

# *Flou en traitement d'images et vision*

Isabelle Bloch

Isabelle.Bloch@enst.fr

<http://www.tsi.enst.fr/~bloch>

Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications - CNRS UMR 5141 LTCI

Paris - France



# *Intérêt du flou en traitement d'images*

- Représentation de l'information spatiale dans les images
  - avec son imprécision
  - à différents niveaux (local, régional ou global)
  - sous différentes formes (numérique, symbolique, quantitative, qualitative)
- Représentation d'informations très hétérogènes, extraites directement des images ou issues de connaissances externes
- Généralisation aux ensembles flous des opérations pour manipuler l'information spatiale
- Souplesse des opérateurs de combinaison (fusion)

## Deux approches

- Raisonnement sur des attributs flous
- Raisonnement sur des régions ou objets flous

# *Définitions*

- Fonction d'appartenance
- $\alpha$ -coupe, support, noyau
- Opérations élémentaires (Zadeh, 1965) : inclusion, égalité, complémentation, intersection, réunion - propriétés
- Nombre flou
- Distribution de possibilité
- Possibilité et nécessité

# Sémantique

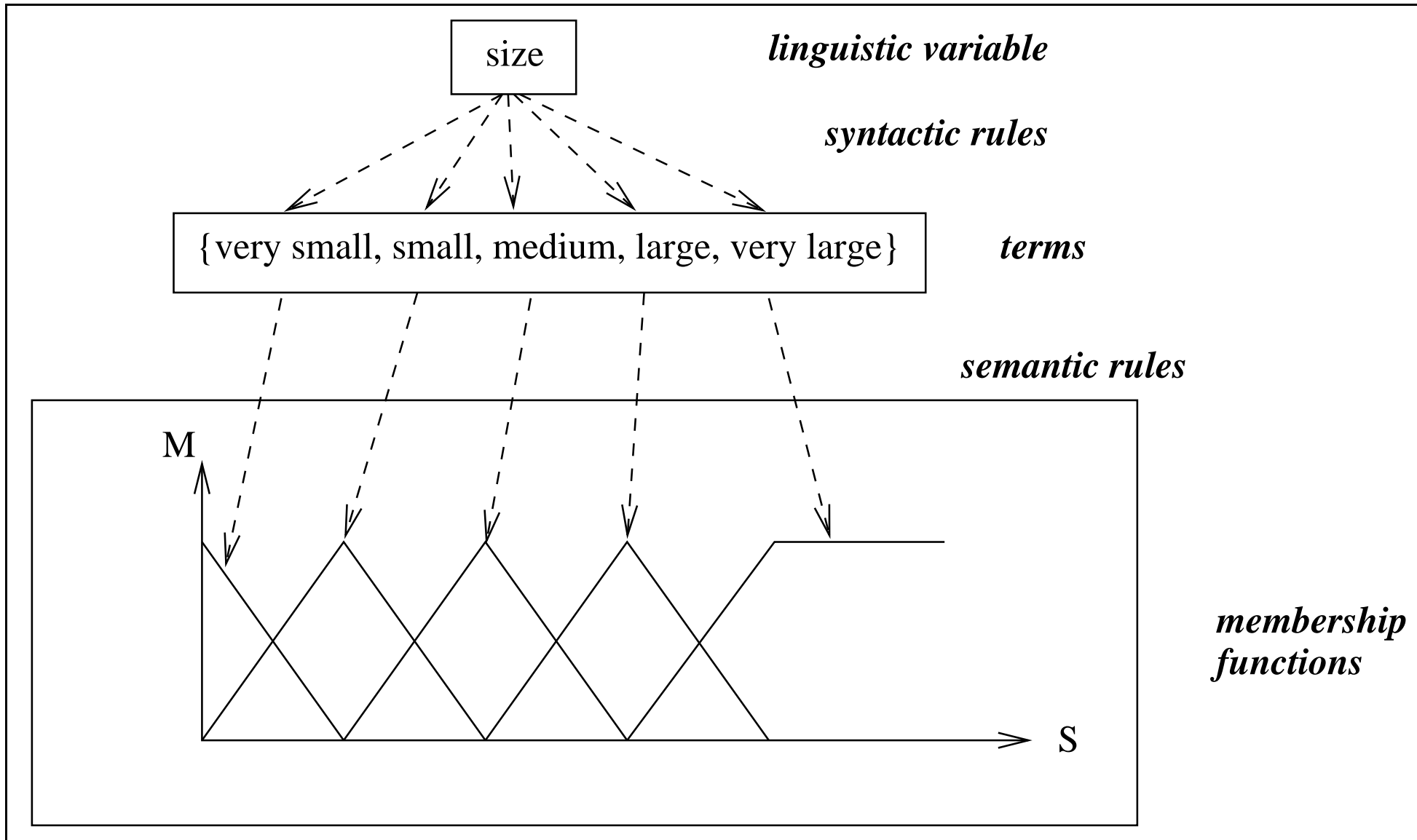
- degré de **similarité** (notion de distance)
- degré de **plausibilité** (qu'un objet dont on ne connaît qu'une description imprécise soit bien celui qu'on cherche à identifier)
- degré de **préférence** (classe floue = ensemble des "bons" choix), proche de la notion de fonction d'utilité

# *Opérateurs ensemblistes*

- complémentation floue
- t-norme : intersection floue
- t-conorme : réunion floue

Autres opérateurs de combinaison (moyennes, sommes symétriques, etc.) : voir cours sur la fusion

# Variable linguistique

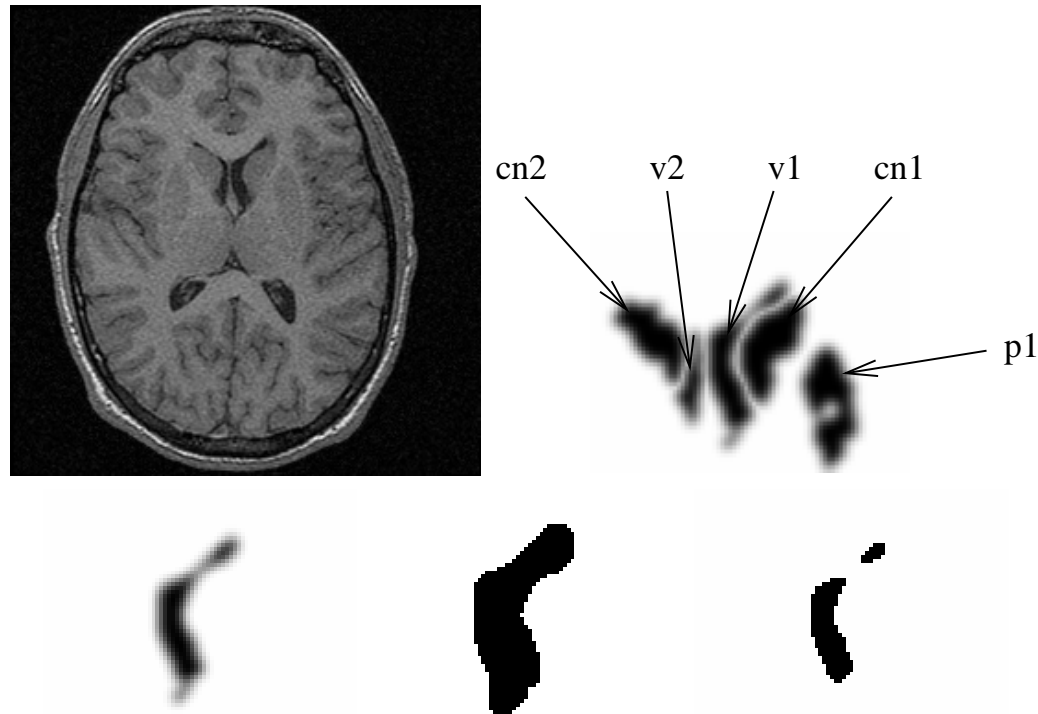


# Objets flous spatiaux

$\mathcal{S} : \mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{Z}^3$  dans le cas discret

$$\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$$

$\mu(x)$  = degré avec lequel  $x$  appartient à l'objet flou



# Définition des fonctions d'appartenance

- souvent très heuristique
- à partir de la fonction d'intensité  $I$  ou du gradient

$$\mu(x) = F_1[(I(x))]$$

$$\mu(x) = F_2[(\nabla I(x))]$$

- en fonction de la réponse à un détecteur
- par introduction d'imprécision à la frontière d'une détection binaire

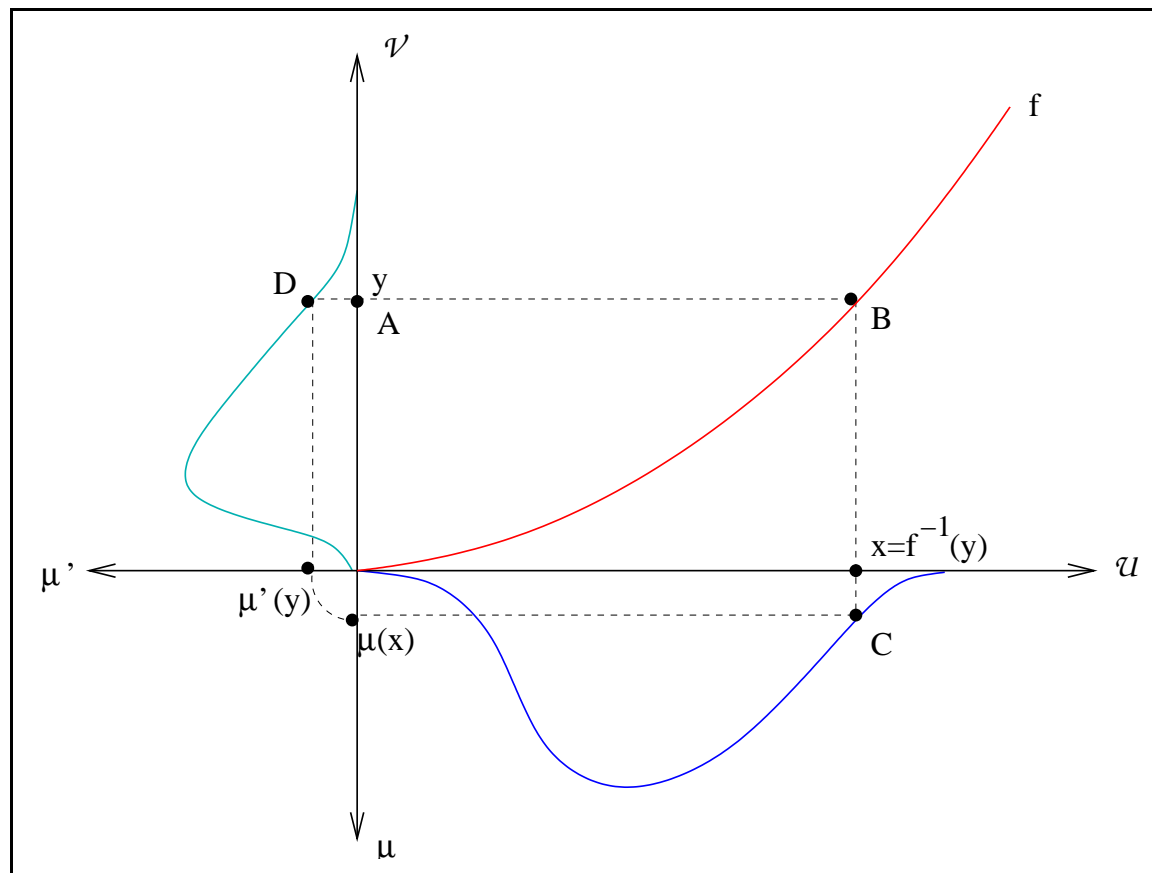
$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E^n(O) \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{S} - D^m(O) \\ F_3[d(x, E^n(O))] & \text{sinon} \end{cases}$$

- par classification

# Comment étendre une opération ou relation au cas flou ?

Principe d'extension :  $f$  de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{V}$

$$\forall y \in \mathcal{V}, \mu'(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset, \\ \sup_{x \in \mathcal{S} | y=f(x)} \mu(x) & \text{sinon} \end{cases}$$



# Comment étendre une opération ou relation au cas flou ?

Utilisation des  $\alpha$ -coupes :

$$R(\mu) = \int_0^1 R_B(\mu_\alpha) d\alpha$$

$$R(\mu) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min(\alpha, R_B(\mu_\alpha))$$

$$R(\mu) = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha R_B(\mu_\alpha))$$

...

