Filtrage d'un créneau

On considère le signal $x(t)$=rect$_T(t)$, qui vaut 1 dans l'intervalle $(-T/2,T/2)$ et 0 sinon. On rappelle que sa transformée de Fourier est donnée par :

$$X(f)=\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$$

1) On note $y(t)$ le signal obtenu par périodisation de $x(t)$ avec la période $2T$. A partir de l'expression de la transformée de Fourier de $x(t)$, déterminer les coefficients de Fourier de sa composante continue, de sa fréquence fondamentale et de ses 2 premières harmoniques.
2) Le signal $y(t)$ est mis à l'entrée d'un filtre dont le gain en fréquence est donné par :

$$H(f)=\frac{H_0}{1+jkf}$$

   On note $z(t)$ le signal en sortie. Déterminer les coefficients de Fourier de sa composante continue, de sa fréquence fondamentale et de ses 2 premières harmoniques, en fonction de H_0, T et k.

Filtre RIF

On considère le filtre linéaire dont la réponse impulsionnelle est $h(0)=0.05$, $h(1)=1$, $h(2)=0.05$ et $h(n)=0$ pour $n \notin \{0,1,2\}$.

1) Ce filtre est-il stable ? Quel est son gain complexe ? Est-il à phase linéaire ? Esquissez la forme de son gain.
2) On applique à l'entrée un signal $x_e(n)$ qui provient de l'échantillonnage à la fréquence de f_e=1000Hz du signal $\cos(2\pi f_0 t)$ où f_0=100Hz. On note $y_e(n)$ le signal en sortie du filtre. Quelle est l'expression de $y_e(n)$ (on donne $\cos(\pi/5)=0.81$).

Résolution en fréquence

On échantillonne un signal avec une fréquence f_e=1000 échantillons/s. On note N le nombre de points prélevés.

1) Expliquer comment déterminer *l'ordre de grandeur* de N, si on veut, en utilisant une transformée de Fourier discrète, pouvoir distinguer des fréquences séparées de R=0.2Hz.
2) Expliquer de façon qualitative le rôle d'une fenêtre de pondération sur le signal.

Numérisation d'un signal

Soit un signal $x(t)$ réel à temps continu, centré de bande 7kHz. On l'échantillonne à la fréquence $f_e = 1/T_e$. On note $x_e(n)=x(nT_e)$ où $n\in\mathbf{Z}$, puis on le quantifie de façon uniforme sur N=8 bits. On note P_x la puissance du signal $x_e(t)$ et on choisit le pas de quantification q de façon à pouvoir représenter les amplitudes de $x_e(n)$ comprises entre $-4\sqrt{P_X}$ et $+4\sqrt{P_X}$. Par conséquent :

$$q = \frac{8\sqrt{P_X}}{2^N}$$

1) Quelle est la fréquence d'échantillonnage la plus faible qui évite le repliement de spectre ?
2) Quel est le débit binaire obtenu en sortie du quantificateur pour la fréquence d'échantillonnage de la question 1).
3) On note $y_e(n)$ la valeur en sortie du quantificateur et on pose $\varepsilon(n) = x_e(n) - y_e(n)$. On admet que l'erreur de quantification $\varepsilon(n)$ est un processus aléatoire blanc, dont la loi est uniforme entre

$(-q/2, q/2)$. Déterminer sa moyenne, sa fonction d'autocorrélation, sa d.s.p. et sa puissance P_ε en fonction de q.

4) Application : quelle valeur de N faut-il prendre si on veut un rapport P_X/P_ε de 41 dB ? (on donne $\log_{10}(2)=0.3$ et $\log_{10}(3)=0.48$).

Extraction d'une sinusoïde dans du bruit blanc

Remarque : les questions 6), 7), 8) et 9) sont indépendantes des questions 1) à 5).

On considère une observation à temps discret $Y(n) = X(n\,;a) + B(n)$ $(n \in \mathbf{Z})$ réelle, qui est la somme d'une suite aléatoire $X(n\,;a)$, stationnaire au second ordre au sens large, centrée, représentant le signal dont on veut estimer le paramètre vectoriel a et d'un bruit $B(n)$ supposé stationnaire au second ordre au sens large, centré, blanc, de variance σ^2, non corrélé avec $X(n\,;a)$.

