

Morphologie mathématique - I

Isabelle Bloch

<http://perso.telecom-paris.fr/bloch>

LTCI, Télécom ParisTech, Institut Polytechnique de Paris



Quelques références

- M. Schmitt et J. Mattioli, *Morphologie mathématique*, Masson, Paris, 1994.
- J. Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, New-York, 1982.
- J. Serra (Ed.), *Image Analysis and Mathematical Morphology, Part II: Theoretical Advances*, Academic Press, London, 1988.
- P. Soille, *Morphological Image Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- L. Najman, H. Talbot (Eds.), *Mathematical Morphology: From Theory to Applications*, ISTE-Wiley, 2010.

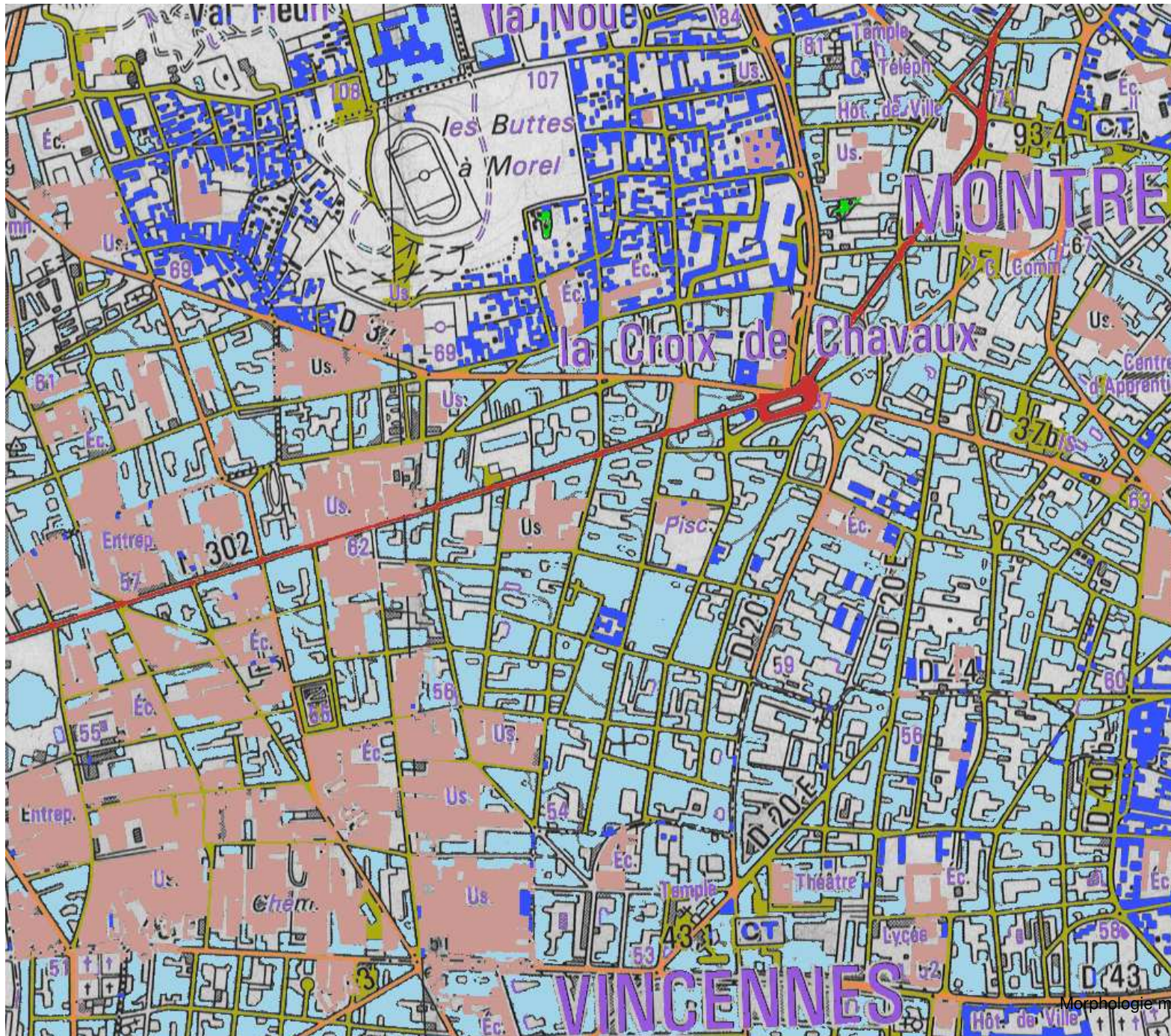
Introduction

- Origine : étude des milieux poreux
- Principe : étude des objets (images) à partir d'informations :
 - de taille, géométrie, topologie
 - de niveaux de gris ou couleurs
 - de voisinage
- Fondements mathématiques :
 - théorie des ensembles
 - topologie
 - géométrie
 - algèbre (théorie des treillis)
 - probabilités, ensembles fermés aléatoires
 - fonctions
- Caractéristiques principales des transformations :
 - non linéaires
 - non inversibles
 - fortes propriétés
 - algorithmes associés

Exemple



Exemple



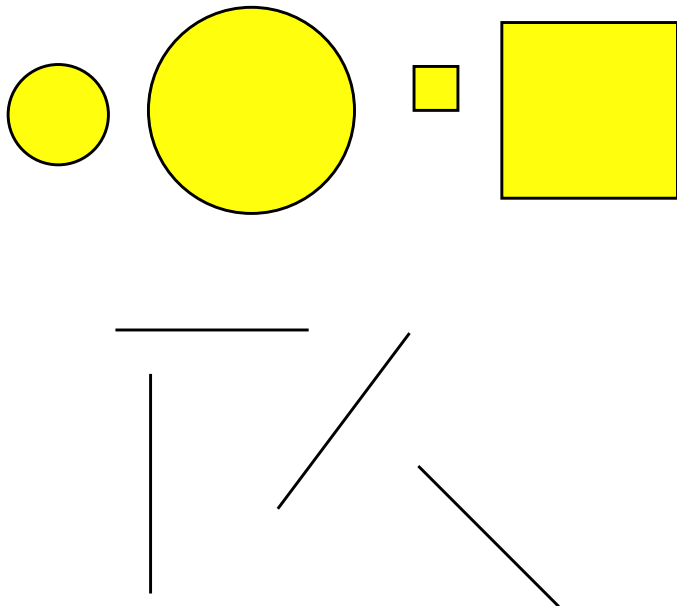
Forme ou relations spatiales ?



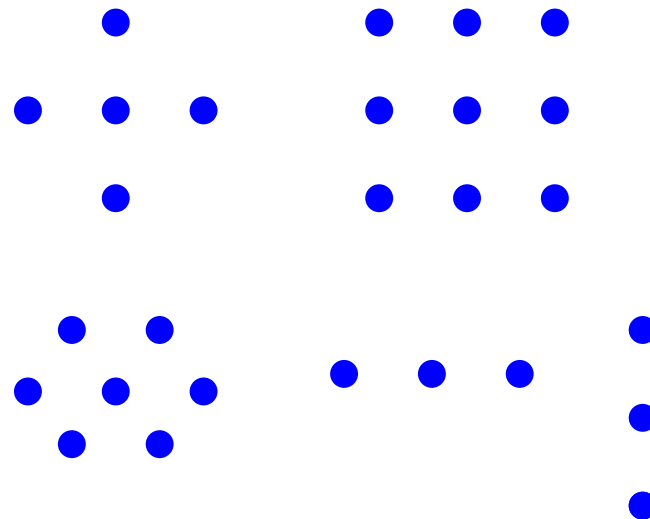
Élément structurant

- forme
- taille
- origine (pas nécessairement dans B)
- exemples :

