc bien de détecter le changement vers le milieu de la séquence. Une comparaison plus approfondie reste à développer pour identifier si une définition peut être plus appropriée qu'une autre en fonction de ses propriétés, de son temps de calcul ou encore de l'application.

Considérons maintenant un autre exemple, dans lequel un objet tourne autour d'un autre, puis s'éloigne. La vidéo présente donc des changements de direction que nous

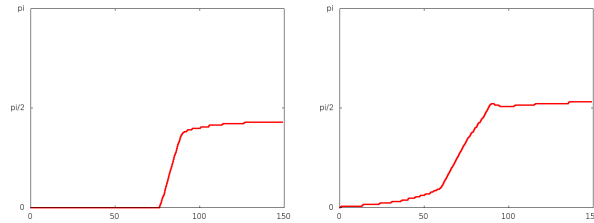


Figure 5. Distances minimum (à gauche) et de Hausdorff (à droite) entre l'histogramme de chaque image et celui de la première image

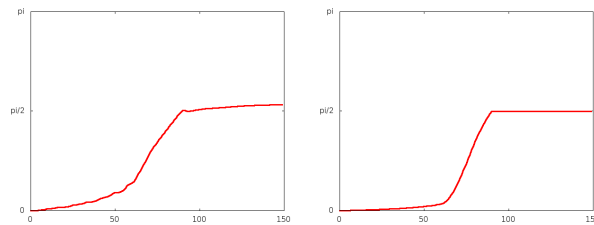


Figure 6. Distance EMD entre l'histogramme de chaque image et celui de la première image, les histogrammes étant normalisés par le sup (à gauche) et par la somme (à droite)

cherchons à mettre en évidence ici. Quelques images de la séquence vidéo sont montrées dans la figure 8, et les histogrammes d'angles entre les deux objets dans la figure 9. La distance de Hausdorff et la distance minimum entre l'histogramme de chaque image et celui de la première sont illustrées à la figure 10, et correspondent là encore bien à l'intuition. Les distances EMD et de Lévy-Prokhorov sont illustrées dans les figures 11 et 12. Comme dans le premier exemple, les courbes sont très similaires, en particulier celle de la distance de Hausdorff et celle de l'EMD obtenue pour la normalisation par le sup.

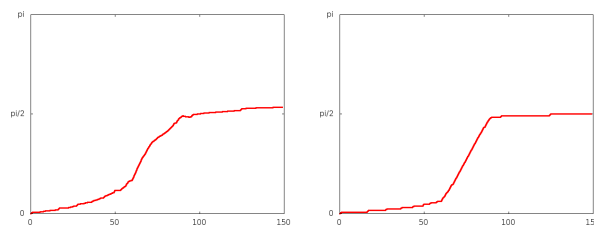


Figure 7. Distance de Lévy-Prokhorov entre l'histogramme de chaque image et celui de la première image, les histogrammes étant normalisés par le sup (à gauche) et par la somme (à droite)



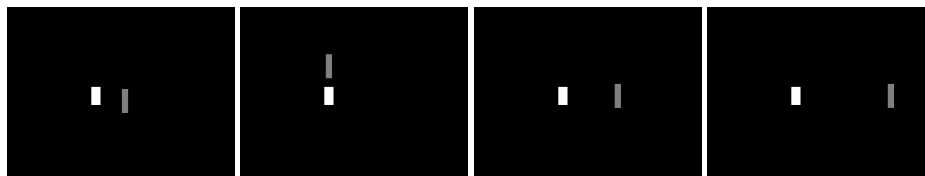


Figure 8. Quelques images d'une séquence vidéo synthétique. L'objet gris tourne autour de l'objet blanc, puis s'éloigne dans une direction constante

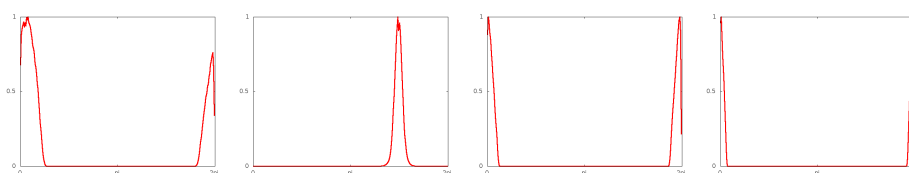


Figure 9. Histogrammes d'angles entre les deux objets de la séquence de la figure 8