On note respectivement $\mathbf{R}_X$, $\mathbf{R}_B$ et $\mathbf{R}_Y$ les matrices de covariance de dimension $N \times N$ du vecteur aléatoire obtenu en concaténant N instants consécutifs de $X(n\,;a)$, de $B(n)$ et de $Y(n)$. Ainsi puisque $X(n)$ est centré, $\mathbf{R}_X$ est définie par le terme générique :

$$\mathbf{R}_X = \left(E[X(k)X(n)]\right)_{\substack{0 \le n \le N-1 \\ 0 \le k \le N-1}}$$

et du fait que $B(n)$ est supposé blanc $\mathbf{R}_B = \sigma^2 \mathbf{I}_N$ où $\mathbf{I}_N$ désigne la matrice identité de dimension N.

1) Déterminer l'expression de $E(Y(n))$.
2) Déterminer l'expression de la fonction d'autocorrélation $R_{YY}(k)$ de $Y(n)$ en fonction de la fonction d'autocorrélation $R_{XX}(k)$ de $X(n\,;a)$ et de σ^2.
3) En déduire que l'expression de $\mathbf{R}_Y$ en fonction de $\mathbf{R}_X$ et de σ^2. Comment s'exprime $\mathbf{R}_X$ à partir de $R_{XX}(k)$.
4) On suppose que la matrice $\mathbf{R}_X$ est de rang $(N-r)$. On désigne par $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r)$ une base de son sous-espace nul (noyau) et par $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{N-r})$ une base de son sous-espace propre associé aux valeurs propres non nuls $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N-r})$ (on rappelle que λ_k est positif).
   Déterminer la forme de la décomposition propre de $\mathbf{R}_Y$ à partir de $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r)$ et de $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{N-r})$.
5) Quel est l'ordre de multiplicité de la plus petite valeur propre de $\mathbf{R}_Y$?

Le processus aléatoire $X(n\,;(A, f_0))$ est à présent défini par :

$$X(n; A, f_0) = A\cos(2\pi f_0 n + \Phi)$$

où $A > 0$ et $f_0 \in (0, 1/2)$ désignent les deux paramètres scalaires à extraire. Φ une variable aléatoire de loi uniforme sur $(-\pi, +\pi)$, supposée indépendante de $B(n)$.

6) Déterminer en fonction de A, f_0 l'expression de $E(X(n))$.
7) Déterminer en fonction de A, f_0 l'expression de $R_{XX}(k)$.
8) Montrer qu'il existe une valeur z_0, dont on déterminera l'expression, telle que pour tout k :
$$R_{XX}(k) - 2z_0 R_{XX}(k-1) + R_{XX}(k-2) = 0$$
9) En déduire le rang de $\mathbf{R}_X$.
10) Quelle est la forme de la décomposition propre de $\mathbf{R}_Y$?
11) Application : pour N=3, en déduire une procédure de calcul de f_0 à partir de la donnée de $\mathbf{R}_Y$.

CORRIGÉ

Filtrage d'un créneau

1)
Comme $X(f)=\dfrac{\sin(\pi fT)}{\pi f}$, on en déduit que $Y_n=\dfrac{1}{2T}\ X(\dfrac{n}{2T})=\dfrac{\sin(n\pi/2)}{\pi n}$.

Composante continue : $Y_0=1/2$. Fréquence fondamentale : $Y_{\pm1}=1/\pi$. Harmonique $n=\pm2$: $Y_{\pm2}=0$. Harmonique $n=\pm3$: $Y_{\pm3}=-3/\pi$.

2)
En appliquant le résultat fondamental : $Z_n=H(\dfrac{n}{2T})Y_n$, il vient :
Composante continue : $Z_0=H_0/2$.
Fréquence fondamentale : $Z_{\pm1}=\dfrac{H_0}{\pi(1\pm jk/2T)}$

Harmonique $n=\pm2$: $Z_{\pm2}=0$. Harmonique $n=\pm3$: $Z_{\pm3}=$.....