Continu :



Discret :



Dilatation binaire

- Addition de Minkowski :

$$X \oplus Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$$

- Dilatation binaire :

$$\begin{aligned} D(X, B) &= X \oplus B = \{x + y \mid x \in X, y \in B\} \text{ (ou } X \oplus \check{B} \text{ historiquement)} \\ &= \bigcup_{x \in X} B_x = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \check{B}_x \cap X \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

(\check{B} = symétrique de B par rapport à l'origine, $B_x = x + B$)

Dilatation binaire

- Addition de Minkowski :

$$X \oplus Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$$

- Dilatation binaire :

$$\begin{aligned} D(X, B) &= X \oplus B = \{x + y \mid x \in X, y \in B\} \text{ (ou } X \oplus \check{B} \text{ historiquement)} \\ &= \bigcup_{x \in X} B_x = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \check{B}_x \cap X \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

(\check{B} = symétrique de B par rapport à l'origine, $B_x = x + B$)

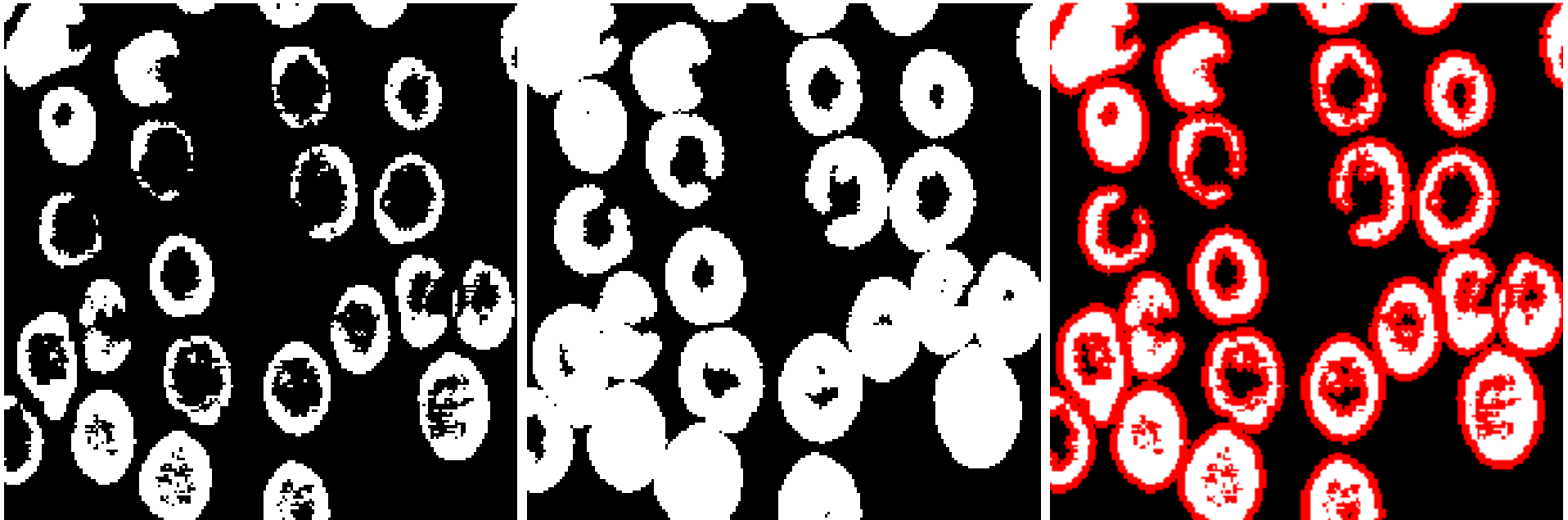
Propriétés de la dilatation :

- extensive ($X \subseteq D(X, B)$) ssi $O \in B$;
- croissante ($X \subseteq Y \Rightarrow D(X, B) \subseteq D(Y, B)$) ;
- $B \subseteq B' \Rightarrow D(X, B) \subseteq D(X, B')$;
- commute avec la réunion, pas avec l'intersection :

$$D(X \cup Y, B) = D(X, B) \cup D(Y, B), \quad D(X \cap Y, B) \subseteq D(X, B) \cap D(Y, B);$$

- propriété d'itération : $D[D(X, B), B'] = D(X, B \oplus B')$.

Exemple de dilatation



Erosion binaire

$$\begin{aligned} E(X, B) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid B_x \subseteq X\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in B, x + y \in X\} = X \ominus \check{B} \end{aligned}$$

Erosion binaire

$$\begin{aligned} E(X, B) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid B_x \subseteq X\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in B, x + y \in X\} = X \ominus \check{B} \end{aligned}$$

Propriétés de l'érosion :

- dualité de l'érosion et de la dilatation par rapport à la complémentation :

$$E(X, B) = [D(X^C, B)]^C$$

- anti-extensive ($E(X, B) \subseteq X$) ssi $O \in B$;
- croissante ($X \subseteq Y \Rightarrow E(X, B) \subseteq E(Y, B)$) ;
- $B \subseteq B' \Rightarrow E(X, B') \subseteq E(X, B)$;
- commute avec l'intersection, pas avec la réunion :