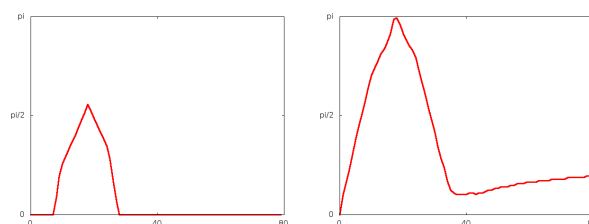


Figure 10. Distances minimum (à gauche) et de Hausdorff (à droite) entre l'histogramme de chaque image et celui de la première image

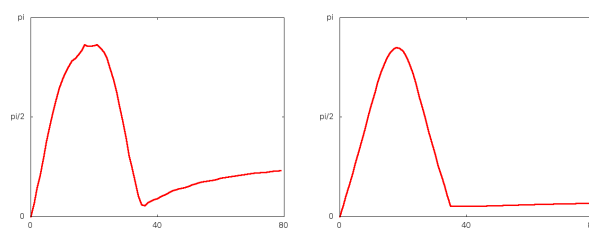


Figure 11. Distance EMD entre l'histogramme de chaque image et celui de la première image, les histogrammes étant normalisés par le sup (à gauche) et par la somme (à droite)

#### 4.2. Exemples sur des structures cérébrales

Ce deuxième exemple provient de données réelles. Nous avons segmenté quelques structures dans un volume IRM du cerveau et les résultats, définis comme des en-

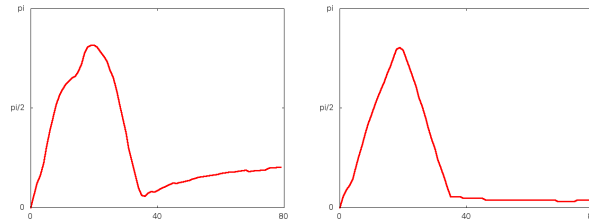


Figure 12. Distance de Lévy-Prokhorov entre l’histogramme de chaque image et celui de la première image, les histogrammes étant normalisés par le sup (à gauche) et par la somme (à droite)

sembles flous sur l’espace de l’image afin de représenter l’imprécision dans la segmentation, sont illustrés dans la figure 13.

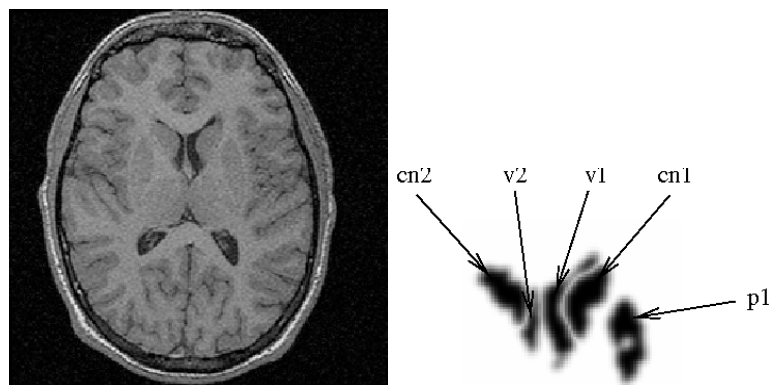


Figure 13. Une coupe d’un volume IRM et représentations floues de quelques structures du cerveau, extraites de ce volume (les niveaux de gris les plus sombres représentent les forts degrés d’appartenance)