Principe d'extension fondé sur les  $\alpha$ -coupes :

$$\forall n, R(\mu, \nu)(n) = \sup_{R_B(\mu_\alpha, \nu_\alpha) = n} \alpha$$

# Comment étendre une opération ou relation au cas flou ?

Traduction formelle :

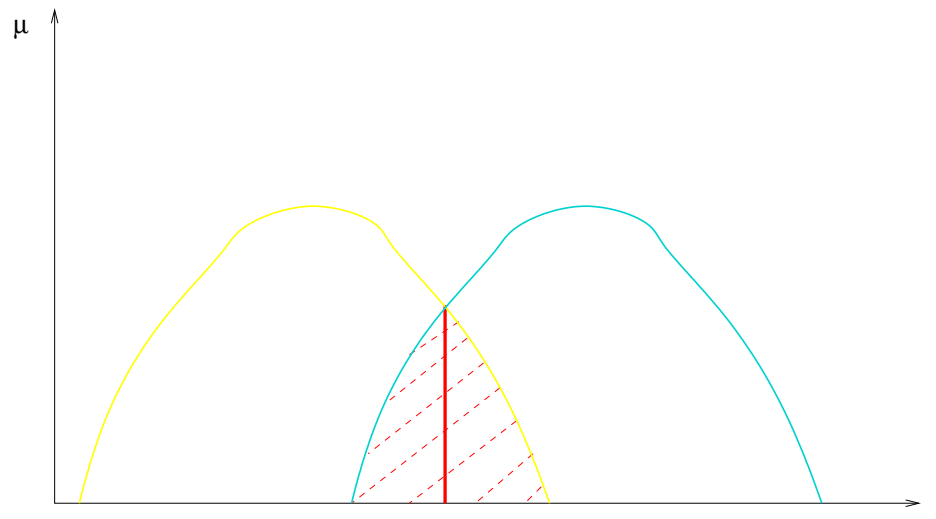
ensemble $X$	ensemble flou $\mu$
complémentaire $X^C$	complémentation floue $c(\mu)$
intersection $\cap$	t-norme $t$
réunion $\cup$	t-conorme $T$
$\exists$	sup
$\forall$	inf

⇒ traduction aisée d'expressions algébriques et logiques

# Relations ensemblistes

Ensembles flous  $\Rightarrow$  une question de degré

- Degré d'intersection :  $\mu_{int}(\mu, \nu) = \sup_{x \in \mathcal{S}} t[\mu(x), \nu(x)]$



ou :  $\mu_{int}(\mu, \nu) = \frac{V_n[t(\mu, \nu)]}{\min[V_n(\mu), V_n(\nu)]}$

avec  $V(\mu) = \sum_{x \in \mathcal{S}} \mu(x)$  (ou  $V(\mu) = \int_{x \in \mathcal{S}} \mu(x) dx$ )

- Degré d'inclusion :

$$\inf_{x \in \mathcal{S}} T[c(\nu(x)), \mu(x)]$$

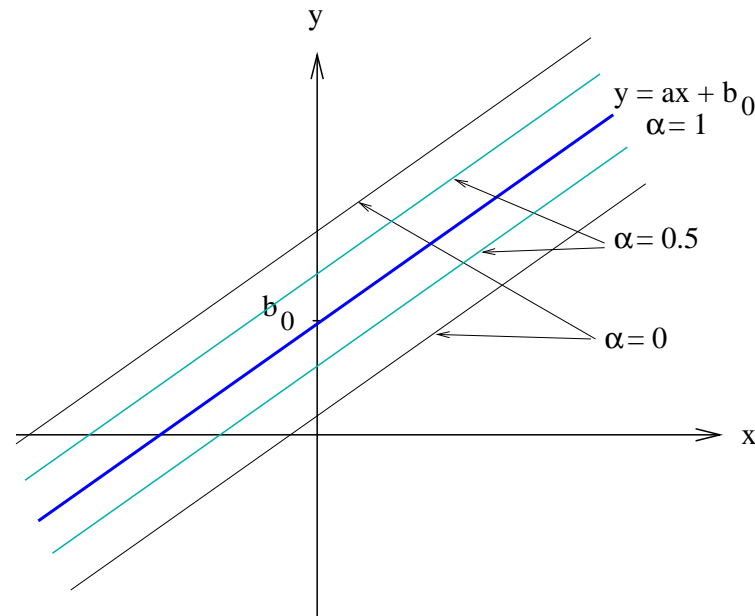
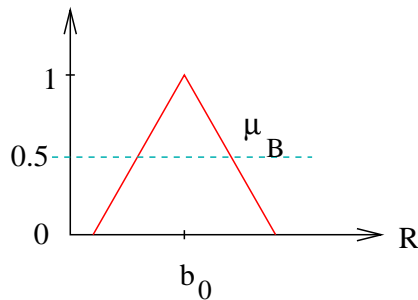
# Ensembles flous géométriques particuliers

**Point flou** : ensemble flou de fonction d'appartenance semi-continue, de valeur modale unique et convexe (généralise les nombres flous)

**Droite floue** : principe d'extension appliqué à une forme analytique, par exemple  $ax + by = c$

$$\mu_D(x, y) = \sup\{\alpha \in [0, 1] \mid ax + by = c, a \in \mu_{A_\alpha}, b \in \mu_{B_\alpha}, c \in \mu_{C_\alpha}\}$$

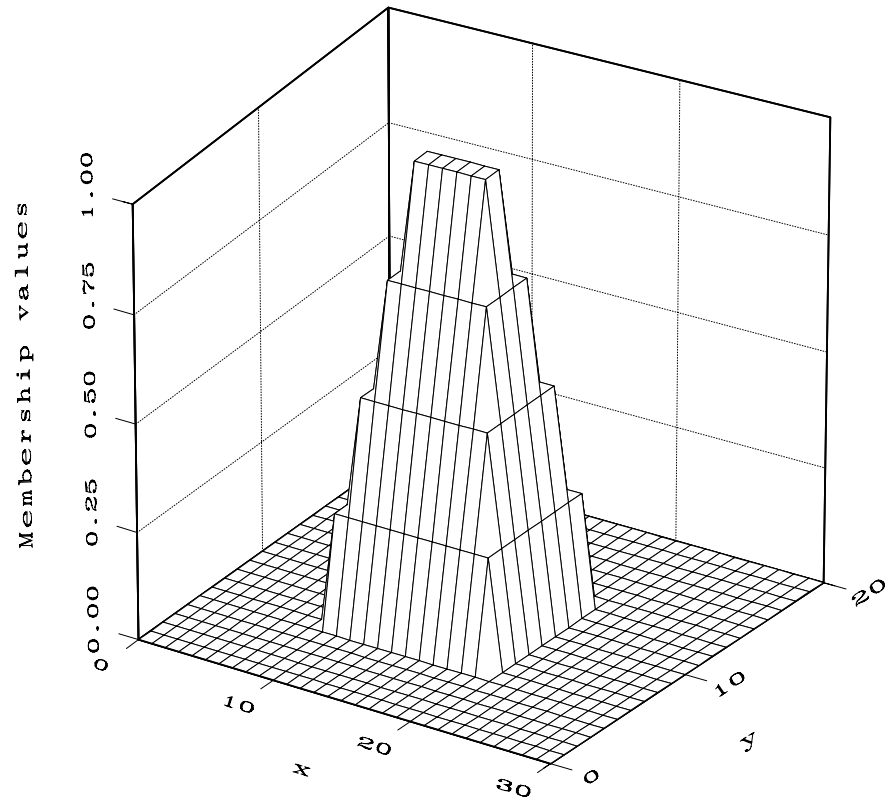
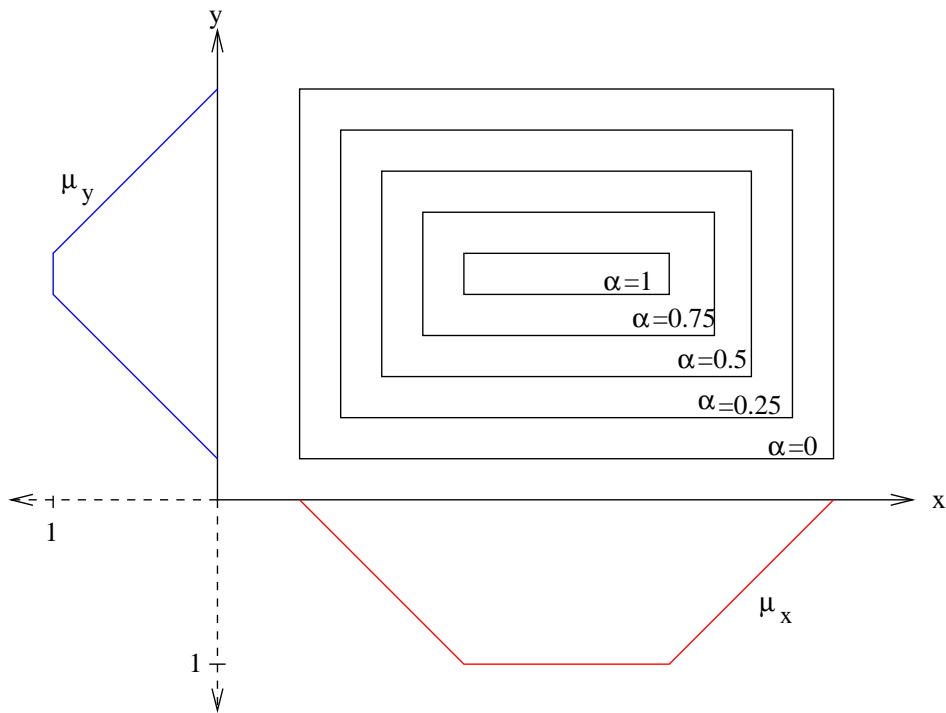
$\mu_A, \mu_B$  et  $\mu_C$  : trois nombres flous.