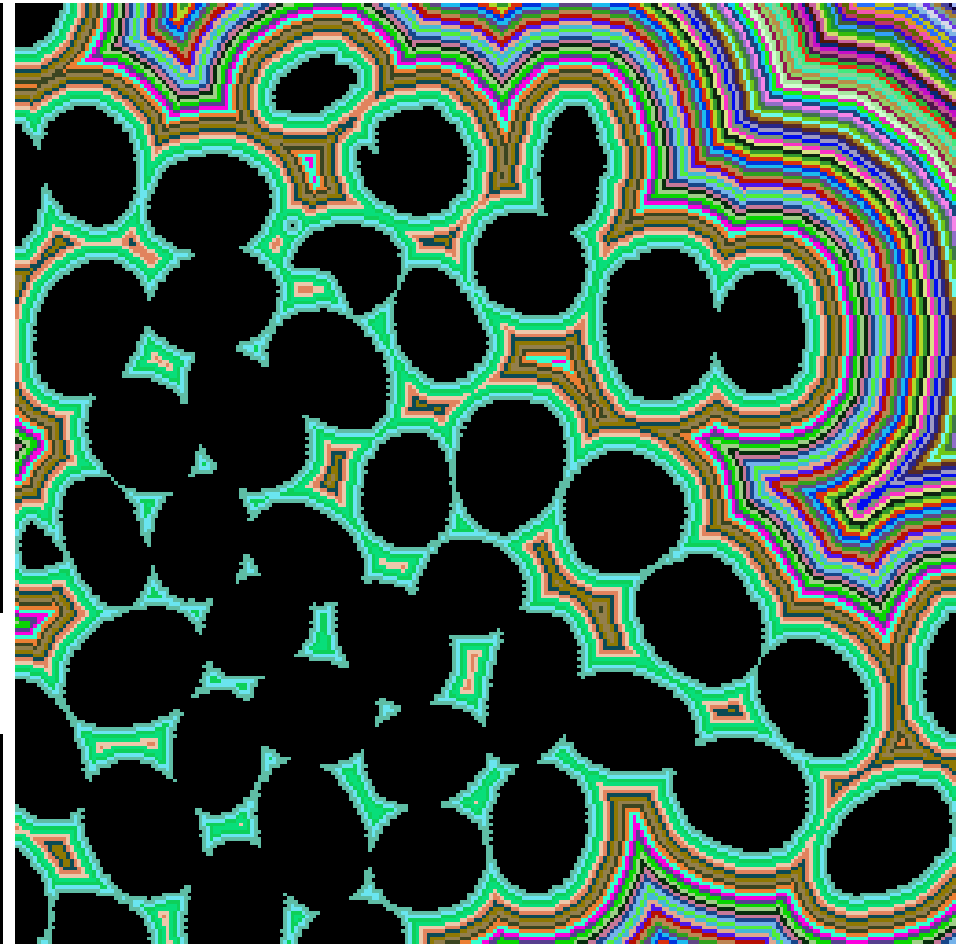
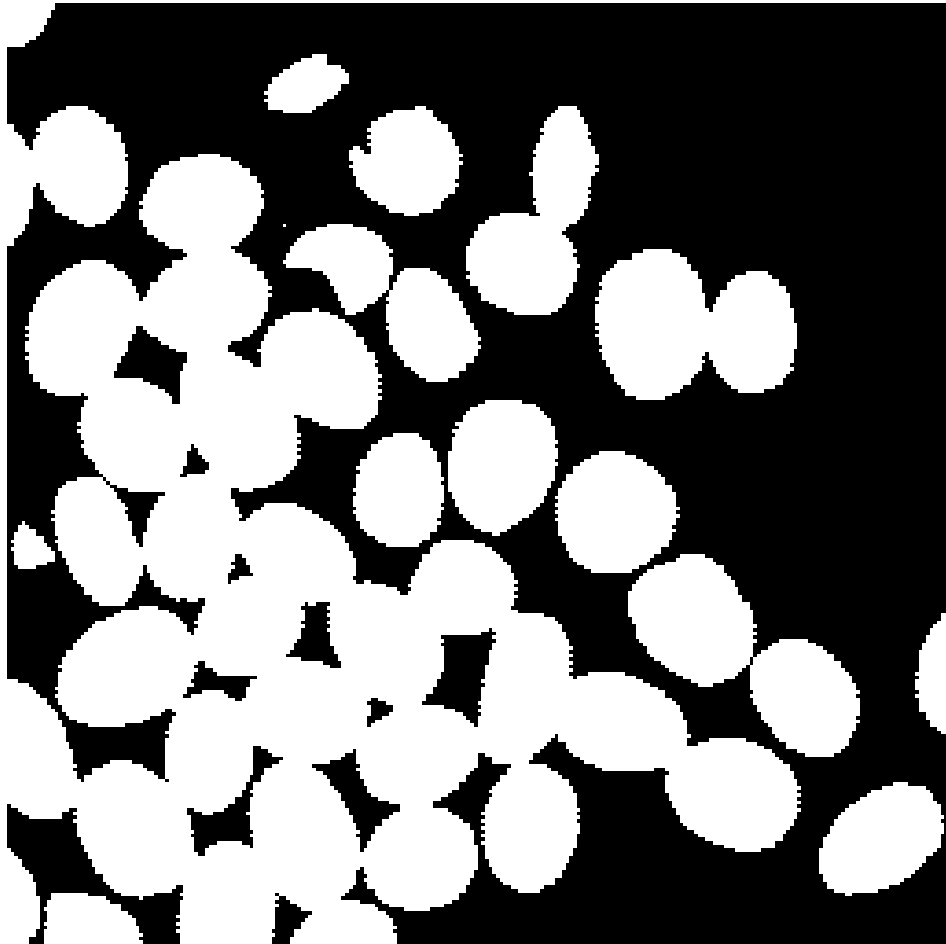
$$E[(X \cap Y), B] = E(X, B) \cap E(Y, B), \quad E[(X \cup Y), B] \supseteq E(X, B) \cup E(Y, B);$$

- propriété d'itération : $E[E(X, B), B'] = E(X, B \oplus B')$.
- $D[E(X, B), B'] \subseteq E[D(X, B'), B]$.

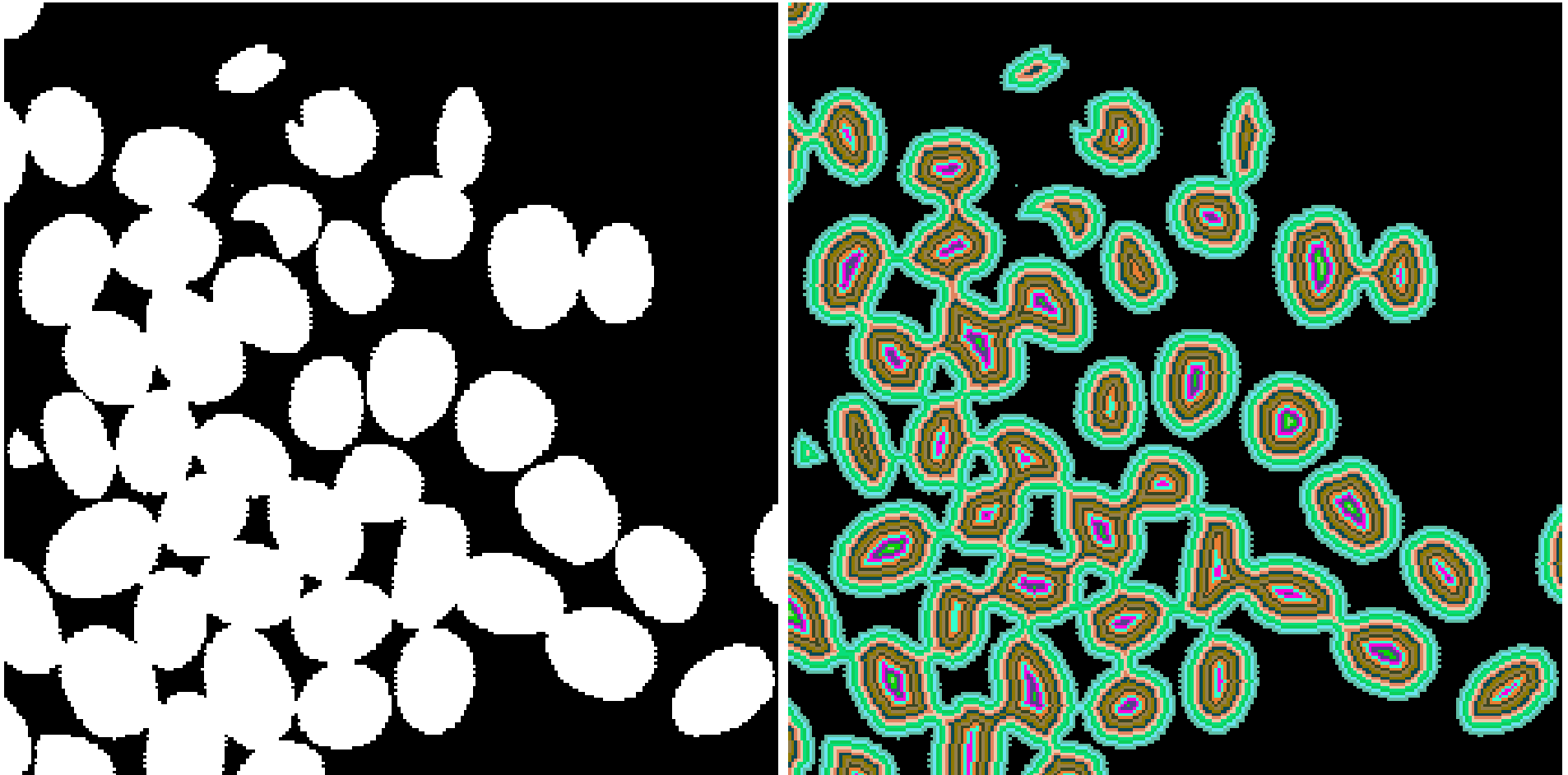
Exemple d'érosion



Liens avec les distances



Liens avec les distances



Ouverture binaire

$$X_B = D[E(X, B), B]$$

Ouverture binaire

$$X_B = D[E(X, B), B]$$

Propriétés de l'ouverture :

- anti-extensive ($X \supseteq X_B$) ;
- croissante ($X \subseteq Y \Rightarrow X_B \subseteq Y_B$) ;
- idempotente ($(X_B)_B = X_B$).