Des distributions de distance  $d_{A,B}^{Haus}$ , calculées par les méthodes morphologiques proposées dans (Bloch, 1999) pour deux paires  $(A, B)$  de structures (calculées selon l’équation 16 appliquée dans le domaine spatial), sont illustrées dans la figure 14. Puis la comparaison entre ces deux distributions, après normalisation par le sup, est calculée selon les équations 14 et 16 (figure 15). La distribution de distances entre  $v2$  et  $v1$  est concentrée autour de 20, et celle entre  $v2$  et  $p1$  autour de 40, illustrant que  $v1$  est plus proche de  $v2$  que  $p1$  ne l’est. La comparaison proposée permet ainsi de quantifier la notion de “plus proche”. Ce type d’information est utile par exemple dans les méthodes de reconnaissance de structures à partir de modèles de connaissances, exprimant des relations spatiales absolues ou relatives entre les objets à reconnaître. La distance minimum traduit l’écart entre les supports (faible ici), alors que la distance de Hausdorff traduit l’écart entre les noyaux (autour de 30), ce qui correspond bien

à l'intuition. Les résultats complets entre toutes les structures donnent des résultats similaires.

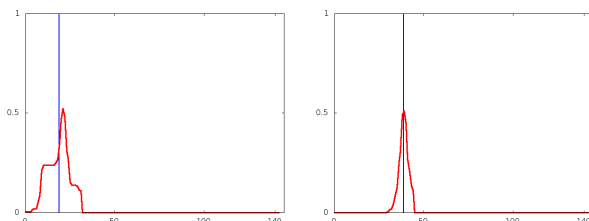


Figure 14. Distributions de distances entre  $v_2$  et  $v_1$ , et entre  $v_2$  et  $p_1$  (structures floues de la figure 13). La valeur moyenne est indiquée par la ligne bleue

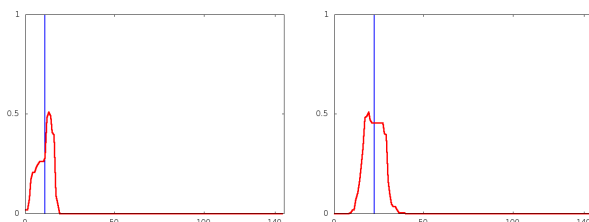


Figure 15. Distances minimum et de Hausdorff entre les deux distributions de la figure 14

Les distances de Lévy-Prokhorov sont données dans le tableau 2. Les mêmes ordres de grandeur que les valeurs moyennes de Hausdorff sont obtenus.

Tableau 2. Distances de Lévy-Prokhorov avec la normalisation par la somme dans la partie à droite en haut et avec la normalisation par le max dans la partie gauche en bas (équation 9). Les valeurs correspondant aux cas illustrés figures 14 et 15 sont en gras

	$d_H(v_2, nc1)$	$d_H(v_2, nc2)$	$d_H(v_2, p1)$	$d_H(v_2, v1)$	$d_H(v_2, v2)$
$d_H(v_2, nc1)$	0	8	13	11	21
$d_H(v_2, nc2)$	8,01	0	21	5	14
$d_H(v_2, p1)$	13,11	21,09	0	<b>22</b>	33
$d_H(v_2, v1)$	16,54	10,53	<b>27,44</b>	0	13
$d_H(v_2, v2)$	26,33	19,32	38,22	13,21	0

Des histogrammes d'angles entre certaines structures sont illustrés dans la figure 16. Là encore, l'idée à terme est de guider une méthode de reconnaissance à partir de relations spatiales, directionnelles cette fois. Les distances morphologiques de Hausdorff ont été calculées selon l'équation 17 et la dilatation de l'équation 13 (pour des distributions périodiques). Là encore les résultats (tableau 3) correspondent bien à l'intuition. Sur ces exemples, la distance minimum (équation 15) vaut toujours 0. Les

résultats pour les distances de Lévy-Prokhorov et de Wasserstein sont donnés dans les tableaux 4 et 5. Les valeurs obtenues sont toutes du même ordre de grandeur. De plus, on observe dans ces résultats que les ordres entre les valeurs obtenues entre différentes paires d'objets ne changent quasiment pas selon la méthode employée. La portée éventuellement plus générale de cette remarque reste à étudier.

