IA301 2021-2022 - Logique et IA symbolique
Logics and Symbolic AI

29 octobre 2021, 13h30-15h30

Seul document autorisé : deux feuilles A4 recto-verso de notes

Only 2 A4 sheets (recto-verso) of notes authorized

1 Logique propositionnelle - *Propositional logic*

On note p, q, r... les variables du langage propositionnel. p, q, r *denote propositional variables.*

Montrer que la base de connaissance $\{(p \vee q) \wedge (\neg p \rightarrow r), q \rightarrow \neg r, \neg p\}$ n'est pas satisfiable, de deux manières différentes (on rappelle qu'une base est satisfiable si la conjonction des formules qu'elle contient l'est).
Prove that the knowledge base $\{(p \vee q) \wedge (\neg p \rightarrow r), q \rightarrow \neg r, \neg p\}$ is not satisfiable, using two different methods (recall that a base is satisfiable if the conjunction of the formulas it contains is satisfiable).

2 Logique du premier ordre - *First order logic*

1. Exprimer en logique du premier ordre la phrase "tous les amis de John connaissent un de ses enfants" (en introduisant les variables, constantes et prédicats appropriés).
Express in first order logic the sentence "all friends of John know one of his children" (by introducing the appropriate variables, constants and predicates).
2. Ecrire la formule φ obtenue sous forme prenex.
Write the obtained formula φ in prenex form.
3. Ecrire la négation de φ.
Write the negation of φ.

3 Logique modale - *Modal logic*

3.1 Some theorems

On considère une logique modale ayant le schéma K et la règle d'inférence RM :
We consider a modal logic with schema K and inference rule RM :

K : $\square(A \rightarrow B) \rightarrow (\square A \rightarrow \square B)$

RM : $\frac{A \rightarrow B}{\square A \rightarrow \square B}$

Montrer que les expressions suivantes sont des théorèmes de cette logique :
Prove that the following expressions are theorems of this logic :

1. $\square(A \wedge B) \rightarrow (\square A \wedge \square B)$
2. $\square(A \vee B) \rightarrow (\square A \vee \diamond B)$

3.2 Kripke semantics

On considère une logique modale, dans laquelle l'ensemble les mondes possibles est noté W, la relation d'accessibilité par R, et p, q, r sont des variables propositionnelles, avec la fonction

de vérité V.
We consider a modal logic in which the set of possible worlds is denoted by W, the accessibility relation by R, and p, q, r are propositional variables, with truth function V.

— $W = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$
— $R = \{(\omega_1, \omega_2), (\omega_1, \omega_4), (\omega_2, \omega_2), (\omega_2, \omega_3), (\omega_3, \omega_2), (\omega_3, \omega_4), (\omega_5, \omega_5), (\omega_5, \omega_4)\}$
— $V(p) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $V(q) = \{\omega_1\}$, $V(r) = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$.

1. Donner une représentation graphique du modèle $\mathcal{M} = (W, R, V)$.
   Provide a graphical representation of the model $\mathcal{M} = (W, R, V)$.
2. On rappelle les relations sémantiques suivantes pour un modèle $\mathcal{M}$:
   Let us recall the following semantic relations, for a model $\mathcal{M}$:
   — $\mathcal{M} \models_\omega \Box A$ iff $\forall t \in W$, $R(\omega, t)$ implies $\mathcal{M} \models_t A$ $\quad$ ($R(\omega, t)$ means $(\omega, t) \in R$)
   — $\mathcal{M} \models_\omega \Diamond A$ iff $\exists t \in W$, such that $R(\omega, t)$ and $\mathcal{M} \models_t A$
   Les expressions suivantes sont-elle valides ?
   Are the following expressions valid ?
   — $\mathcal{M} \models_{\omega_2} \Box p$
   — $\mathcal{M} \models_{\omega_5} \Diamond r$
   — $\mathcal{M} \models_{\omega_5} \Box r$
   — $\mathcal{M} \models_{\omega_1} \Diamond(r \wedge \Box q)$

4 Apprentissage symbolique - *Symbolic learning*

Cinq personnes font des courses pour organiser un goûter. Elles peuvent acheter de la farine (f), du sucre (s), des œufs (o), du thé (t), du café (c), du chocolat (ch). La liste des achats de chacun est donné dans la table suivante (par des +).
Five persons go shopping to organize an afternoon party. They can buy flour (f), sugar (s), eggs (o), tea (t), coffee (c), chocolate (ch). The list of items bought by each person is given in the following table (indicated by +).

	f	s	o	t	c	ch
1	+	+	+		+	
2	+	+		+	+	
3		+	+			+
4	+	+	+		+	
5	+		+			+

On note $G = \{1, ...5\}$ l'ensemble des personnes, et $M = \{f, s, o, t, c, ch\}$ l'ensemble des achats possibles (ou items). On cherche à trouver des règles d'association du type $Y_1 \Rightarrow Y_2$, où Y_1 et Y_2 sont des sous-ensembles de M.
$G = \{1, ...5\}$ denotes the set of persons, and $M = \{f, s, o, t, c, ch\}$ the set of possible items. We want to find association rules in the form $Y_1 \Rightarrow Y_2$, where Y_1 and Y_2 are subsets of M.