⇒ **Filtre morphologique**

- $B \subseteq B' \Rightarrow X_{B'} \subseteq X_B$;
- $(X_n)_{n'} = (X_{n'})_n = X_{\max(n, n')}$ (avec X_n ouverture par un élément structurant de taille n).

Exemple d'ouverture



Fermeture binaire

$$X^B = E[D(X, B), B]$$

Fermeture binaire

$$X^B = E[D(X, B), B]$$

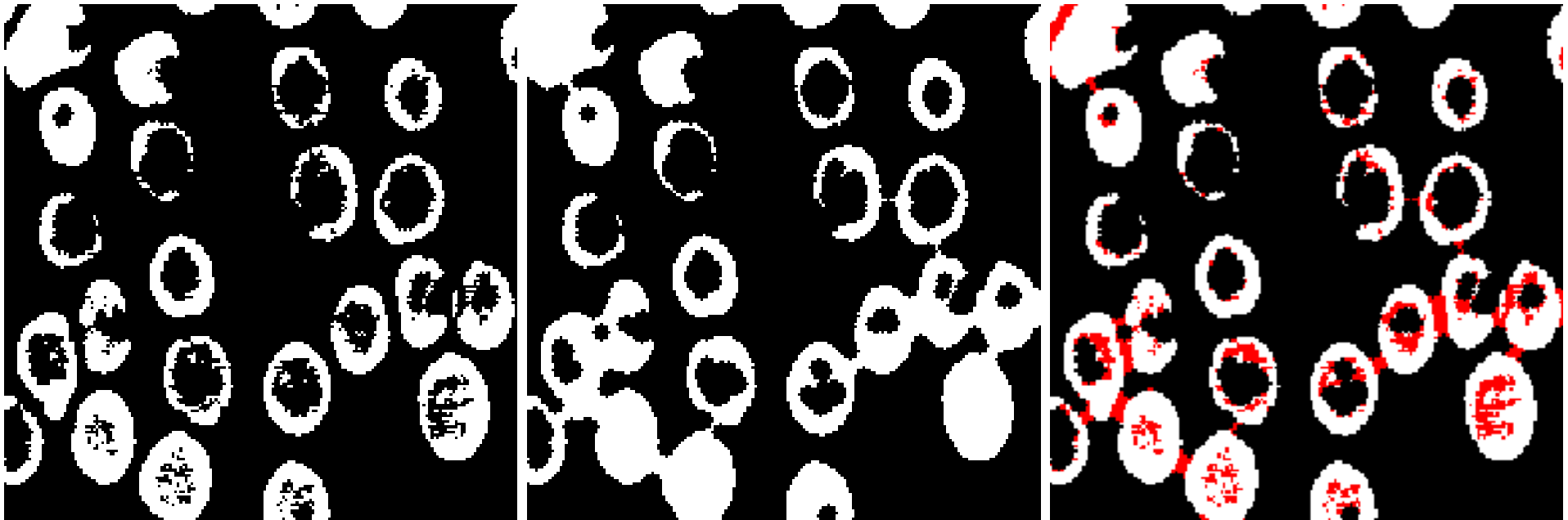
Propriétés de la fermeture :

- extensive ($X \subseteq X^B$) ;
- croissante ($X \subseteq Y \Rightarrow X^B \subseteq Y^B$) ;
- idempotente ($(X^B)^B = X^B$).

⇒ **Filtre morphologique**

- $B \subseteq B' \Rightarrow X^B \subseteq X^{B'}$;
- $(X^n)^{n'} = (X^{n'})^n = X^{\max(n, n')}$;
- $X^B = [(X^C)_B]^C$.

Exemple de fermeture



Des ensembles aux fonctions

- sous-graphe d'une fonction de \mathbb{R}^n = sous-ensemble de \mathbb{R}^{n+1}
- seuils d'une fonction = ensembles
- équivalents fonctionnels d'opérations binaires :

$$\cup \rightarrow \text{sup} / \vee$$

$$\cap \rightarrow \text{inf} / \wedge$$

$$\subseteq \rightarrow \leq$$

$$\supseteq \rightarrow \geq$$

Dilatation d'une fonction par un élément structurant plan

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad D(f, B)(x) = \sup\{f(y) \mid y \in \tilde{B}_x\}$$

Dilatation d'une fonction par un élément structurant plan

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad D(f, B)(x) = \sup\{f(y) \mid y \in \check{B}_x\}$$

Propriétés de la dilatation fonctionnelle :

- extensivité ssi $O \in B$;
- croissance ;
- $D(f \vee g, B) = D(f, B) \vee D(g, B)$;
- $D(f \wedge g, B) \leq D(f, B) \wedge D(g, B)$;
- propriété d'itération.

Exemple de dilatation fonctionnelle



Erosion d'une fonction

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad E(f, B)(x) = \inf\{f(y) \mid y \in B_x\}$$

Erosion d'une fonction

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad E(f, B)(x) = \inf\{f(y) \mid y \in B_x\}$$

Propriétés de l'érosion fonctionnelle :

- les dilatation et érosion fonctionnelles sont des opérations duales ;
- anti-extensivité ssi $O \in B$;
- croissance ;
- $E(f \vee g, B) \geq E(f, B) \vee E(g, B)$;
- $E(f \wedge g, B) = E(f, B) \wedge E(g, B)$;
- propriété d'itération.

Exemple d'érosion fonctionnelle



Ouverture fonctionnelle

$$f_B = D[E(f, B), B]$$

Ouverture fonctionnelle

$$f_B = D[E(f, B), B]$$

Propriétés de l'ouverture fonctionnelle :

- anti-extensive ;
- croissante ;
- idempotente.

⇒ filtre morphologique

Exemple d'ouverture fonctionnelle



Fermeture fonctionnelle

$$f^B = E[D(f, B), B]$$

Fermeture fonctionnelle

$$f^B = E[D(f, B), B]$$

Propriétés de la fermeture fonctionnelle :

- extensive ;
- croissante ;
- idempotente.

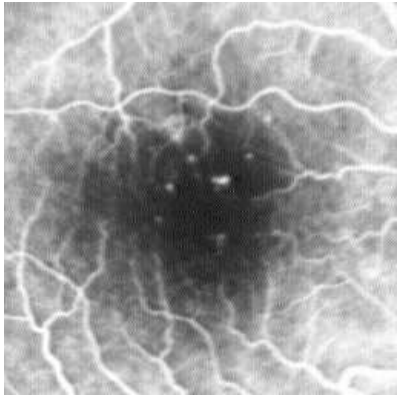
⇒ filtre morphologique

- dualité entre ouverture et fermeture

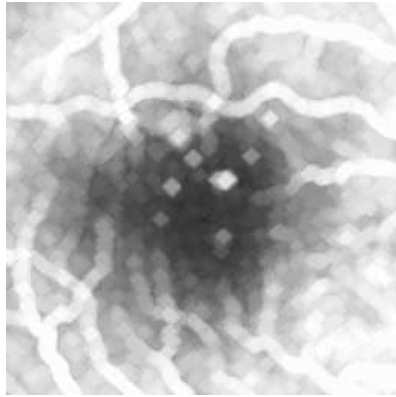
Exemple de fermeture fonctionnelle



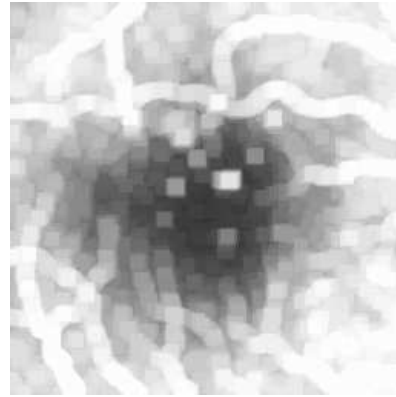
Exemple



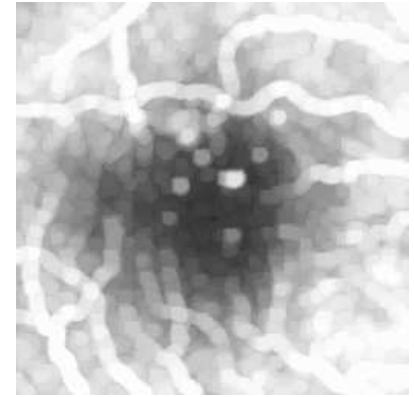
(a)