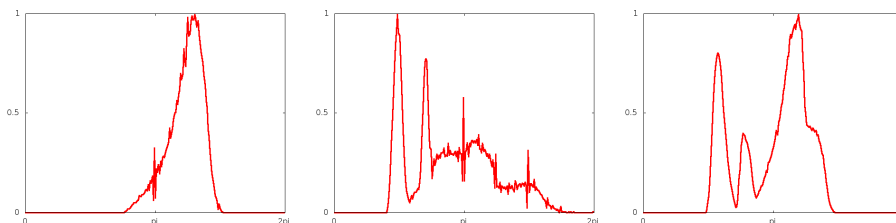


Figure 16. Histogrammes d'angles entre  $cn1$  et  $p1$ ,  $v1$  et  $cn1$ ,  $v1$  et  $p1$  de la figure 13

Tableau 3. Distances de Hausdorff entre les histogrammes de la figure 16. Les distances sont données en radians dans  $[0, 2\pi]$

	$ha_{cn1,p1}$	$ha_{v1,cn1}$	$ha_{v1,p1}$
$ha_{cn1,p1}$	0		
$ha_{v1,cn1}$	2,70	0	
$ha_{v1,p1}$	2,09	2,31	0

Tableau 4. Distances de Lévy-Prokhorov entre les histogrammes d'angles de la figure 16 avec la normalisation par la somme dans la partie à droite en haut et avec la normalisation par le max dans la partie gauche en bas (équation 10)

	$ha_{cn1,p1}$	$ha_{v1,cn1}$	$ha_{v1,p1}$
$ha_{cn1,p1}$	0	1,23	1,01
$ha_{v1,cn1}$	1,40	0	0,52
$ha_{v1,p1}$	1,36	0,7	0

Enfin, nous considérons un exemple où l'objectif est le suivi de l'évolution d'une pathologie. La figure 17 montre une coupe extraite d'un volume IRM, à deux dates différentes. A titre d'illustration, nous nous intéressons à la distance entre la tumeur et le thalamus (entourés en blanc sur la figure). Une vue 3D de ces deux structures est montrée dans la figure 18. Dans cet exemple, la tumeur a grossi, ce qui entraîne une diminution de sa distance au thalamus, que nous nous proposons de quantifier.

La distance est évaluée ici par l'histogramme des distances. Les histogrammes obtenus aux deux instants sont montrés à la figure 19.

Enfin, nous calculons la distance entre ces deux distributions de distances, par les méthodes proposées dans cet article. La distance calculée comme un nombre flou par morphologie mathématique est illustrée à la figure 20. Son centre de gravité vaut

Tableau 5. Distances de Wasserstein ( $p = 1$ , EMD) entre les histogrammes d'angles de la figure 16 avec la normalisation par la somme dans la partie à droite en haut et avec la normalisation par le max dans la partie gauche en bas

	$ha_{cn1,p1}$	$ha_{v1,cn1}$	$ha_{v1,p1}$
$ha_{cn1,p1}$	0	1,1	0,74
$ha_{v1,cn1}$	1,28	0	0,43
$ha_{v1,p1}$	1,09	0,61	0

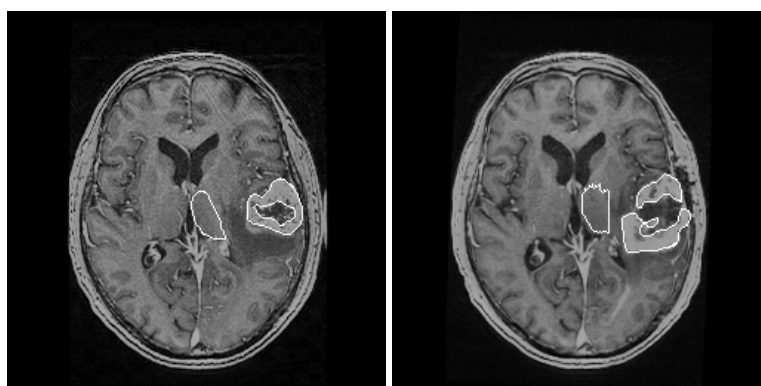


Figure 17. Une coupe extraite de deux volumes IRM du même patient, à deux dates différentes. Les contours du thalamus et de la tumeur sont superposés aux images