**Plan, autres entités géométriques** : principe d'extension appliqué à une équation analytique

# Ensembles flous géométriques particuliers

Rectangle flou : ensemble flou séparable et convexe

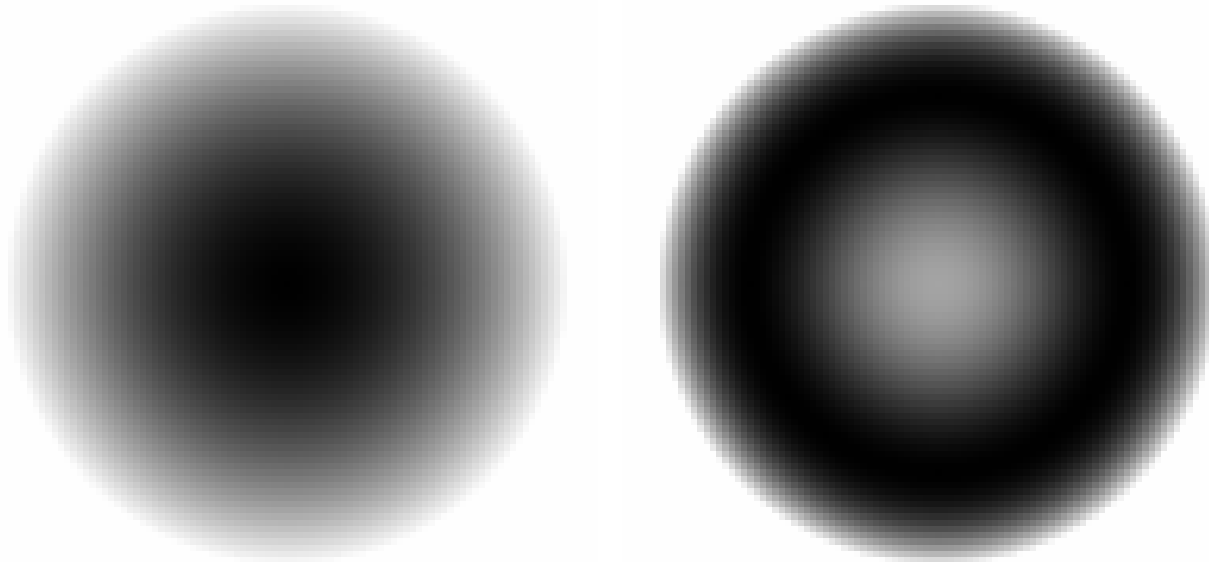


# Ensembles flous géométriques particuliers

Disque flou :

$$\exists P \in \mathcal{S}, \mu(Q) = \mu(r) = f(d(P, Q))$$

- convexe ssi  $\mu(r)$  décroissante
- $\alpha$ -coupes d'un disque flou convexe = disques concentriques
- si  $\mu(r)$  a une unique valeur modale (en  $r = 0$ ), alors disque flou convexe = point flou



# Mesures géométriques d'objets flous

Surface ou volume : cardinal de l'ensemble flou

Périmètre :

$$p(\mu) = \int_{x \in \mathcal{S}} |\nabla \mu(x)| dx$$

Compacité :

$$c(\mu) = \frac{V(\mu)}{p(\mu)^2}$$

pour des disques flous convexes :  $c(\mu) \geq \frac{1}{4\pi}$

⇒ plus faible compacité est obtenue pour des disques nets

Hauteur et largeur : volume des projections sur chacun des axes

$$h(\mu) = \int_y [\sup_x \mu(x, y)] dy$$

# Mesures géométriques floues d'objets flous

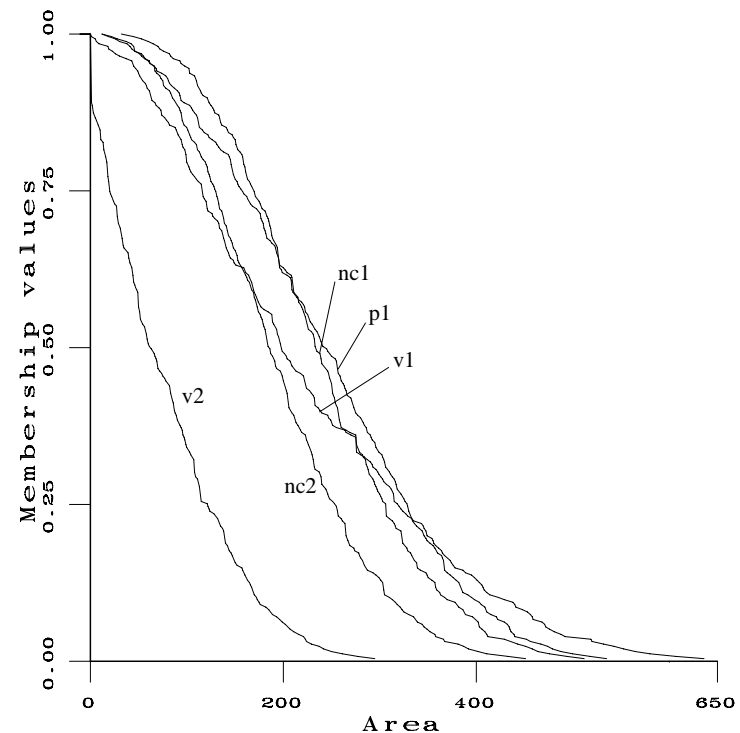
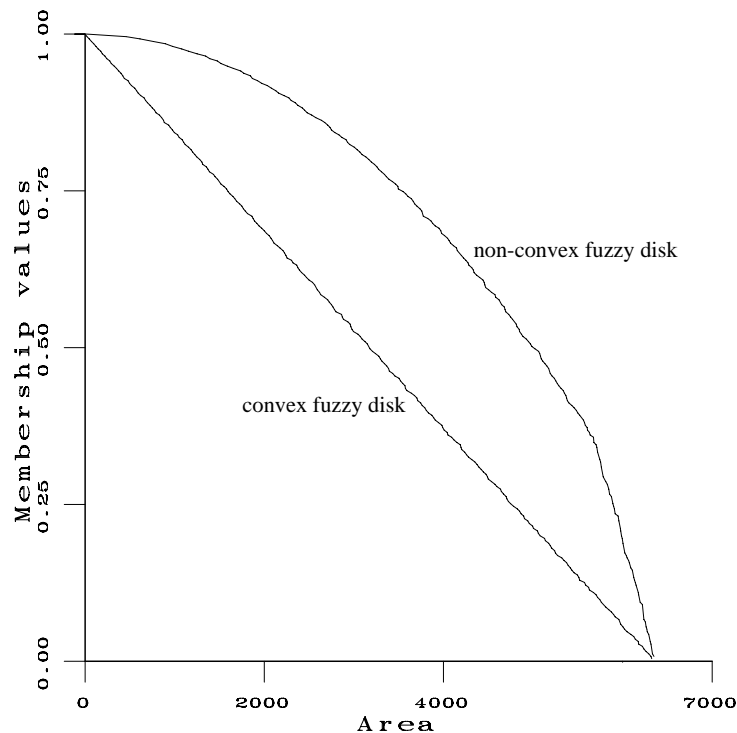
Objets imprécis  $\Rightarrow$  mesures également imprécises (nombres flous)

Forme floue d'une mesure  $M$  (surface, périmètre, etc.) :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, M(\mu)(\lambda) = \sup_{M(\mu_\alpha) = \lambda} \alpha$$

$\Rightarrow$  comparaison avec des variables linguistiques (petit, grand...)

Surface (disques flous et structures du cerveau) :



# Mesures géométriques floues d'objets flous

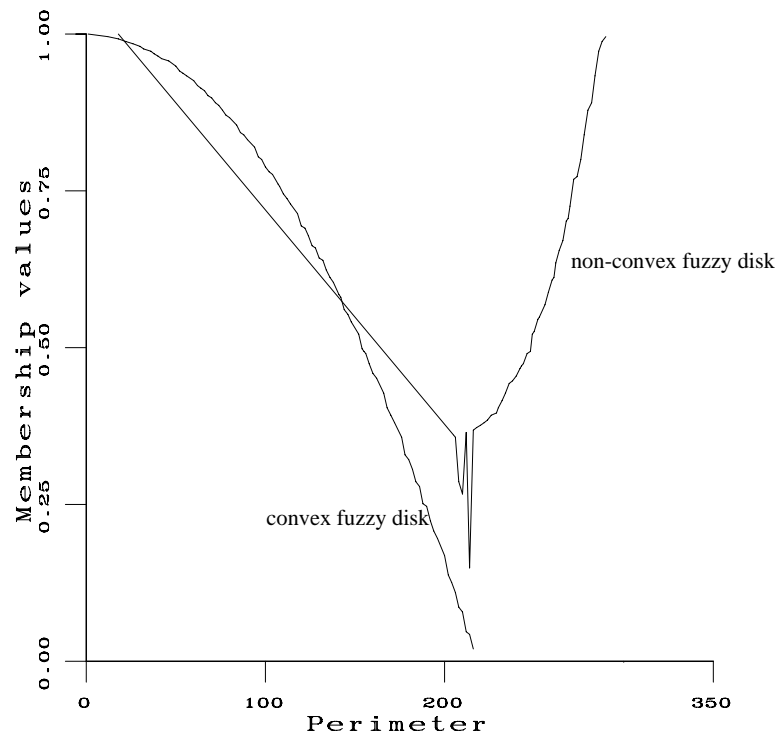
Objets imprécis  $\Rightarrow$  mesures également imprécises (nombres flous)

Forme floue d'une mesure  $M$  (surface, périmètre, etc.) :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, M(\mu)(\lambda) = \sup_{M(\mu_\alpha) = \lambda} \alpha$$

$\Rightarrow$  comparaison avec des variables linguistiques (petit, grand...)

Périmètre (disques flous) :



# Transformations géométriques

## Transformation nette

$$\forall x \in \mathcal{S}, \mathcal{T}(\mu)[\mathcal{T}(x)] = \mu(x)$$

$$\forall x \in \mathcal{S}, \mathcal{T}(\mu)(x) = \mu[\mathcal{T}^{-1}(x)]$$

## Transformation floue $\mathcal{T}(p_1, \dots, p_n)$ , $p_i$ défini par $\mu_{p_i}$

$$\forall z \in \mathcal{S}, \mu_{\mathcal{T}(y)}(z) = \sup_{p_1, \dots, p_n \mid \mathcal{T}_{p_1, \dots, p_n}(y) = z} t[\mu_{p_1}(p_1), \dots, \mu_{p_n}(p_n)]$$

$$\forall x \in \mathcal{S}, \mathcal{T}(\mu)(x) = \sup_{y \in \mathcal{S}} t[\mu(y), \mu_{\mathcal{T}(y)}(x)]$$

Calcul :

- principe d'extension (lourd)
- forme paramétrique (problème si les mêmes variables sont impliquées plusieurs fois)
- discrétisation des domaines des paramètres