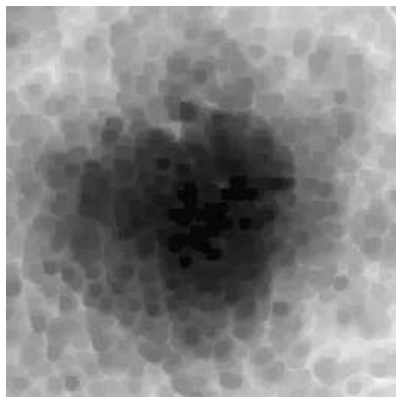
(b)



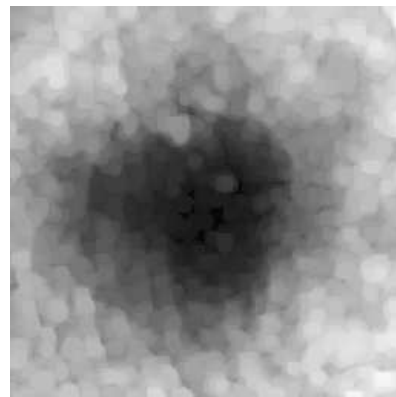
(c)



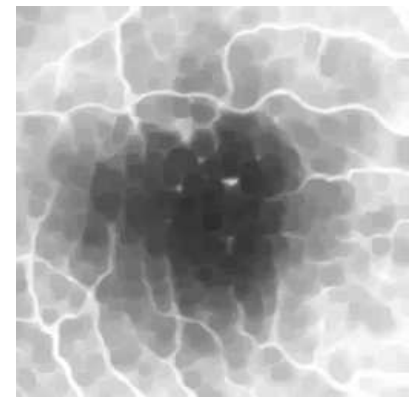
(d)



(e)



(f)



(g)

(a) Image originale. Dilatation de taille 4 par (b) l'élément structurant de la 4-connexité, (c) l'élément structurant de la 8-connexité, (d) une approximation discrète d'un disque. (e) Erosion de taille 4 par l'élément de la 4-connexité. (f) Ouverture de taille 4 correspondante. (g) Fermeture de taille 4.

Eléments structurants fonctionnels

Dilatation :

$$D(f, g)(x) = \sup_y \{f(y) + g(x - y)\}$$

Erosion :

$$E(f, g)(x) = \inf_y \{f(y) - g(y - x)\}$$

Élément structurant plan :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur un compact } B \\ -\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Fondements mathématiques de la morphologie

mathématique

- Théorie des ensembles
 - relations (\subseteq , \cap , \cup ...)
 - élément structurant
- Topologie
 - topologie en tout ou rien (topologie de Fell)
 - topologie myope
 - distance de Hausdorff
- Théorie des treillis
 - adjonctions
 - opérations algébriques
- Probabilités
 - $P(A \cap K \neq \emptyset)$
 - ensembles fermés aléatoires

Quelques applications de la dilatation et de l'érosion

Quelques applications de la dilatation et de l'érosion

Rehaussement de contraste



Quelques applications de la dilatation et de l'érosion

Rehaussement de contraste : ES 15, $\alpha = \beta = 0.2$, $\alpha = \beta = 0.3$, $\alpha = \beta = 0.5$

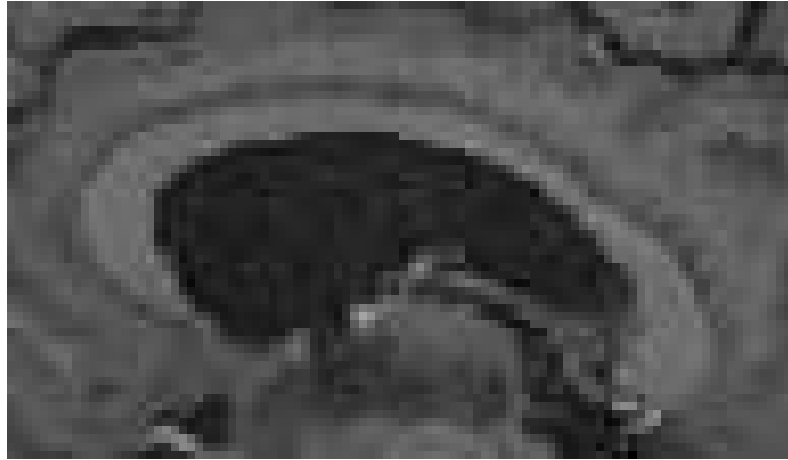
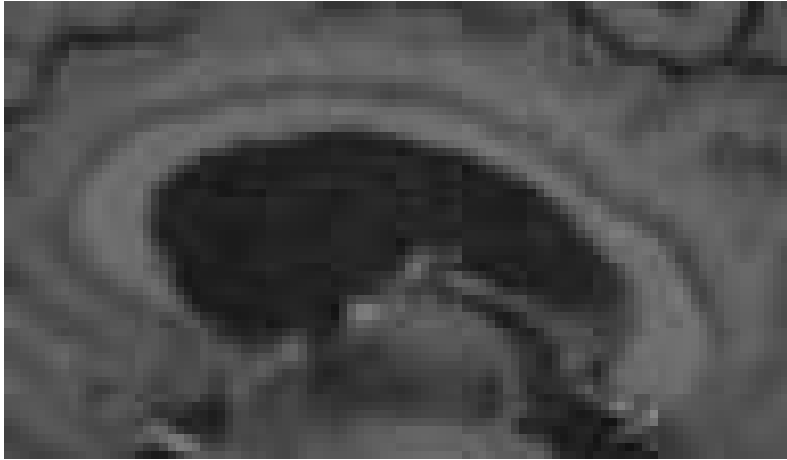


Quelques applications de la dilatation et de l'érosion

Rehaussement de contraste : ES 30, $\alpha = \beta = 0.2$, $\alpha = \beta = 0.3$, $\alpha = \beta = 0.5$