16,3, ce qui permet de quantifier de combien la tumeur s'est rapprochée du thalamus pendant son évolution (croissance ici). Les distances de Lévy et EMD avec une normalisation par le max donnent des valeurs légèrement plus grandes (de l'ordre de 20),

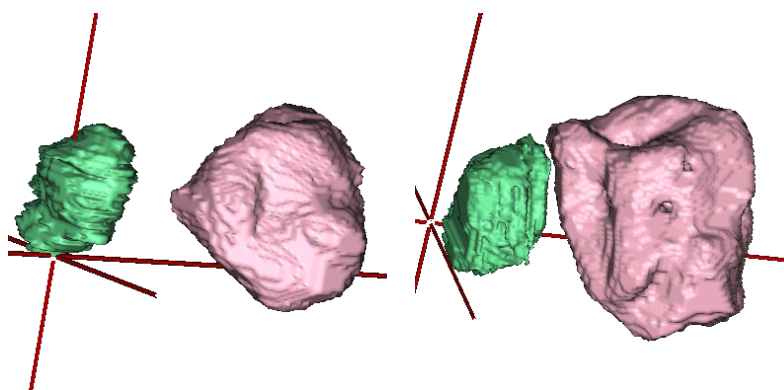


Figure 18. Vue 3D des deux structures (thalamus et tumeur), aux deux instants

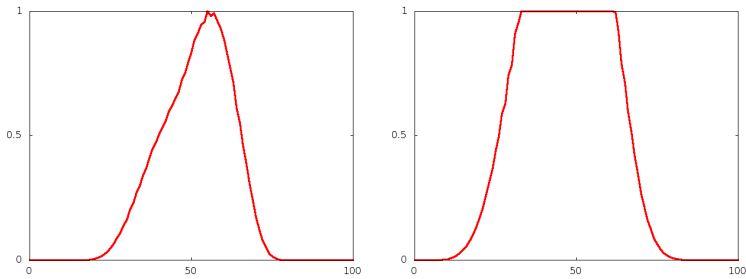


Figure 19. Histogramme des distances entre le thalamus et la tumeur, aux deux dates

mais du même ordre de grandeur. Lorsque la normalisation est effectuée par la somme, les valeurs sont plus petites (7 pour Lévy et 5,2 pour EMD).

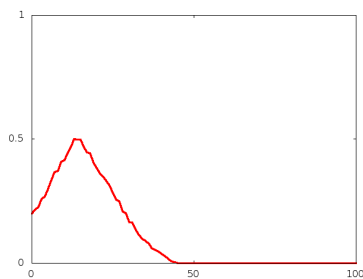


Figure 20. Distance entre les deux histogrammes de distance de la figure 19 (nombre flou calculé par morphologie mathématique)

## 5. Conclusion

Nous avons proposé dans cet article de comparer des relations spatiales représentées par des distributions ou des nombres flous par deux approches, l'une fondée sur le transport optimal et l'autre sur des distances calculées à partir de dilations morphologiques.

L'exemple sur des vidéos synthétiques montre que les distances proposées évoluent dans la séquence de manière conforme à l'intuition, et permettent en particulier de détecter des changements dans les relations spatiales entre les objets observés. D'autres exemples, en particulier sur des images réelles, ont permis de montrer l'intérêt des évaluations sous forme de nombres ou sous forme de nombres flous, à la fois pour des relations de distance et pour des relations directionnelles.

Outre la poursuite des expérimentations sur d'autres images et d'autres relations spatiales, les perspectives envisagées concernent l'étude de liens entre les distances

proposées, d'une part entre les différentes métriques de la section 3.2, et d'autre part entre les différentes versions de la distance de Hausdorff proposées (par transport et par morphologie mathématique), en prolongement des travaux présentés dans (Bloch, Atif, 2015). Ces liens, associés aux propriétés des distances, devraient également nous permettre de définir des critères de choix entre les différentes distances proposées, afin de conduire des expérimentations plus complètes sur des applications réelles. Si les valeurs absolues données par les différentes définitions et modes de calcul ne sont pas forcément comparables, il peut être en revanche intéressant de comparer les rangs entre les distances obtenues pour diverses paires d'objets, selon les différents modes de calcul. Les indices de Kendall (Kendall, Smith, 1939) permettent par exemple de comparer les classements. Dans nos expériences, les classements sont presque toujours identiques mais cela reste à approfondir.