Filtre RIF

1)
Le filtre est stable car sans pôles. $H(f)=e^{2j\pi f}(1+0.1\cos(2\pi f))$. Il est à phase linéaire.

2)
En fréquence réduite $x_e(n)=A\cos(2\pi f_{0\mathrm{r}}n)$ où $f_{0\mathrm{r}}=f_0/f_\mathrm{e}=0.1$. Comme les sinusoïdes se conservent $y_e(n)=B\cos(2\pi f_{0\mathrm{r}}n+\phi)$ où $B=|H(f_{0\mathrm{r}})|=(1+0.1\cos(2\pi/10)=1.081$ et $\phi=\mathrm{Arg}(H(f_{0\mathrm{r}}))=-\pi/5$.

Résolution en fréquence

1)
il faut observer une durée de *l'ordre* de $T=\lambda(1/R)=2\lambda$ s et par conséquent prendre N de l'ordre de 2000λ points ; on prend couramment λ entre 1 et 2.

2)
Voir polycopié : corrigé exercice 1.19.

Numérisation d'un signal

1) $f_e=14$kHz**.**

2) $D=14\times8$ kbits/s=112kbits/s.

3)
La loi de $x_e(n)$ pour tout n a pour densité $p_\varepsilon(e)=\dfrac{1}{q}\ \mathbf{1}_{(-q/2,q/2)}(e)$. Par conséquent $E(\varepsilon(n))=0$.
$E(\varepsilon^2(n))=\int e^2p_\varepsilon(e)de=q^2/12$. Comme $\varepsilon(n)$ est blanche $E(\varepsilon(n)\varepsilon(p))=E(\varepsilon(n))E(\varepsilon(p))=0$. Et donc on a :

$$E(\varepsilon(n))=0\ ,\ R_{\varepsilon\varepsilon}(k)=\frac{q^2}{12}\,\delta(k),\ S_{\varepsilon\varepsilon}(f)=\frac{q^2}{12}\ \text{ et } P_\varepsilon=\frac{q^2}{12}$$

4)
Le rapport P_X/P_ε a pour expression en remplaçant q par sa valeur (question 3) :

$$\rho=\frac{P_X}{P_\varepsilon}=2^{2N}\frac{12}{2^6}$$

qui donne $\rho_{\mathrm{dB}}=10\log(\rho)=2N\,(10\log(2))+10\log(3)-10\log(16)\approx 6N-7$ et donc $N=8$.

Extraction d'une sinusoïde dans du bruit blanc

1)

Puisque $X(n;a)$ et $B(n)$ sont centrés, $E(Y(n)) = 0$.

2)

En développant $E(Y(n+k)Y^*(n))$ et en utilisant la non corrélation de $X(n)$ et $B(n)$, on obtient pour la fonction d'autocorrélation de $Y(n)$:

$$R_{YY}(k)= E(Y(n+k)Y^*(n)) =E(X(n+k)X^*(n)) + E(B(n+k)\, B^*(n)) = R_{XX}(k)+ R_{BB}(k)$$

Par conséquent $Y(n)$ est SSL. En notant que $B(n)$ est blanc, il vient :

$$R_{YY}(k)= R_{XX}(k)+ \sigma^2\delta(k)$$

3)

En utilisant la stationnarité de $X(n)$, $\mathbf{R}_X$ s'écrit en fonction de $R_{XX}(k)$:

$$\mathbf{R}_X = \begin{pmatrix} R_{XX}(0) & \cdots & R_{XX}(N-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{XX}(-N+1) & \cdots & R_{XX}(0) \end{pmatrix}$$

Puisque $R_{XX}(k)$ est paire, $\mathbf{R}_X$ est symétrique. Pour le bruit $B(n)$ supposé, centré, blanc de variance σ^2, on a $\mathbf{R}_B=\sigma^2\mathbf{I}_N$.