# *Morphologie mathématique floue*

- Dilatation (degré d'intersection) :

$$D_\nu(\mu)(x) = \sup\{t[\nu(y - x), \mu(y)], y \in \mathcal{S}\}$$

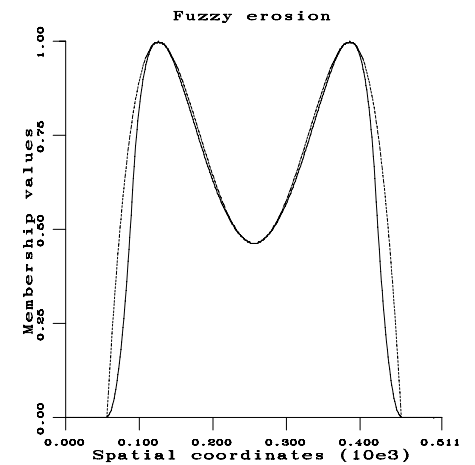
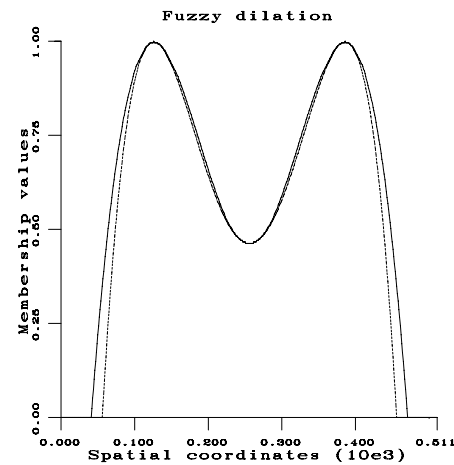
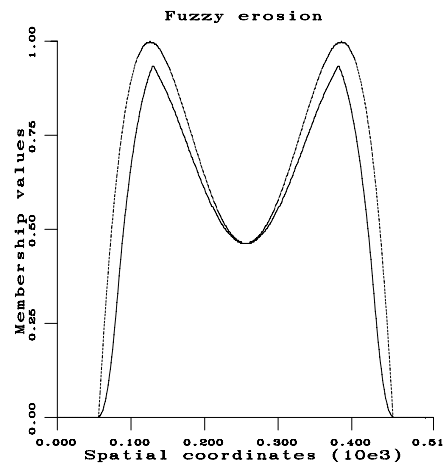
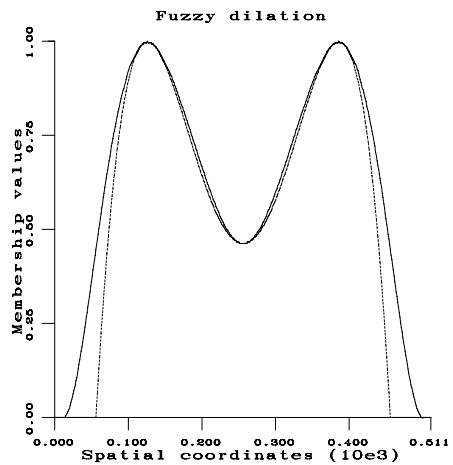
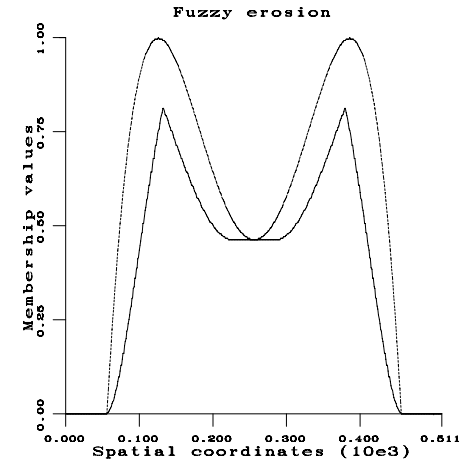
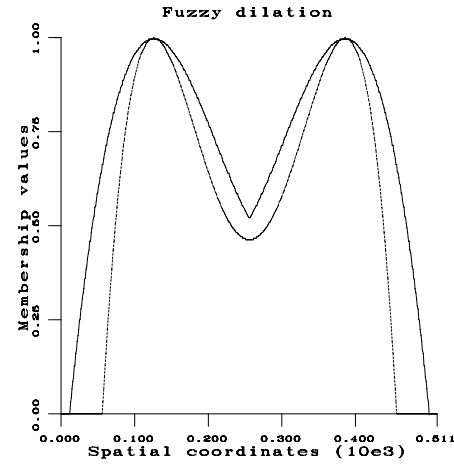
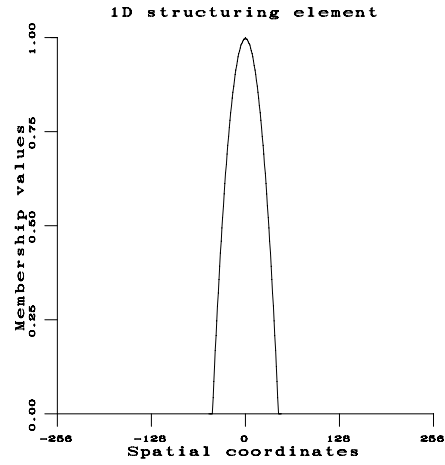
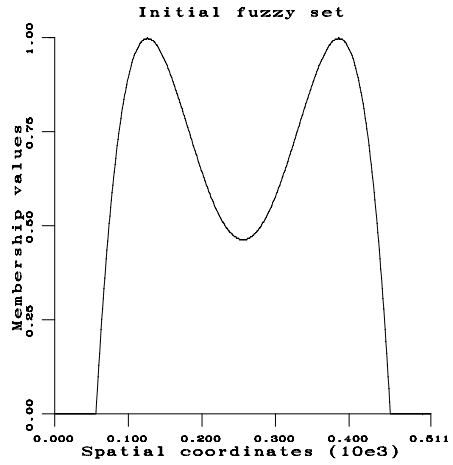
- Erosion (degré d'inclusion) :

$$E_\nu(\mu)(x) = \inf\{T[c(\nu(y - x)), \mu(y)], y \in \mathcal{S}\}$$

- Ouverture et fermeture par composition
- Propriétés similaires à celles de la morphologie classique

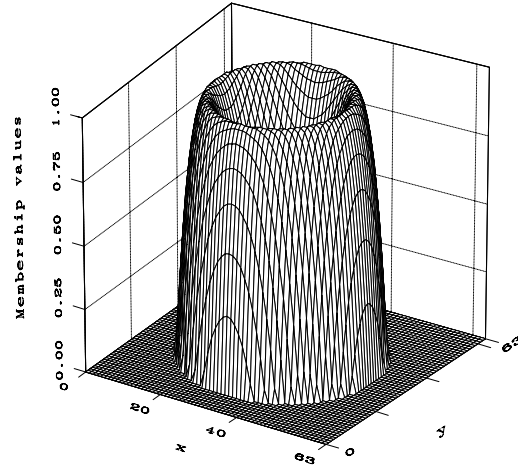
NB : il existe d'autres définitions

# Exemples de dilatation et érosion floues

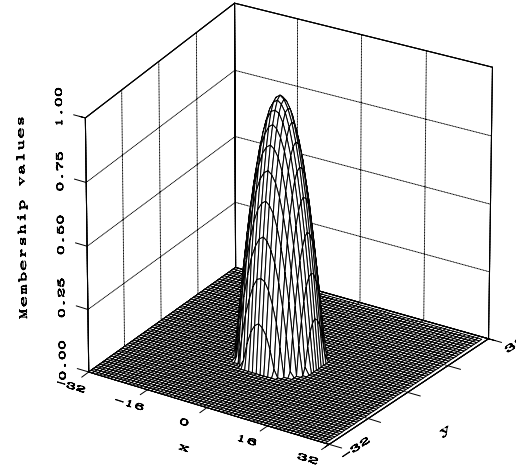


# Exemples de dilatation et érosion floues

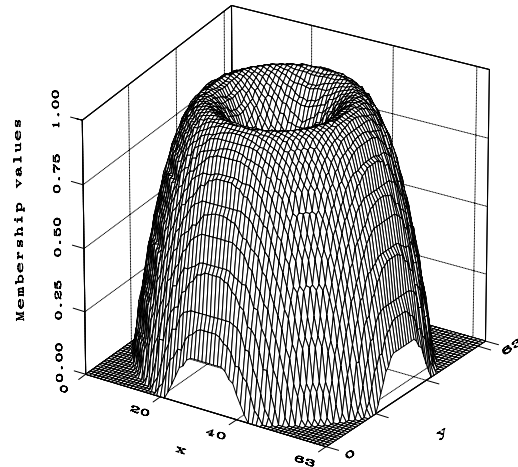
Initial 2D fuzzy set



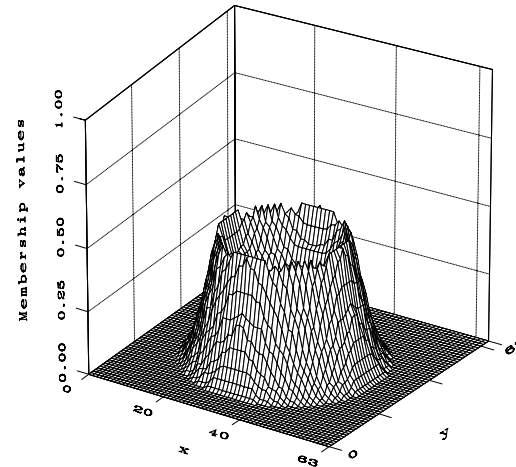
2D fuzzy structuring element



Fuzzy dilation

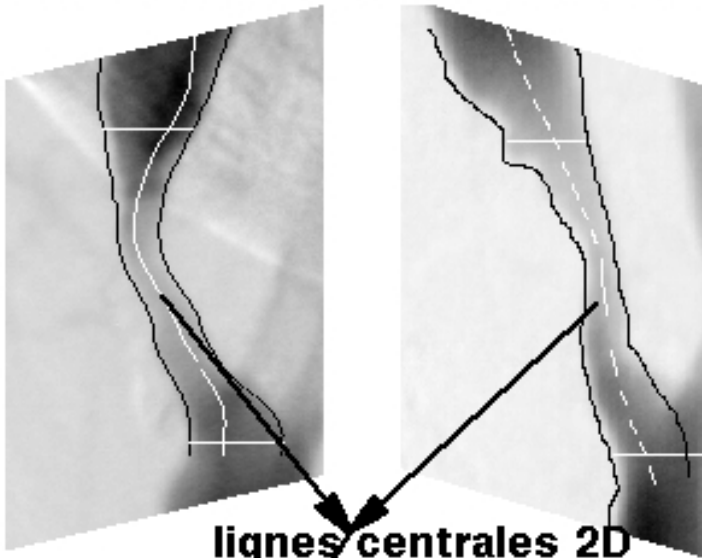


Fuzzy erosion



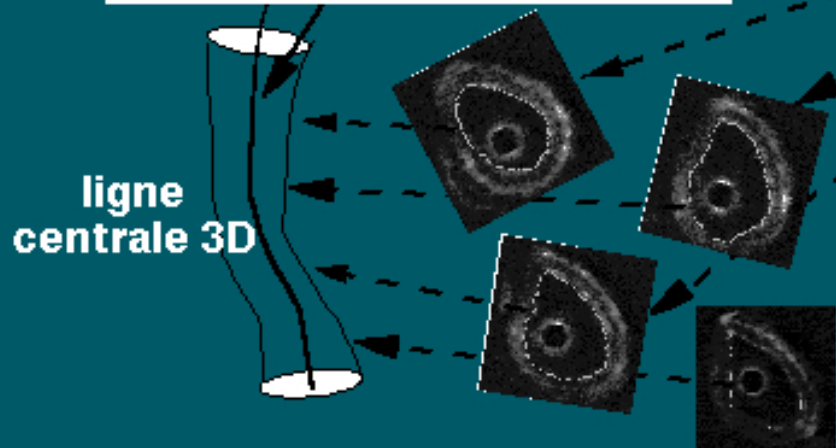
# Application à la prise en compte d'imprécision en reconstruction vasculaire