Quelques applications de la dilatation et de l'érosion

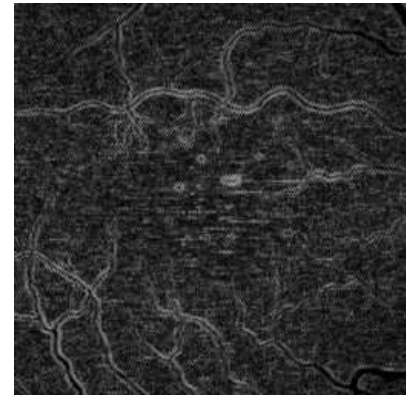
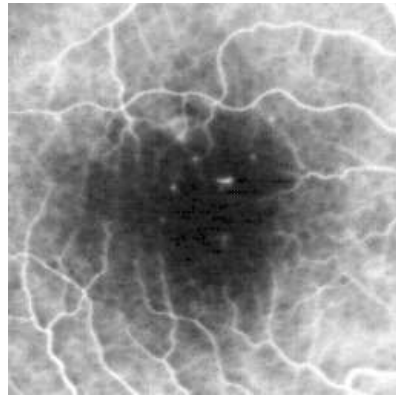
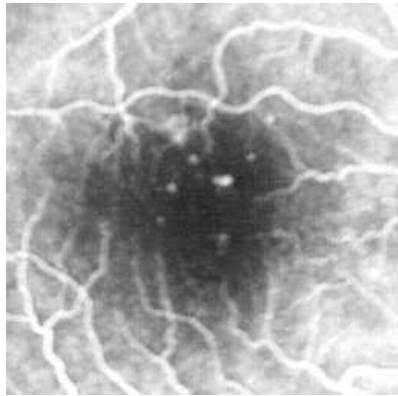
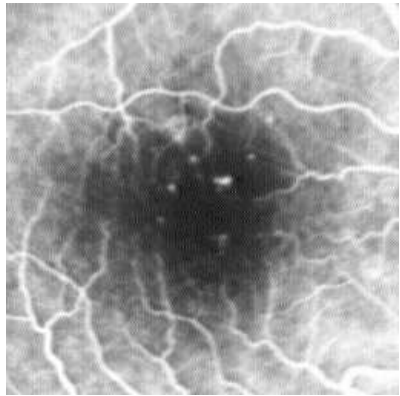


Quelques applications de la dilatation et de l'érosion

Gradient morphologique : $D_B(x) - E_B(x)$



Quelques applications de la dilatation et de l'érosion



Filtres alternés séquentiels

$$\left(\dots \left(\left((f_{B_1})^{B_1} \right)_{B_2} \right)^{B_2} \dots \right)_{B_n} \right)^{B_n}$$

Filtres alternés séquentiels

$$\left(\dots \left(\left(f_{B_1} \right)^{B_1} \right)_{B_2} \right)^{B_2} \dots_{B_n} \right)^{B_n}$$



Filtres alternés séquentiels

$$\left(\dots \left(\left(\left(f_{B_1} \right)^{B_1} \right)_{B_2} \right)^{B_2} \right) \dots_{B_n} \right)^{B_n}$$



Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit gaussien



Image originale



Bruit gaussien (variance 20)

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit gaussien



Moyenne 3×3



Moyenne 7×7



Filtre gaussien de variance 0,75



Filtre gaussien de variance 4,08

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit gaussien



Image bruitée



Filtre de Nagao



Médian 3×3



Médian 7×7

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit gaussien



Image bruitée



Filtre alterné séquentiel de taille 1



Filtre alterné séquentiel de taille 2



Filtre alterné séquentiel de taille 3

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit gaussien



Image originale



Bruit gaussien (variance 120)

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit gaussien



Moyenne 3×3



Moyenne 7×7



Filtre gaussien de variance 0,75



Filtre gaussien de variance 4,08

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit gaussien



Image bruitée



Filtre de Nagao



Médian 3×3



Médian 7×7

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit gaussien



Image bruitée



Filtre alterné séquentiel de taille 1



Filtre alterné séquentiel de taille 2



Filtre alterné séquentiel de taille 3

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit impulsionnel



Image originale



Bruit impulsionnel (intensité 2%)

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit impulsionnel



Moyenne 3×3



Moyenne 7×7



Filtre gaussien de variance 0,75



Filtre gaussien de variance 4,08

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit impulsionnel



Image bruitée



Filtre de Nagao



Médian 3×3



Médian 7×7

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit impulsionnel



Image bruitée



Filtre alterné séquentiel de taille 1



Filtre alterné séquentiel de taille 2



Filtre alterné séquentiel de taille 3

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit impulsionnel



Image originale



Bruit impulsionnel (intensité 10%)

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit impulsionnel



Moyenne 3×3



Moyenne 7×7



Filtre gaussien de variance 0,75



Filtre gaussien de variance 4,08

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit impulsionnel



Image bruitée



Filtre de Nagao



Médian 3×3



Médian 7×7

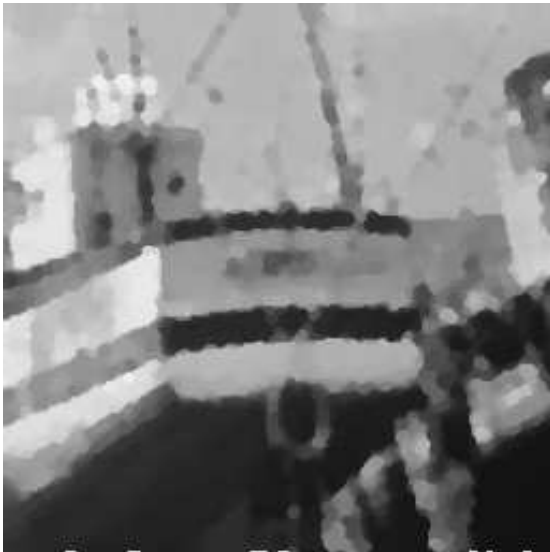
Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit impulsionnel