On note $\sigma(Y)$ le nombre d'occurrences de l'ensemble d'items Y, et $S(Y)$ la proportion de personnes qui ont acheté Y ($S(Y) = \frac{\sigma(Y)}{|G|}$, où $|G|$ est le cardinal de G). Le support d'une règle $Y_1 \Rightarrow Y_2$ est la proportion de personnes ayant acheté à la fois Y_1 et Y_2, et la confiance dans la règle est la proportion de personnes ayant acheté à la fois Y_1 et Y_2 parmi celles qui ont acheté Y_1.
$\sigma(Y)$ denotes the number of occurrences of the set of items Y, and $S(Y)$ the proportion of

persons who bought Y ($S(Y) = \frac{\sigma(Y)}{|G|}$, where $|G|$ is the cardinality of G). The support of a rule $Y_1 \Rightarrow Y_2$ is the proportion of persons who bought both Y_1 and Y_2, and the confidence in the rule is the proportion of persons who bought both Y_1 and Y_2 among those who bought Y_1.

1. Déterminer tous les ensembles fréquents d'items, où Y est dit fréquent si $S(Y) \geq 3/5$.
   Establish all the frequent itemsets, Y being frequent if $S(Y) \geq 3/5$.
2. Soit la règle $\{s, o\} \Rightarrow \{f\}$. Quel est son support ? Quelle est la confiance dans cette règle ?
   Let us consider the rule $\{s, o\} \Rightarrow \{f\}$. What is its support ? What is the confidence in this rule ?
3. Mêmes questions pour $\{f, s\} \Rightarrow \{c\}$.
   Same questions for $\{f, s\} \Rightarrow \{c\}$.

On interprète maintenant G comme un ensemble d'objets et M comme un ensemble d'attributs, et on définit la relation I par $(g, m) \in I$ si et seulement si la personne g achète m.
G is now interpreted as a set of objects and M as a set of attributes. Let I be the binary relation defined by $(g, m) \in I$ iff person g buys item m.
On rappelle la définition des opérateurs de dérivation en analyse formelle de concepts :
Let us recall the definition of the derivation operators in formal concept analysis :

$$\forall X \subseteq G,\ \alpha(X) = \{m \in M \mid \forall g \in X, (g, m) \in I\}$$

$$\forall Y \subseteq M,\ \beta(Y) = \{g \in G \mid \forall m \in Y, (g, m) \in I\}$$

et (X, Y) est un concept formel si et seulement si $\alpha(X) = Y$ et $\beta(Y) = X$.
and (X, Y) is a formal concept iff $\alpha(X) = Y$ and $\beta(Y) = X$.

4. Calculer tous les concepts formels du context (G, M, I). Tracer le treillis correspondant.
   Compute all the formal concepts of the context (G, M, I). Draw the corresponding concept lattice.
5. Les implications d'attributs suivantes sont elles valides ?
   Are the following attribute implications valid ?
   — $\{f, s\} \Rightarrow \{c\}$
   — $\{s, o\} \Rightarrow \{f\}$
6. Quelle est la différence entre les règles d'association et les implications d'attributs ?
   What is the difference between association rules and attribute implications ?
7. On considère la base de connaissances $KB = \{f \wedge s \to c, f \to s, c \to f\}$. Trouver tous les modèles de KB en utilisant la méthode par tableau.
   Let consider the knowledge base $KB = \{f \wedge s \to c, f \to s, c \to f\}$. Find all models of KB using the tableau method.
8. Une nouvelle information $s \wedge c \wedge \neg f$ est disponible. Est-elle conhérente avec KB ? quelle est sa distance à KB (pour la distance de Hamming entre mondes, définie comme le nombre de variables instanciées différemment dans les deux mondes) ?
   A new information $s \wedge c \wedge \neg f$ is available. Is it consistent with KB ? what is its distance to KB (for the Hamming distance between worlds, defined as the number of variables instantiated differently in the two worlds) ?
9. Comment pourrait-on modifier KB de manière minimale pour garantir la cohérence ?
   How could one minimally modify KB to guarantee the consistency ?