

Exercices sur les représentations discrètes

Isabelle Bloch

Octobre 2006

1 Pavages

Pourquoi est-il impossible de paver l'espace \mathbb{R}^2 avec des polygones convexes réguliers à 10 côtés ?

2 Topologie discrète

2.1 Connexité

Donner le nombre de composantes connexes et de trous pour l'objet de la figure 1, en 4- et 8-connexité. On rappelle qu'un trou est une composante connexe du complémentaire des objets qui ne touche pas les bords de l'image.

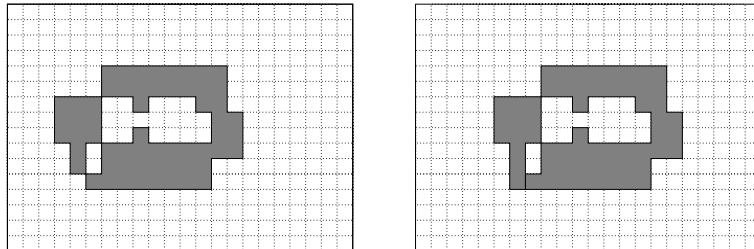


FIG. 1 – Calcul du nombre de composantes connexes et de trous.

2.2 Nombre d'Euler

Calculer le nombre d'Euler (en 4- et 8-connexité pour l'objet) pour la figure 2 en utilisant la méthode globale et la méthode par dénombrement des configurations locales.

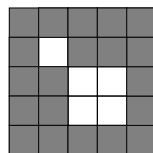


FIG. 2 – Calcul du nombre d'Euler.

2.3 Adjacence

Soit C une composante 4-connexe des objets d'une image binaire. Soit D une composante 8-connexe du fond (complémentaire des objets) de cette image. Montrer que si C et D sont adjacentes en 8-connexité alors elles sont aussi adjacentes en 4-connexité.

3 Représentations géométriques

3.1 Jeu de fléchettes discret

On suppose qu'une fléchette lancée par un joueur tombe aléatoirement sur un des points discrets d'une cible. Ces points sont disposés sur un maillage carré de 100×100 points. On s'intéresse aux fléchettes qui tombent sur des cercles dont le carré du rayon vaut 2, 24 et 25 respectivement et centrés sur un point de la trame. Quelle est la probabilité pour qu'une fléchette tombe sur chacun de ces cercles ?

3.2 Discrétisation de droites

On représente ici les droites par leurs points d'intersection avec la trame (en noir sur la figure 3).

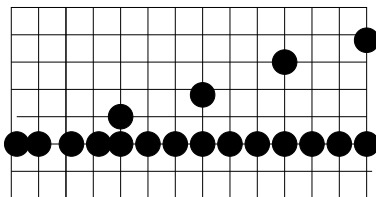


FIG. 3 – Discrétisation de droites.

- Quelles sont les pentes des droites représentées (par plus de deux points) ?
- Quelle est la plus petite pente non nulle positive qu'on peut représenter sur cette image ?

4 Distances discrètes

4.1 Distances entre deux points

Soient, sur une trame carrée, les points $P = (0, 0)$ et $Q = (4, 5)$ (figure 4). Quelle est la distance discrète entre P et Q si on utilise :

- le masque élémentaire correspondant à la 4-connexité (avec des coefficients 1) ?
- le masque élémentaire correspondant à la 8-connexité (avec des coefficients 1) ?
- le masque de chanfrein 3×3 avec les coefficients 3 et 4 ?
- le masque de chanfrein 5×5 avec les coefficients 5, 7 et 11 ?

4.2 Distance d'un point à un objet

Soient, sur une trame carrée, l'objet X et le point M définis sur la figure 5. Quelle est la distance discrète entre M et le point le plus proche de X (et indiquer quel est ce point) avec les 4 masques de l'exercice précédent ?

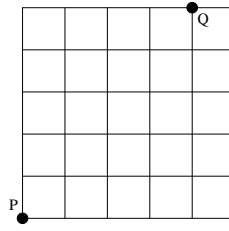


FIG. 4 – Définition des points P et Q .

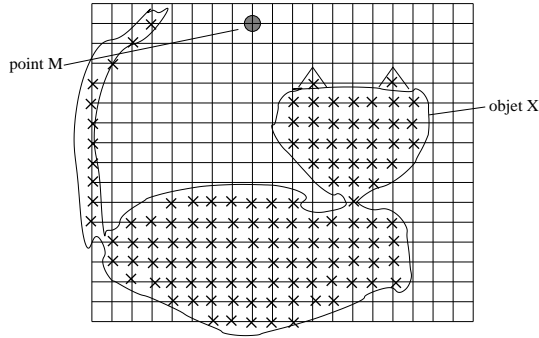


FIG. 5 – Définition de l'objet X et du point M .

4.3 Distances d_4 et d_8

La distance discrète d_4 est obtenue avec le masque de la 4-connextité (avec des coefficients 1). De manière explicite, elle est définie sur \mathbb{Z}^2 par :

$$d_4(p_1, p_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

avec $p_1 = (x_1, y_1)$ et $p_2 = (x_2, y_2)$.

De même, la distance discrète d_8 est obtenue avec le masque de la 8-connextité (avec des coefficients 1) et définie par :

$$d_8(p_1, p_2) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|).$$

Montrer que d_4 et d_8 vérifient bien toutes les propriétés des distances.