Image bruitée



Filtre alterné séquentiel de taille 1



Filtre alterné séquentiel de taille 2



Filtre alterné séquentiel de taille 3

Chapeau haut-de-forme

$$f - f_B$$



Chapeau haut-de-forme

$$f - f_B$$

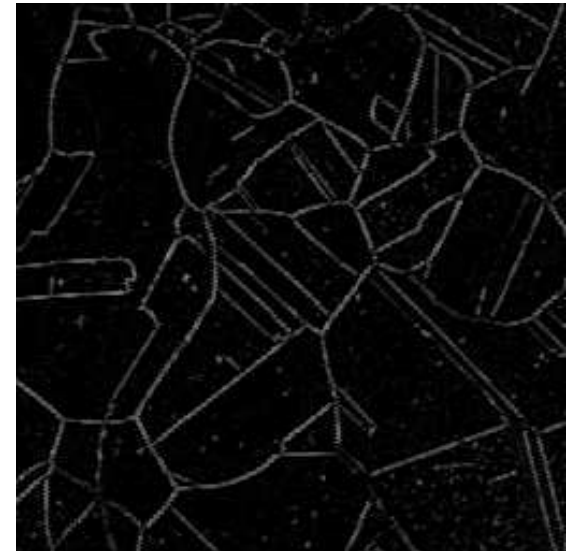
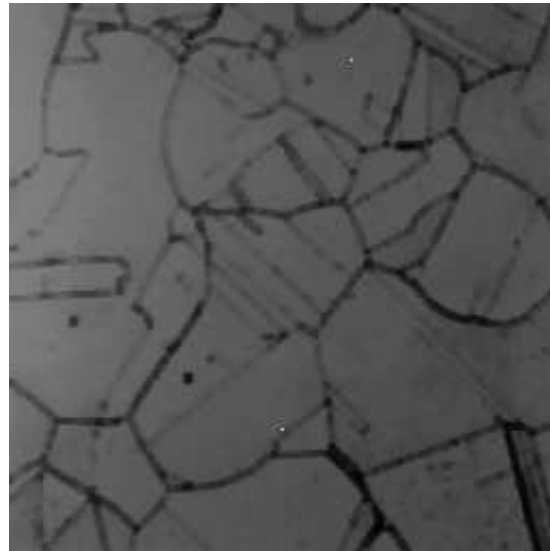
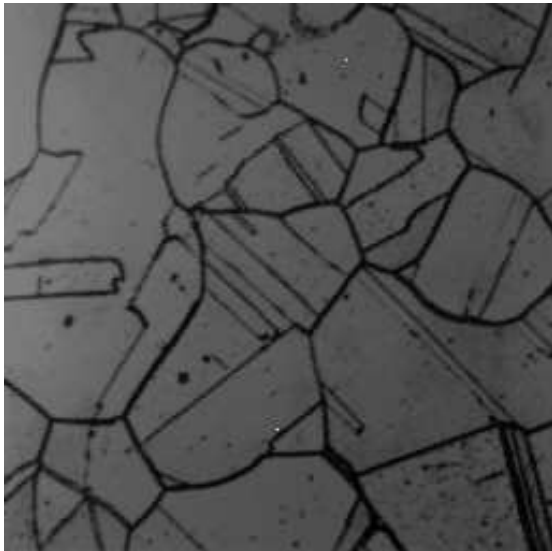
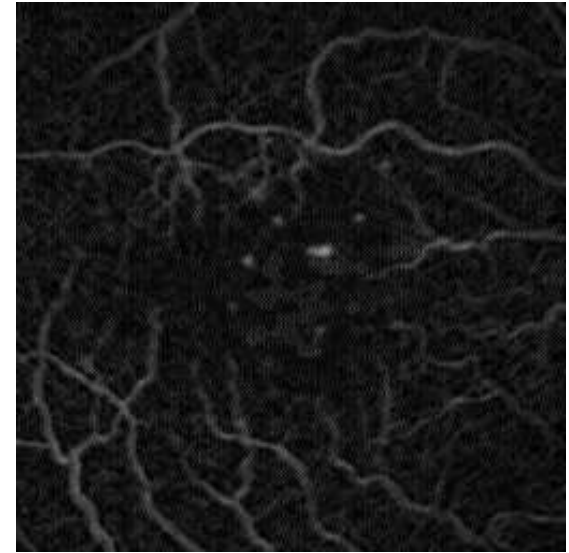
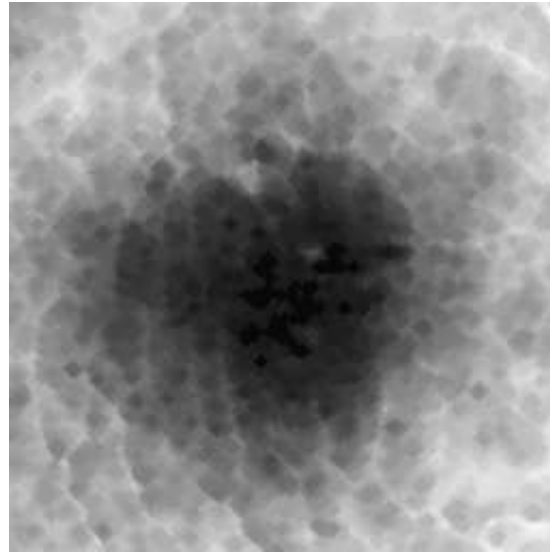
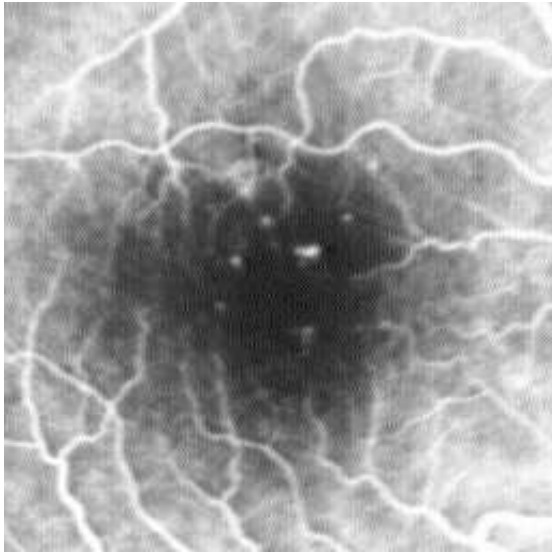


Chapeau haut-de-forme

$$f - f_B$$



Chapeau haut-de-forme : autres exemples



Choix de l'élément structurant

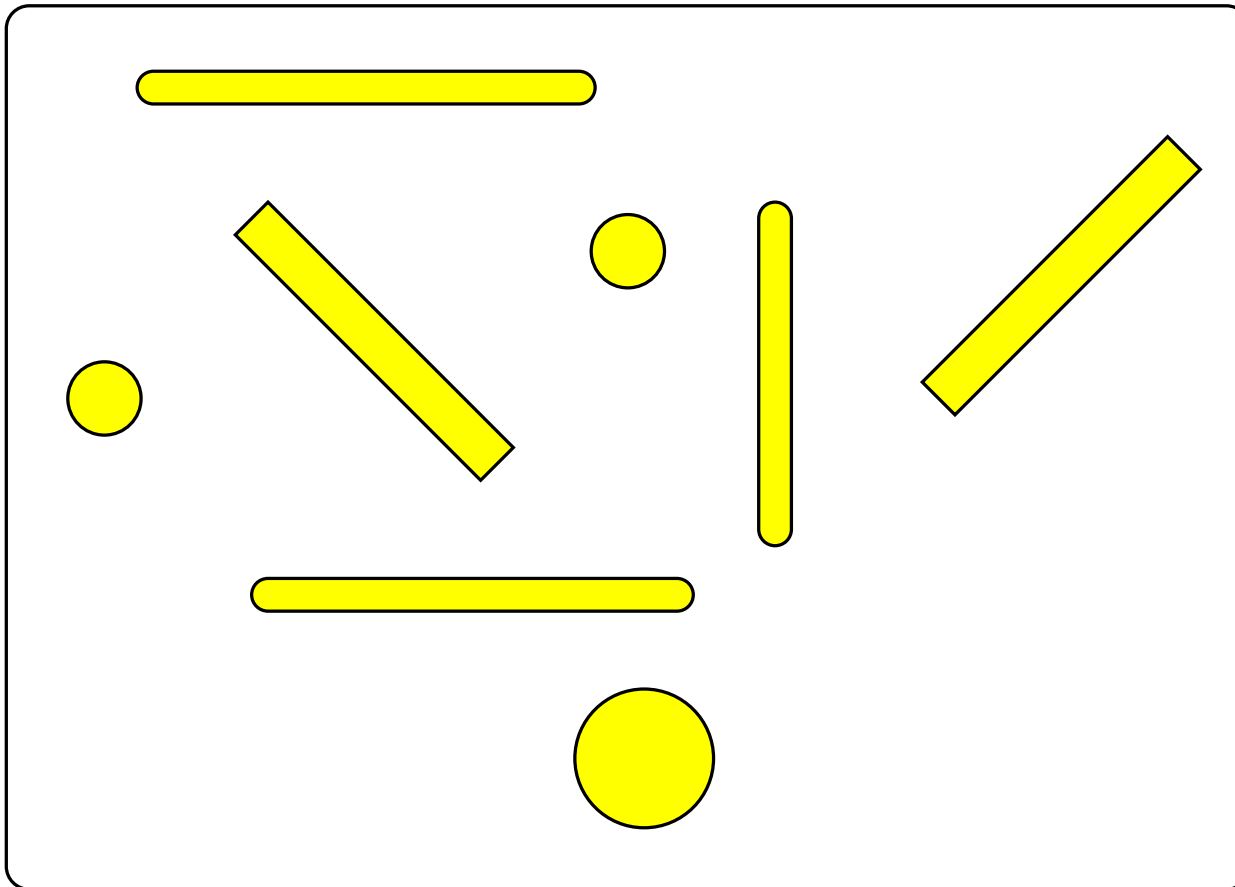
- fonction de ce que l'on veut supprimer / garder
- forme
- taille

Exemple : ouverture par un disque ou par des segments ?