## 2 PROJECTIONS ANGIOGRAPHIQUES



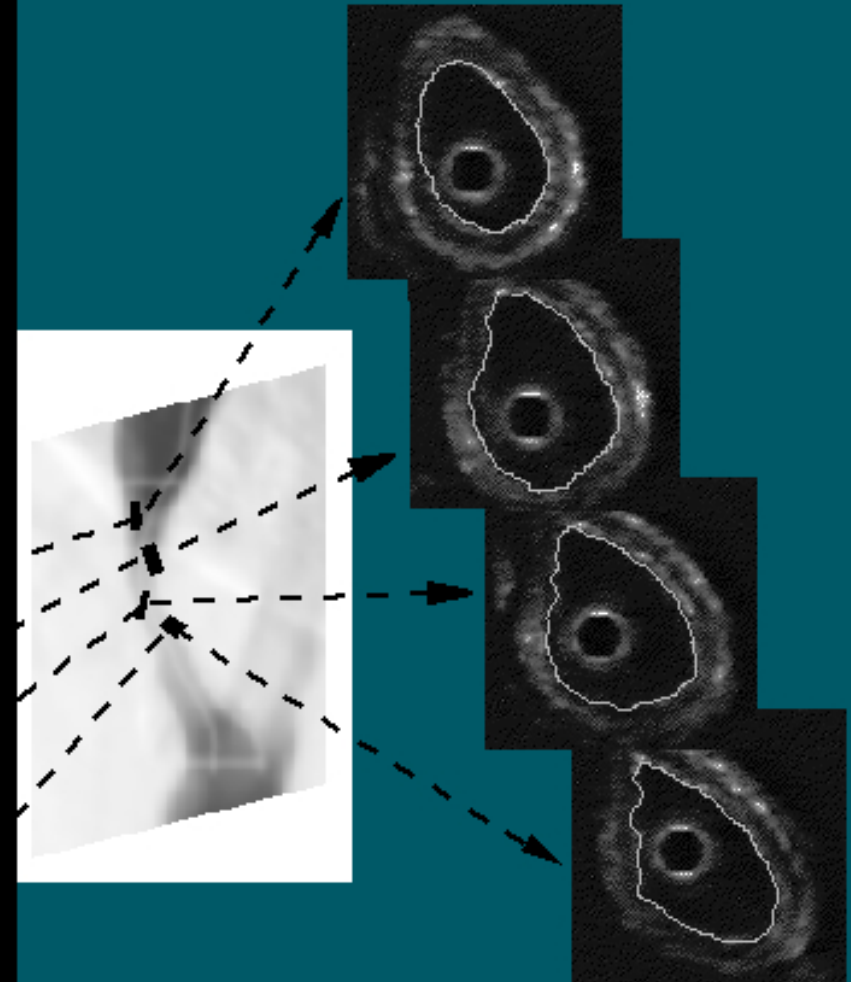
lignes centrales 2D

## MISE EN CORRESPONDANCE

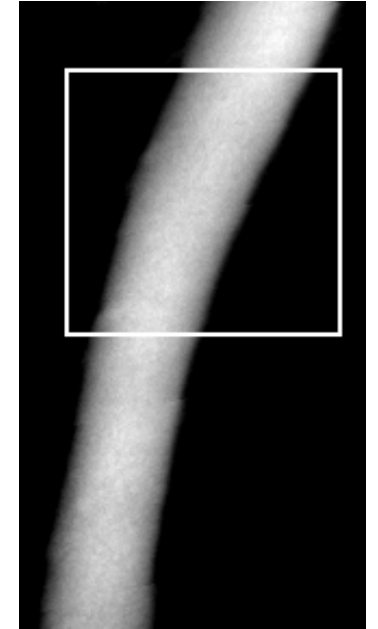
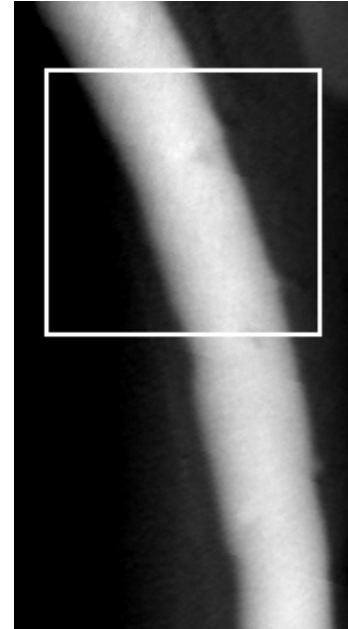
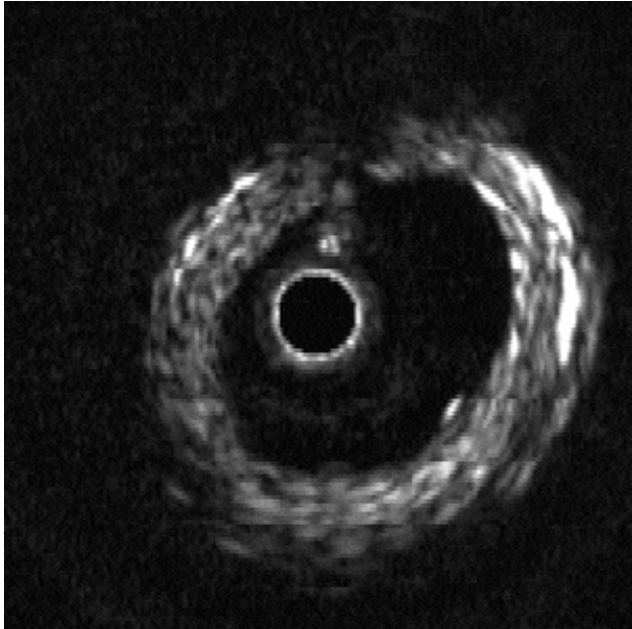


ligne centrale 3D

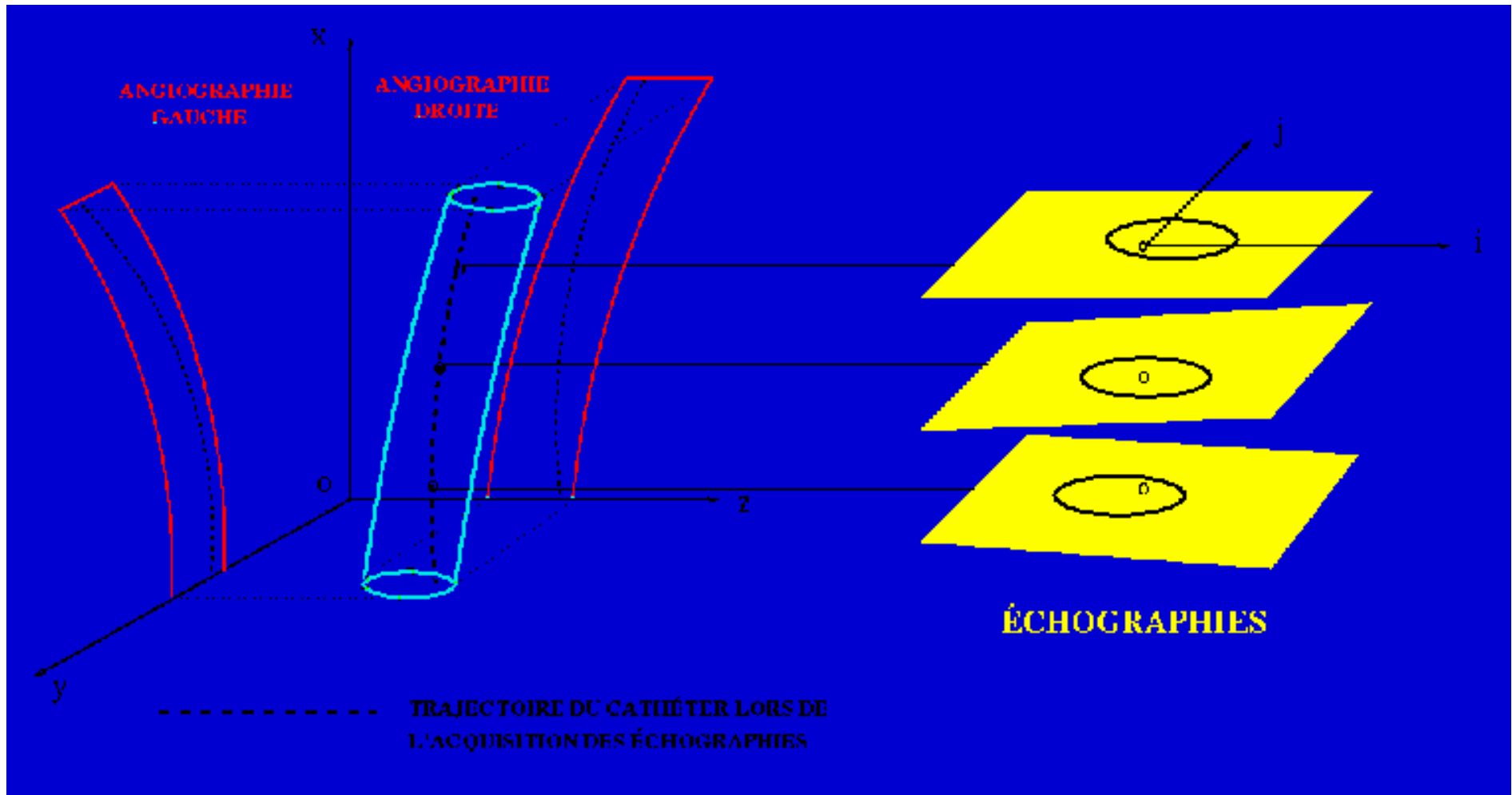
## SERIE COUPES ECHOGRAPHIQUES CONTROLE RADIOSCOPIQUE



# *Application à la prise en compte d'imprécision en reconstruction vasculaire*



# Application à la prise en compte d'imprécision en reconstruction vasculaire

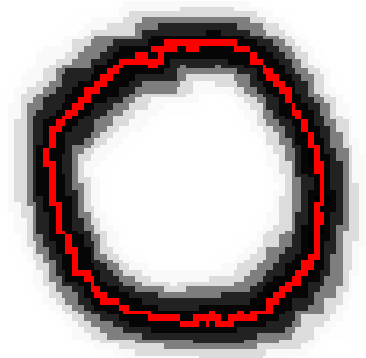
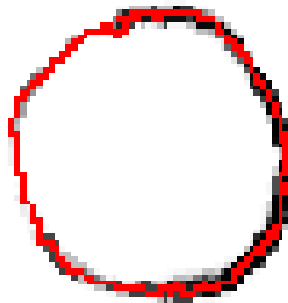
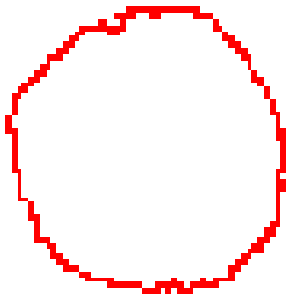


# Application à la prise en compte d'imprécision en reconstruction vasculaire

Imprécisions en rotation et en translation :