#### Remerciements

*Les travaux présentés dans cet article ont été en partie financés par l'ANR (projets LOGIMA et DESCRIBE). Les auteurs remercient Julie Delon pour les discussions sur les méthodes de transport et Abdalbassir Abou-Elailah pour la simulation des séquences vidéo.*

#### Bibliographie

- Aksoy S. (2006). Modeling of remote sensing image content using attributed relational graphs. In D. Yeung (Ed.), *Structural, syntactic, and statistical pattern recognition*, vol. LNCS 4109, p. 475-483. Berlin, Heidelberg, Springer.
- Bloch I. (1999). On Fuzzy Distances and their Use in Image Processing under Imprecision. *Pattern Recognition*, vol. 32, n° 11, p. 1873-1895.
- Bloch I. (2005). Fuzzy Spatial Relationships for Image Processing and Interpretation: A Review. *Image and Vision Computing*, vol. 23, n° 2, p. 89-110.
- Bloch I. (2009). Duality vs. Adjunction for Fuzzy Mathematical Morphology and General Form of Fuzzy Erosions and Dilations. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 160, p. 1858-1867.
- Bloch I., Atif J. (2014). Comparaison de relations spatiales floues - Approches par transport optimal et morphologie mathématique. In *Rencontres francophones sur la logique floue et ses applications - LFA*, p. 133-140. Cargèse, France.
- Bloch I., Atif J. (2015). Hausdorff distances between distributions using optimal transport and mathematical morphology. In *12th international symposium on mathematical morphology*, vol. LNCS 9082, p. 522-534. Reykjavik, Iceland.
- Bloch I., Ralescu A. (2003). Directional Relative Position between Objects in Image Processing: A Comparison between Fuzzy Approaches. *Pattern Recognition*, vol. 36, p. 1563-1582.
- Cabrelli C. A., Molter U. M. (1995). The Kantorovich metric for probability measures on the circle. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 57, n° 3, p. 345 - 361.
- Cesar R., Bengoetxea E., Bloch I., Larranaga P. (2005). Inexact Graph Matching for Model-Based Recognition: Evaluation and Comparison of Optimization Algorithms. *Pattern Recognition*, vol. 38, p. 2099-2113.

- Colliot O., Camara O., Bloch I. (2006). Integration of Fuzzy Spatial Relations in Deformable Models - Application to Brain MRI Segmentation. *Pattern Recognition*, vol. 39, p. 1401-1414.
- Conte D., Foggia P., Sansone C., Vento M. (2004). Thirty years of graph matching in pattern recognition. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, vol. 18, n° 3, p. 265–298.
- Cover T. M., Thomas J. A. (2012). *Elements of information theory*. John Wiley & Sons.
- Delon J., Salomon J., Sobolevski A. (2010). Fast Transport Optimization for Monge Costs on the Circle. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 70, n° 7, p. 2239–2258.
- Delon J., Salomon J., Sobolevski A. (2012). Local matching indicators for transport problems with concave costs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol. 26, n° 2, p. 801–827.
- Deruyver A., Hodé Y., Brun L. (2009). Image interpretation with a conceptual graph: Labeling over-segmented images and detection of unexpected objects. *Artificial Intelligence*, vol. 173, n° 14, p. 1245–1265.
- Dubois D., Prade H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. New-York, Academic Press.
- Dudley R. M. (1968). Distances of probability measures and random variables. *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 39, n° 5, p. 1563-1572.
- Fouquier G., Atif J., Bloch I. (2012). Sequential model-based segmentation and recognition of image structures driven by visual features and spatial relations. *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 116, n° 1, p. 146–165.
- Freeman J. (1975). The Modelling of Spatial Relations. *Computer Graphics and Image Processing*, vol. 4, n° 2, p. 156-171.
- Garel B., Massé J.-C. (2009). Calculation of the Prokhorov distance by optimal quantization and maximum flow. *ASTA Advances in Statistical Analysis*, vol. 93, n° 1, p. 73-88.
- Gasós J., Saffiotti A. (2000). Using Fuzzy Sets to Represent Uncertain Spatial Knowledge in Autonomous Robots. *Journal of Spatial Cognition and Computation*, vol. 1, p. 205-226.
- Golub G. H., Van Loan C. F. (2012). *Matrix computations* (vol. 3). JHU Press.
- Gromov M. (1999). Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. *Progress in Mathematics*, vol. 152.
- Guo J., Zhou H., Zhu C. (2013). Cascaded classification of high resolution remote sensing images using multiple contexts. *Information Sciences*, vol. 221, p. 84–97.
- Kantorovich L. (1942). On the transfer of masses. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR (en russe)*, vol. 37, n° 2, p. 227-229.
- Kendall M. G., Smith B. B. (1939). The problem of m rankings. *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 10, n° 3, p. 275–287.
- Kuipers B. (1978). Modeling Spatial Knowledge. *Cognitive Science*, vol. 2, p. 129-153.
- Le Ber F., Lieber J., Napoli A. (2006). Les systèmes à base de connaissances. In J. Akoka, I. Comyn Wattiau (Eds.), *Encyclopédie de l'informatique et des systèmes d'information*, p. 1197–1208. Vuibert.