Par conséquent :

$$\mathbf{R}_Y = \mathbf{R}_X + \sigma^2\mathbf{I}_N \qquad (*)$$

4)

Si la matrice $\mathbf{R}_X$ est de rang $N-r$, la dimension de l'espace nul est égal à r. En multipliant les deux membres de l'équation (*) par un vecteur $\mathbf{w}$ de l'espace nul, on obtient $\mathbf{R}_Y\mathbf{w}=\sigma^2\mathbf{w}$. Par conséquent tout vecteur de l'espace nul de $\mathbf{R}_X$ est vecteur propre de $\mathbf{R}_Y$ associé à la même valeur propre σ^2.

En multipliant les deux membres de l'équation (*) par un vecteur propre $\mathbf{v}$ de $\mathbf{R}_X$ de valeur propre $\lambda\neq 0$, on obtient $\mathbf{R}_Y\mathbf{v}=(\lambda+\sigma^2)\mathbf{v}$. Par conséquent tout vecteur propre de $\mathbf{R}_X$ de valeur propre λ, est vecteur propre de $\mathbf{R}_Y$ associé à la valeur propre $(\lambda+\sigma^2)$. Comme la matrice $\mathbf{R}_X$ est non négative, λ est positif et $\lambda+\sigma^2>\sigma^2$.

5)

On déduit de la question précédente que $\mathbf{R}_Y$ a N valeurs propres μ, positives qui s'ordonnent de la façon suivante :

$$\mu_1=\lambda_1+\sigma^2\geq\mu_2=\lambda_2+\sigma^2\geq\ldots\geq\mu_{N-r}=\lambda_{n-r}+\sigma^2\geq\mu_{N-r+1}=\mu_{N-r+2}=\ldots=\mu_N=\sigma^2$$

Par conséquent l'ordre de multiplicité de la valeur propre la plus petite est égal à r.

6)

Comme Φ est indépendante de $B(n)$, $B(n)$ et $X(n)$ sont non corrélés. D'autre part les deux premiers moments de $X(n)$ s'obtiennent de la façon suivante.

Puisque Φ est uniforme sur $(-\pi,+\pi)$, il vient :

$$E(X(n)) = E(A\cos(2\pi f_0 n + \Phi)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A\cos(2\pi f_0 n + u)du = 0$$

indépendant de n.

7)

On a :

$$\begin{aligned}
E(X(n+k)X^*(n)) &= E(A\cos(2\pi f_0(n+k)+\Phi)A\cos(2\pi f_0 n+\Phi)) \\
&= \frac{A^2}{2}E\big(\cos(2\pi f_0 k)+\cos(2\pi f_0(2n+k)+2\Phi)\big) \\
&= \frac{A^2}{2}\big(\cos(2\pi f_0 k)+E(\cos(2\pi f_0(2n+k)+2\Phi))\big) \\
&= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 k)+\frac{A^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2\pi f_0(2n+k)+2u)\frac{du}{2\pi} \\
&= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 k)
\end{aligned}$$

Par conséquent $X(n)$ est stationnaire au second ordre au sens large, centré.

8)

Comme la suite $R_{XX}(k)$ est sinusoïdale, elle vérifie une équation récurrente du second degré, qui s'écrit pour tout k :

$$R_{XX}(k)-2\cos(2\pi f_0)R_{XX}(k-1)+R_{XX}(k-2)=0$$

Et donc $z_0=\cos(2\pi f_0)$.

9)

En utilisant le résultat précédent il vient :

$$\mathbf{R}_X\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -2\cos(2\pi f_0) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

En faisant varier q on obtient $(N-2)$ vecteurs indépendants qui appartiennent à l'espace nul de $\mathbf{R}_X$. Par conséquent $\mathbf{R}_X$ est en général de rang 2.

10)

$\mathbf{R}_Y$ a $N-2$ valeurs propres égales à σ^2 et strictement inférieures aux 2 autres.

11)

Dans le cas où $N=3$, la matrice $\mathbf{R}_Y$ possède trois valeurs propres. D'après ce qui précède on peut, pour calculer f_0, opérer de la façon suivante :

- Calculer la décomposition propre de $\mathbf{R}_Y$. Le vecteur propre dont la valeur propre est la plus petite est de la forme $(1\ -2z_0\ 1)$.
- Prendre $f_0=\frac{1}{2\pi}\arccos(z_0)$.