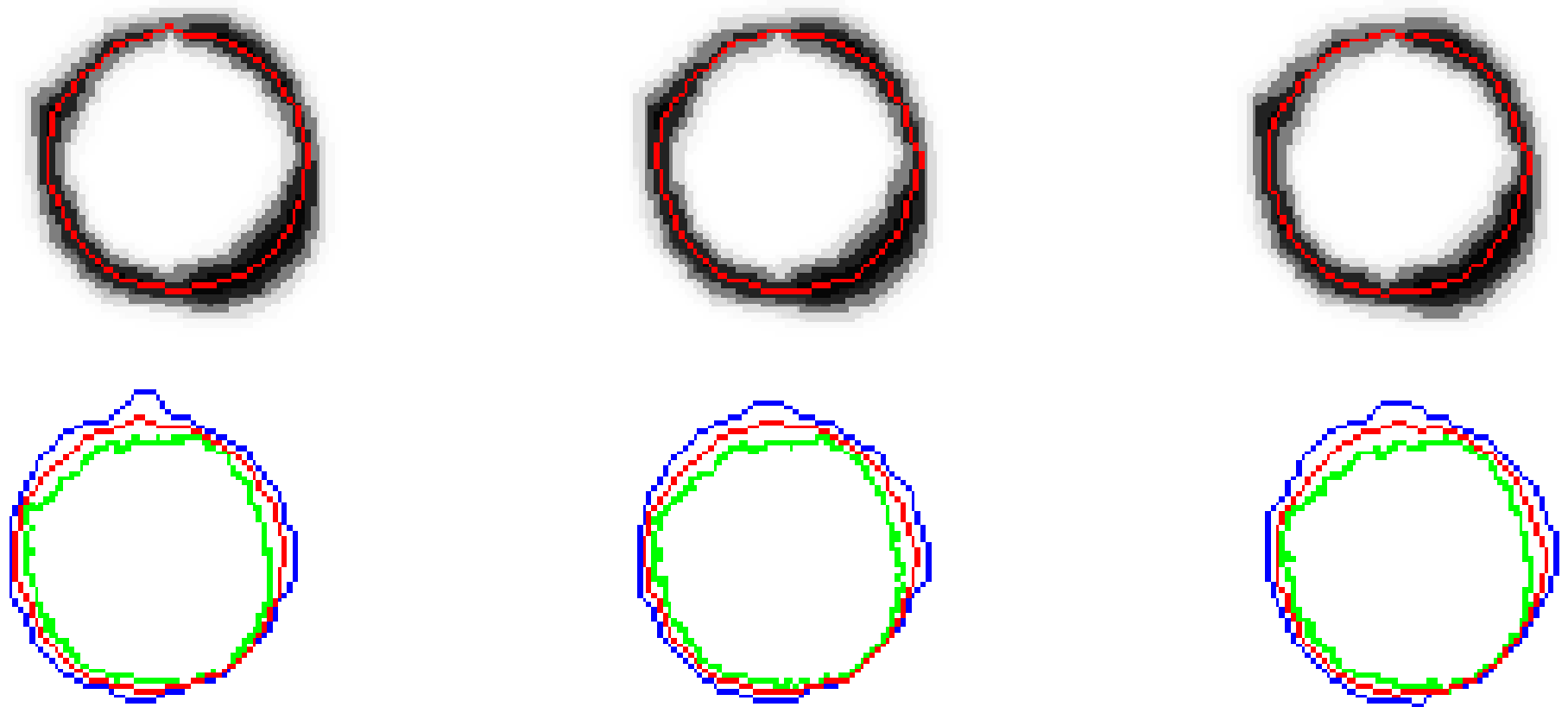
$$\mu_{V'_f}(x) = \sup\{\nu_1^y(x) \mid y \in V_{bin}\}$$

$$V_f = \bigcup \{D_{D\nu_2}(\nu_1^x)(\{x\}) \mid x \in V_{bin}\} = D_{\nu_2}(V'_f)$$



# *Application à la prise en compte d'imprécision en reconstruction vasculaire*

Résultat après fusion et décision :



# Topologie floue

Degré de connexité entre deux points

$$c_{\mu}(x, y) = \max_{L_{x,y}} \left[ \min_{1 \leq i \leq n} \mu(x_i) \right]$$

$L_{x,y} = x_1 \dots x_n$  = chemin de  $x_1 = x$  à  $x_n = y$  dans  $\mathcal{S}$

Composante connexe floue associée à  $x$

$$\forall y \in \mathcal{S}, \Gamma_{\mu}^x(y) = c_{\mu}(x, y)$$

Voisinage

$$n_{xy} = \frac{1}{1 + d(x, y)} \quad \text{ou} \quad n_{xy} = \frac{1 + \exp(-b)}{1 + \exp b \left( \frac{d(x,y)-1}{S} - 1 \right)}$$

Frontière interne / externe

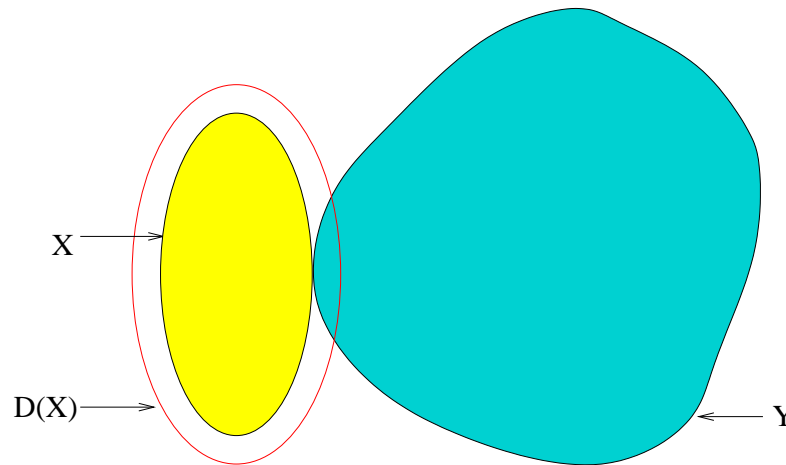
$$b_{\mu}^i(x) = t[\mu(x), \sup_{z \in \mathcal{S}} t[c(\mu)(z), n_{xz}]] \quad \text{ou} \quad b_{\mu}^i(x) = t[\mu(x), D_{B_c}(c(\mu))(x)]$$

$$b_{\mu}^e(x) = t[c(\mu)(x), \sup_{z \in \mathcal{S}} t[\mu(z), n_{xz}]] \quad \text{ou} \quad b_{\mu}^e(x) = t[D_{B_c}(\mu)(x), c(\mu)(x)]$$

# Adjacence binaire

Adjacence entre  $X$  et  $Y$ :

$$X \cap Y = \emptyset \text{ et } \exists x \in X, \exists y \in Y : n_c(x, y)$$



En termes morphologiques :

$$X \cap Y = \emptyset \text{ et } D_B(X) \cap Y \neq \emptyset, D_B(Y) \cap X \neq \emptyset$$

# Adjacence floue

Utilisation de la seule contrainte de connexité :

$$\mu_{adj}(\mu, \nu) = t[c(\mu_{int})(\mu, \nu), \sup_{x \in \mathcal{S}} \sup_{y \in \mathcal{S}} t[\mu(x), \nu(y), n_{xy}]]$$

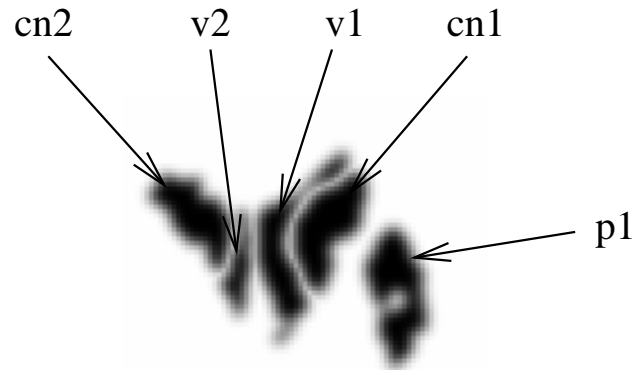
Expression morphologique :

$$\mu_{adj}(\mu, \nu) = t[\mu_{\neg int}(\mu, \nu), \mu_{int}[D_B(\mu), \nu], \mu_{int}[D_B(\nu), \mu]]$$

Propriétés :

- symétrique
- cohérent avec la définition binaire si  $\mu$ ,  $\nu$  et  $B$  sont binaires
- décroît si la distance entre  $\mu$  et  $\nu$  augmente
- invariant par transformations géométriques

# Adjacence floue : exemple



Objet flou 1	Objet flou 2	Degré d'adjacence	Adjacence dans le modèle (binaire)
v1	v2	0.368	1
v1	cn1	0.463	1
v1	p1	0.000	0
v1	cn2	0.035	0
v2	cn2	0.427	1
cn1	p1	0.035	0

# *Distances entre ensembles flous*

## Comparaison des fonctions d'appartenance

- approche fonctionnelle : distance à partir d'une norme  $L_p$

$$d_p(\mu, \nu) = \left[ \sum_{x \in \mathcal{S}} |\mu(x) - \nu(x)|^p \right]^{1/p}$$

$$d_\infty(\mu, \nu) = \max_{x \in \mathcal{S}} |\mu(x) - \nu(x)|$$

- approche ensembliste

$$d(\mu, \nu) = 1 - \frac{\sum_{x \in \mathcal{S}} \min[\mu(x), \nu(x)]}{\sum_{x \in \mathcal{S}} \max[\mu(x), \nu(x)]}$$

- ...
- adaptées au cas où les deux ensembles flous à comparer représentent la même structure ou une structure issue d'une image et un modèle
  - reconnaissance des formes à partir d'un modèle
  - recherche d'analogies ou similarités entre cas

# Distances entre ensembles flous

Prise en compte de la distance spatiale  $d_E$

- approche géométrique
  - espace de dimension  $n + 1$
  - fuzzification :  $d(\mu, \nu) = \int_0^1 D(\mu_\alpha, \nu_\alpha) d\alpha$
  - pondération

$$d(\mu, \nu) = \frac{\sum_{x \in \mathcal{S}} \sum_{y \in \mathcal{S}} d_E(x, y) \min[\mu(x), \nu(y)]}{\sum_{x \in \mathcal{S}} \sum_{y \in \mathcal{S}} \min[\mu(x), \nu(y)]}$$

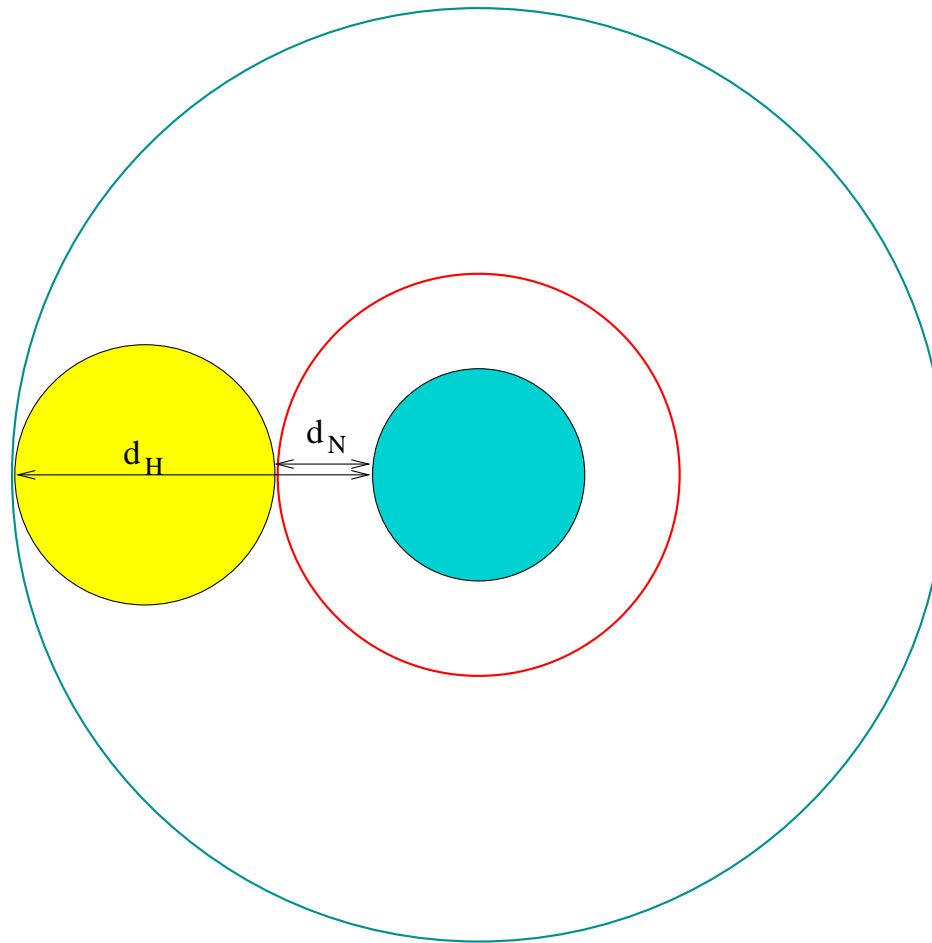
- nombre flou

$$d(\mu, \nu)(r) = \sup_{x, y, d_E(x, y) \leq r} \min[\mu(x), \nu(y)]$$

- approche morphologique

# *Distances entre ensembles flous : approche morphologique*

Expression de distances (minimum, Hausdorff...) en termes morphologiques (i.e. algébriques)  $\Rightarrow$  traduction aisée vers le cas flou