- Matsakis P., Wendling L. (1999). A New Way to Represent the Relative Position between Areal Objects. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 21, n° 7, p. 634-642.
- Memoli F. (2007). On the use of Gromov-Hausdorff distances for shape comparison. In *Eurographics symposium on point-based graphics*, p. 81-90.
- Miyajima K., Ralescu A. (1994). Spatial Organization in 2D Images. In *Third IEEE international conference on fuzzy systems, FUZZ-IEEE'94*, p. 100-105. Orlando, FL.
- Mohan R., Nevatia R. (1992). Perceptual organization for scene segmentation and description. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 14, n° 6, p. 616-635.
- Monge G. (1781). Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. In *Histoire de l'académie royale des sciences*.
- Nempont O., Atif J., Bloch I. (2013). A constraint propagation approach to structural model based image segmentation and recognition. *Information Sciences*, vol. 246, p. 1-27.
- Pele O., Werman M. (2008). A linear time histogram metric for improved SIFT matching. In *European conference on computer vision, ECCV*, p. 495-508.
- Pele O., Werman M. (2009). Fast and robust earth mover's distances. In *IEEE 12th international conference on computer vision*, p. 460-467.
- Pele O., Werman M. (2010). The quadratic-chi histogram distance family. In *European conference on computer vision*, p. 749-762.
- Prokhorov Y. (1956). Convergence of random processes and limit theorems in probability theory. *Theory of Probability & Its Applications*, vol. 1, n° 2, p. 157-214.
- Rabin J., Delon J., Gousseau Y. (2011). Transportation distances on the circle. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 41, n° 1-2, p. 147-167.
- Rachev S. T. (1983). Minimal metrics in the real random variables space. In *Stability problems for stochastic models*, p. 172-190.
- Rubner Y., Tomasi C., Guibas L. J. (2000). The earth mover's distance as a metric for image retrieval. *International Journal of Computer Vision*, vol. 40, n° 2, p. 99-121.
- Serra J. (1982). *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, New-York.
- Vanegas M.-C., Bloch I., Inglada J. (2013). Alignment and parallelism for the description of high resolution remote sensing images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 51, n° 6, p. 3542-3557.
- Villani C. (2009). *Optimal transport: old and new*. Berlin, Springer.
- Werman M., Peleg S., Melter R., Kong T. (1986). Bipartite graph matching for points on a line or a circle. *Journal of Algorithms*, vol. 7, n° 2, p. 277 - 284.
- Werman M., Peleg S., Rosenfeld A. (1985). A distance metric for multidimensional histograms. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, vol. 32, n° 3, p. 328-336.