Choix de l'élément structurant

- fonction de ce que l'on veut supprimer / garder
- forme
- taille

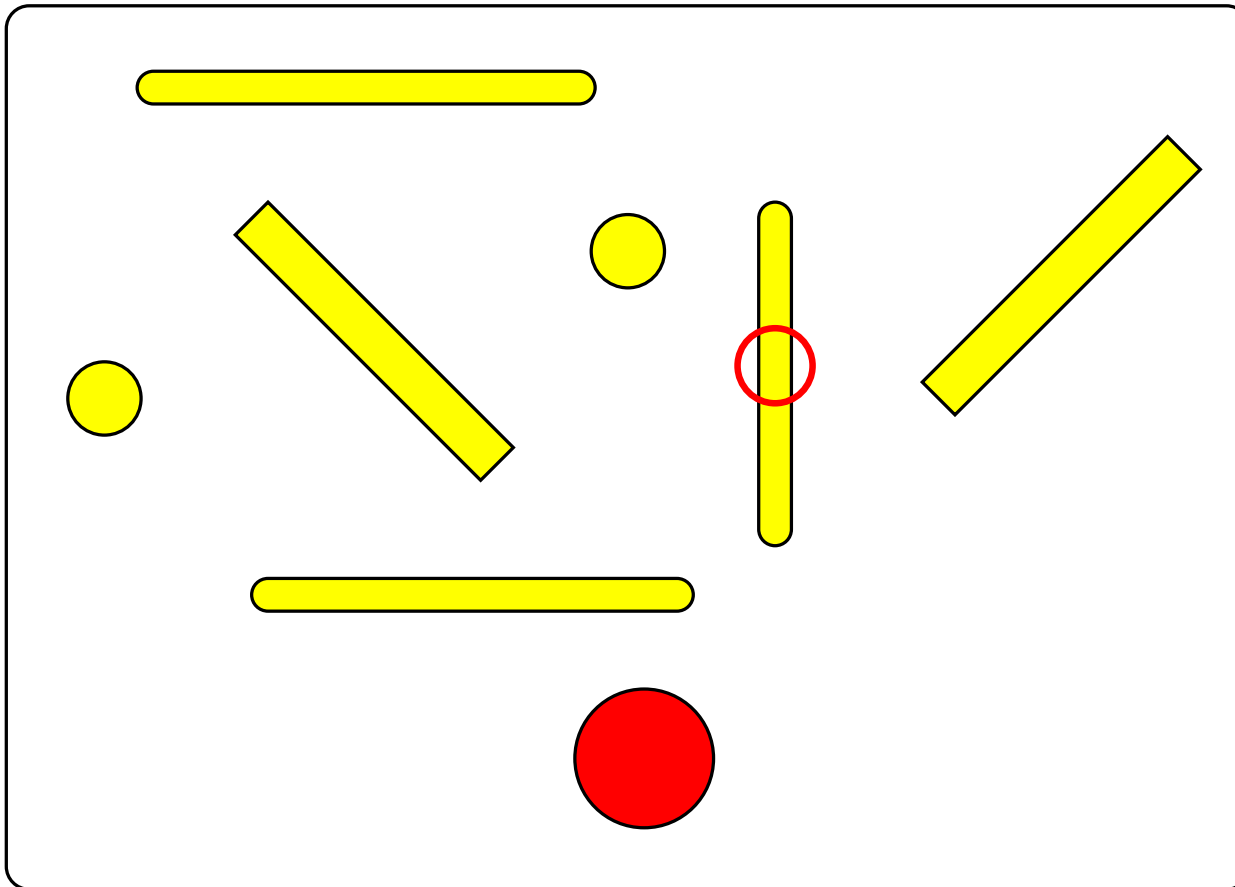
Exemple : ouverture par un disque ou par des segments ?



Choix de l'élément structurant

- fonction de ce que l'on veut supprimer / garder
- forme
- taille

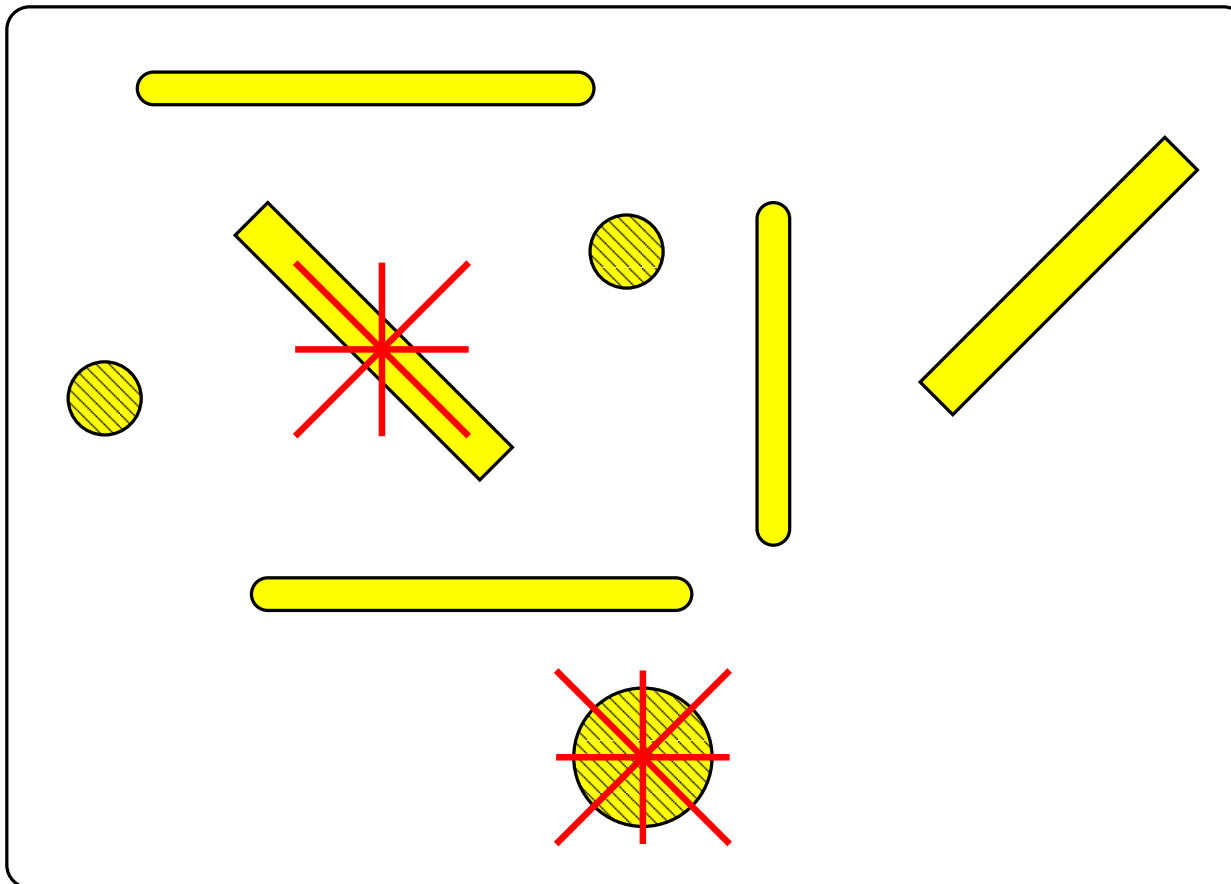
Exemple : ouverture par un disque ou par des segments ?



Choix de l'élément structurant

- fonction de ce que l'on veut supprimer / garder
- forme
- taille

Exemple : ouverture par un disque ou par des segments ?



Rq : une réunion d'ouvertures est une ouverture

Fonctions vectorielles (images en couleur)

- Problème principal : choix d'un ordre
- max (ou min) composante par composante : pas de bonnes propriétés

Dilatation