# ***Distribution de distance minimum (point le plus proche)***

$$d_N(X, Y) = \inf\{n \in \mathbb{N}, X \cap D^n(Y) \neq \emptyset\} = \inf\{n \in \mathbb{N}, Y \cap D^n(X) \neq \emptyset\}$$

Degré avec lequel la distance entre  $\mu$  et  $\mu'$  est inférieure à  $n$  (distribution de distance) :

$$\Delta_N(\mu, \mu')(n) = f\left[\sup_{x \in \mathcal{S}} t[\mu(x), D_\nu^n(\mu')(x)], \sup_{x \in \mathcal{S}} t[\mu'(x), D_\nu^n(\mu)(x)]\right]$$

Distance de Hausdorff : équations similaires

# Densité de distance minimum (point le plus proche)

$$d_N(X, Y) = n \Leftrightarrow D^n(X) \cap Y \neq \emptyset \text{ et } D^{n-1}(X) \cap Y = \emptyset$$

$$d_N(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset$$

Degré avec lequel la distance entre  $\mu$  et  $\mu'$  est égale à  $n$  (densité de distance) :

$$\delta_N(\mu, \mu')(n) = t[\sup_{x \in \mathcal{S}} t[\mu'(x), D_\nu^n(\mu)(x)], c[\sup_{x \in \mathcal{S}} t[\mu'(x), D_\nu^{n-1}(\mu)(x)]]]$$

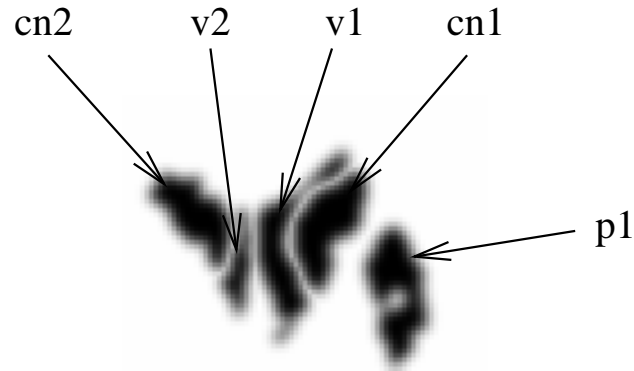
$$\delta_N(\mu, \mu')(0) = \sup_{x \in \mathcal{S}} t[\mu(x), \mu'(x)]$$

Distance de Hausdorff : équations similaires

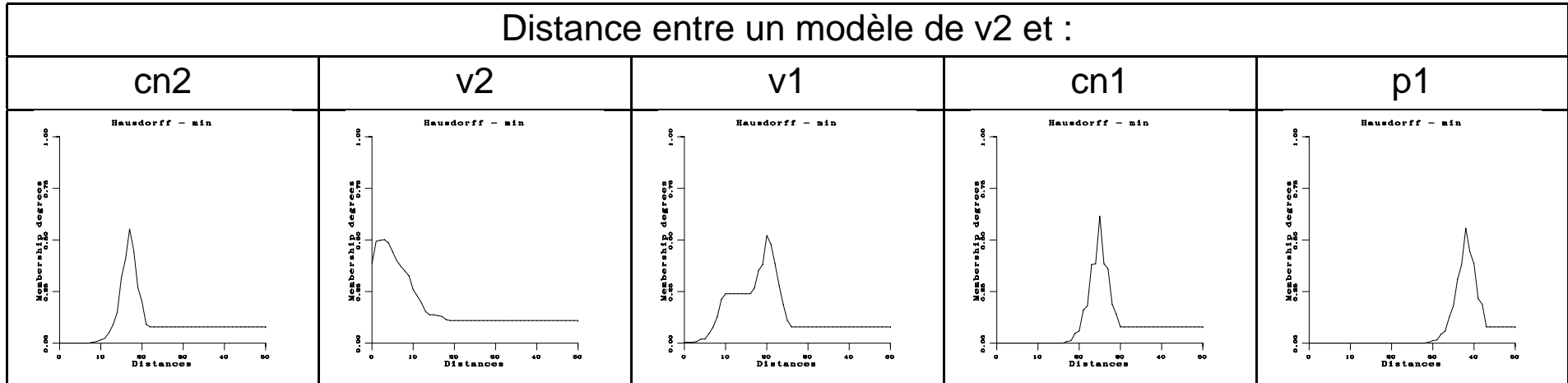
# Propriétés des distances morphologiques

- nombres flous
- positives : support inclus dans  $\mathbb{R}^+$
- symétriques en  $\mu$  et  $\mu'$
- si  $\mu$  est normalisé,  $\delta_N(\mu, \mu)(0) = 1$  et  $\delta_N(\mu, \mu)(n) = 0$  pour  $n > 1$
- $\delta_H(\mu, \mu')(0) = 1$  implique  $\mu = \mu'$  pour  $T(a, b) = \min(1, a + b)$ , et implique  $\mu$  et  $\mu'$  binaires et égaux pour  $T = \max$
- égalité triangulaire non satisfaite en général

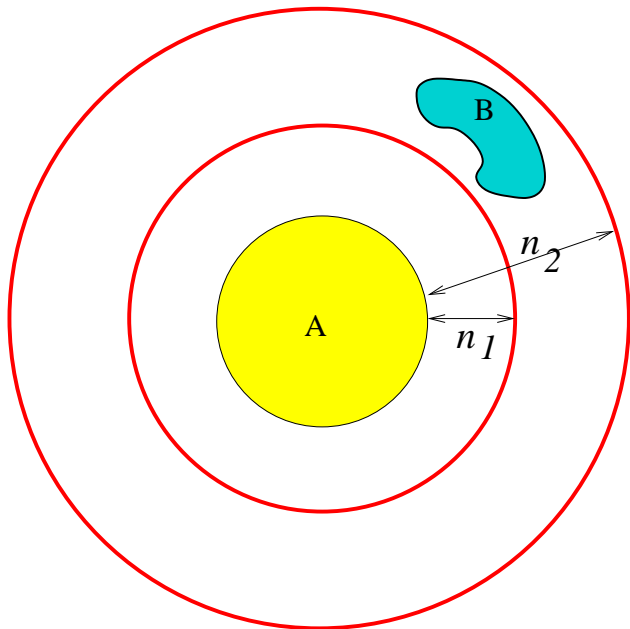
# Distance floue : exemple



Distance entre un modèle de v2 et :



# Représentation spatiale de connaissances sur la distance



- Cas binaire :  $B$  doit à une distance comprise entre  $n_1$  et  $n_2$  de  $A \Rightarrow$  **région d'intérêt pour  $B$**  :  $D^{n_2}(A) \setminus D^{n_1-1}(A)$
- Cas flou : distance approximative donnée par un intervalle flou  $\Rightarrow$  deux éléments structurants :

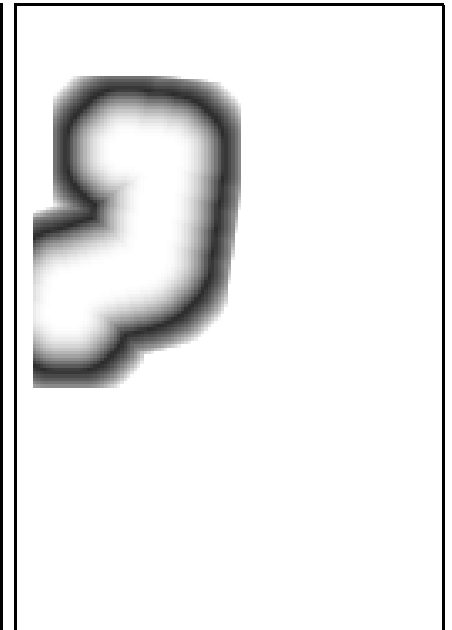
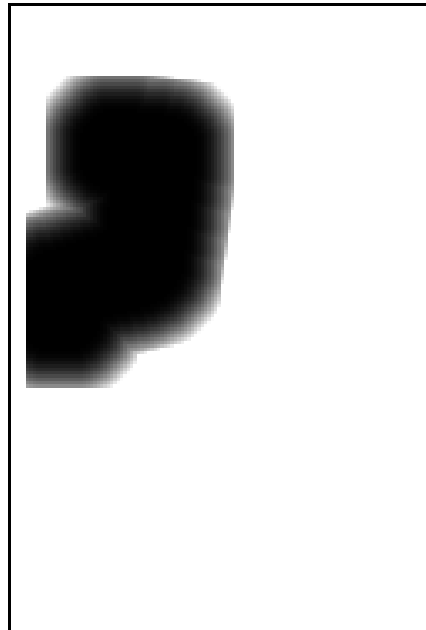
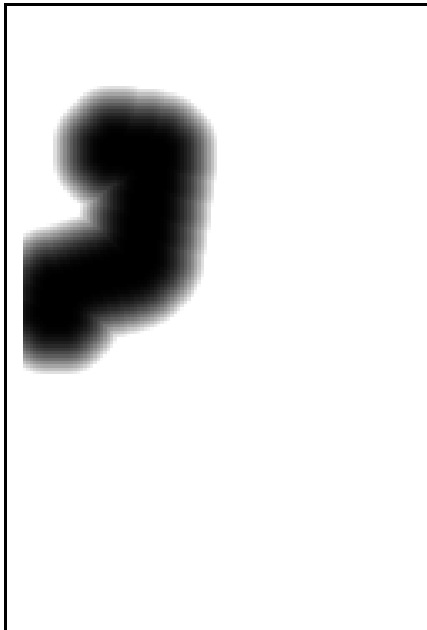
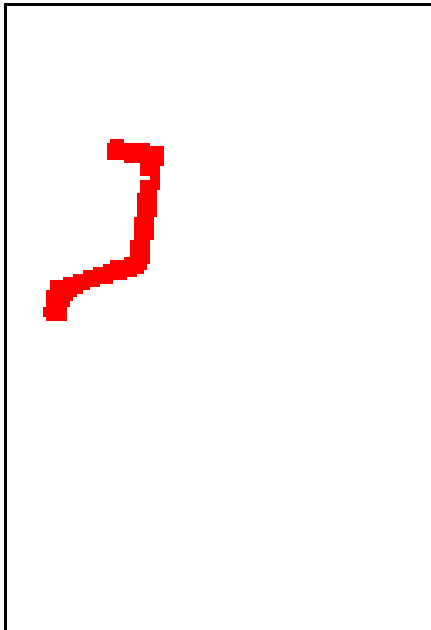
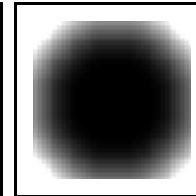
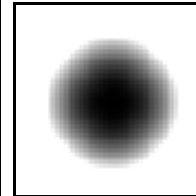
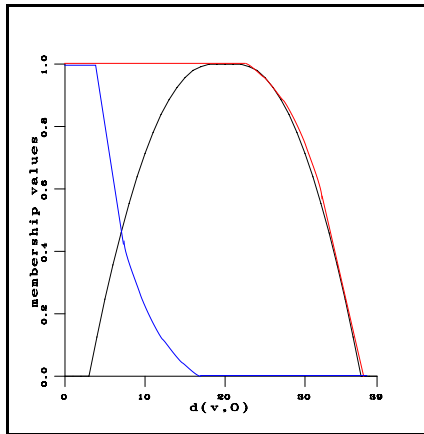
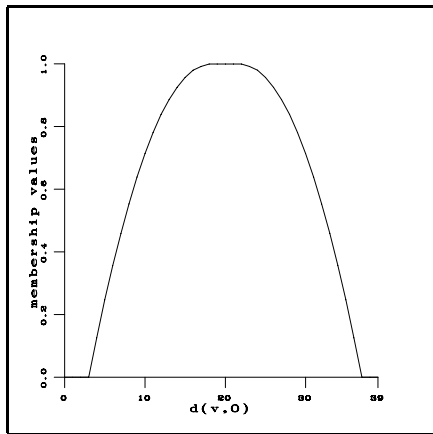
$$\nu_1(x) = 1 - \mu_n(d_E(x, 0)) \text{ si } d_E(x, 0) \leq n_1, \quad 0 \text{ sinon}$$

$$\nu_2(x) = 1 \text{ si } d_E(x, 0) \leq n_2, \quad \mu_n(d_E(x, 0)) \text{ sinon}$$

**Région d'intérêt floue :**

$$\mu_{distance} = t[D_{\nu_2}(\mu), 1 - D_{\nu_1}(\mu)]$$

# Représentation spatiale de connaissances sur la distance : exemple



# *Autres relations spatiales*

- direction relative
  - histogramme d'angles
  - projection
  - dilatation directionnelle
- entre
- longe
- entoure
- parmi
- ...

# C-moyennes floues

- $X$  = ensemble d'éléments à classer (définis dans un certain espace de caractéristiques)
- $P = \{C_1, C_2, \dots, C_C\}$  = ensemble de classes

## Partition floue :

1.  $\forall x_i \in X, \forall C_j \in P, \mu_{ij} \in [0, 1]$ , où  $\mu_{ij}$  = degré d'appartenance de  $x_i$  à  $C_j$
2.  $\forall x_i \in X, \sum_{j=1}^C \mu_{ij} = 1$
3.  $\forall j \leq C, 0 < \sum_{i=1}^N \mu_{ij} < N$ , où  $N$  = cardinal de  $X$

## Optimisation de :

$$J_m = \sum_{j=1}^C \sum_i^N \mu_{ij}^m \|x_i - m_j\|^2$$

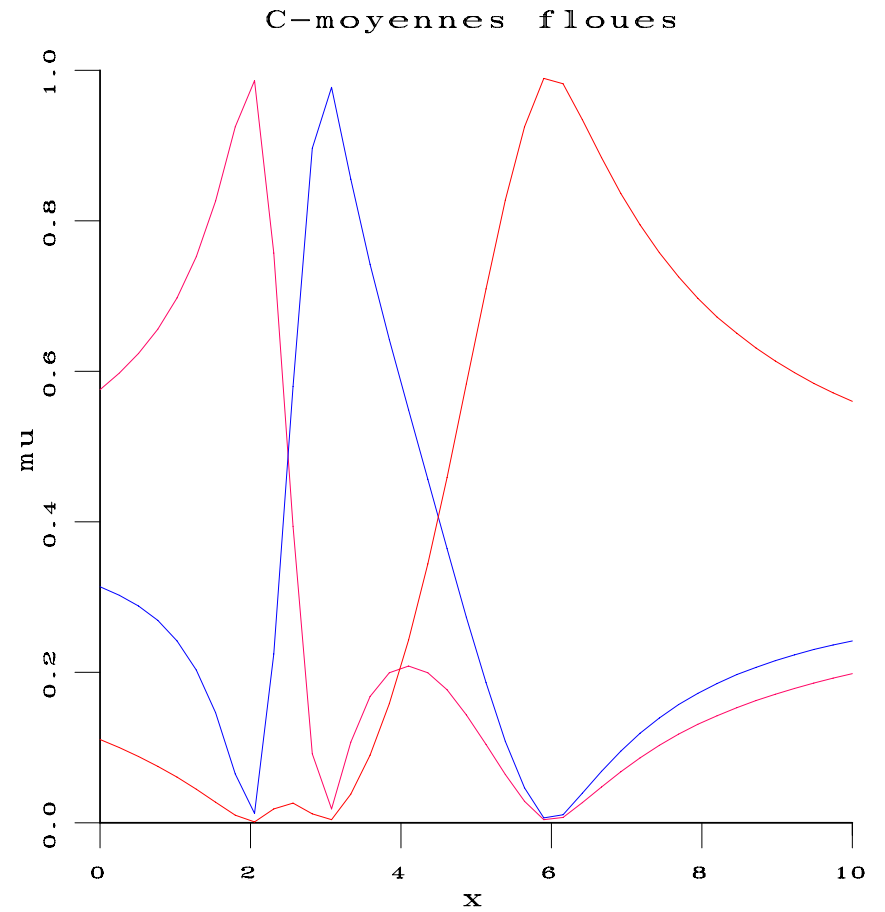
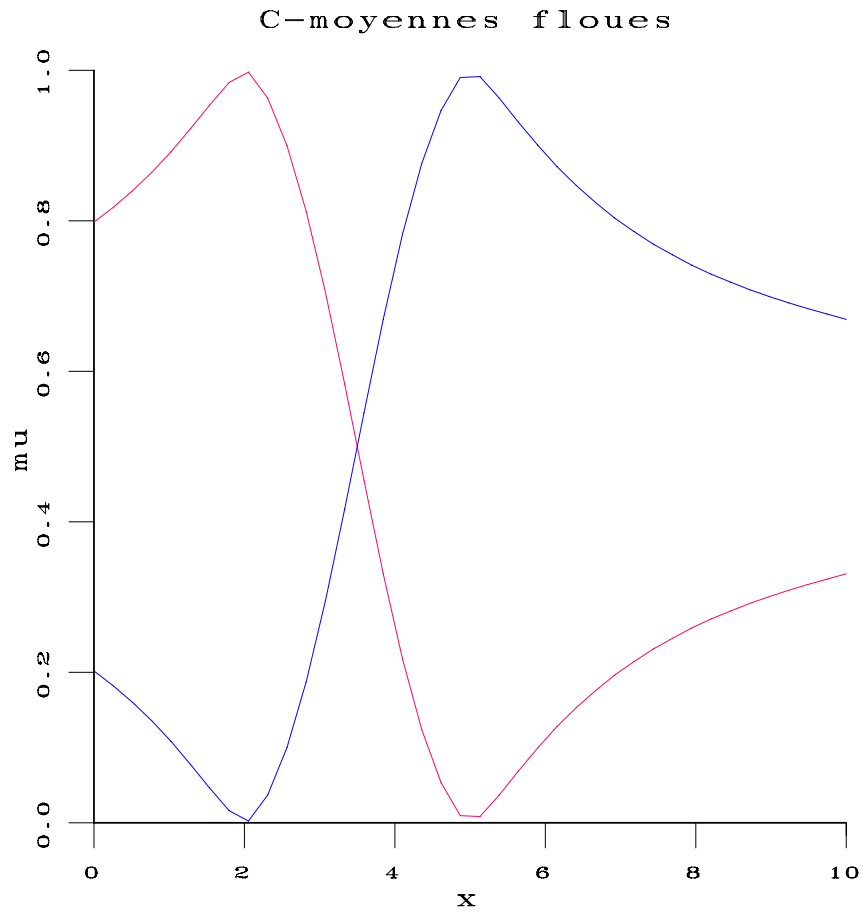
## Solution itérative :

$$\mu_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^C \left[ \frac{\|x_i - m_j\|}{\|x_i - m_k\|} \right]^{\frac{2}{m-1}}}$$

$$m_j = \frac{\sum_i \mu_{ij}^m x_i}{\sum_i \mu_{ij}^m}$$

Convergence vers un minimum local de  $J_m$

# C-moyennes floues : exemple en 1D



# C-moyennes possibilistes

Optimisation de :

$$J = \sum_{j=1}^C \sum_{i=1}^N \mu_{ij}^m \|x_i - m_j\|^2 + \sum_{j=1}^C \eta_j \sum_{i=1}^N (1 - \mu_{ij})^m \|x_i - m_j\|^2$$

Solution itérative :

$$\mu_{ij} = \frac{1}{1 + \frac{\|x_i - m_j\|^2}{\eta_j} \frac{1}{m-1}}$$

⇒ Meilleure forme des fonctions d'appartenance

Détermination de  $\eta_j$

- à partir de la dispersion :

$$\eta_j = \frac{\sum_{i=1}^N \mu_{ij} \|x_i - m_j\|^2}{\sum_{i=1}^N \mu_{ij}}$$

- à partir d'échantillons de la classe de  $\mu_{ij} \geq \alpha$  :

$$\eta_j = \frac{\sum_{i \in \{\mu_{ij}\}_\alpha} \|x_i - m_j\|^2}{|\{\mu_{ij}\}_\alpha|}$$

# ***k-plus proches voisins flous***

Cas binaire :

$$\mu_i(x) = U\left[\sum_{j=1}^k \mu_i(x_j)\right]$$

avec

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > \frac{k}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cas flou :

$$\mu_i(x) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{1}{b_i} \left(\frac{k}{2} - t_i(x)\right)\right]}$$

$$t_i(x) = \sum_{j=1}^k \mu_i(x_j) \quad t_i(x) = \sum_{j=1}^k \mu_i(x_j) \exp\left[-\lambda \left(\frac{d(x, x_j)}{d_m^i}\right)^2\right]$$

$b_i$  : contrôle le flou, par exemple en fonction de l'entropie floue

$$b_i = H(i) = \frac{1}{K} \sum_x [\mu_i(x) \log(\mu_i(x)) + (1 - \mu_i(x)) \log(1 - \mu_i(x))]$$

# Filtrage et segmentation (opérateurs locaux)

- Approches fonctionnelles
  - minimisation d'un indice de flou
  - fonction de pondération floue dans des filtres classiques
- Techniques à base de règles

- exemple de lissage :

SI	un pixel est <i>plus foncé</i> que ses voisins
ALORS	<i>augmenter</i> son niveau de gris
SINON SI	le pixel est <i>plus clair</i> que ses voisins
ALORS	<i>diminuer</i> son niveau de gris
SINON	le laisser inchangé

- exemple de détecteur de contour :

SI	un pixel <i>appartient au contour</i>
ALORS	<i>augmenter beaucoup</i> son niveau de gris
SINON	<i>diminuer beaucoup</i> son niveau de gris