

SI201



G. Blanchet, M. Charbit, N. Moreau, J. Prado

1 Septembre 2009

Préambule

Pour chaque séance de TP sont donnés :

- des exemples (les programmes sont donnés) qu’il vous appartient de “faire tourner” et commenter,
- et des exercices pour lesquels les programmes doivent être écrits.

Le but du jeu étant d’assimiler le contenu du photocopié distribué et non pas d’obtenir une note brillantissime, il est tout-à-fait conseillé de demander l’aide des encadrants si une question pose problème. Il n’est pas dénué de sens de regarder les textes, ainsi que le photocopié, en dehors des séances programmées...

Les textes des programmes donnés pour exemples sont accessibles sur la page :

`http://www.tsi.enst.fr/~blanchet/UE_SI201/index.html`

La note de ce module est obtenue à partir des notes de TP. Evidemment la présence lors des séances de TP est obligatoire...

Quelques adresses pour aide ou autres renseignements :

`blanchet@tsi.enst.fr, charbit@tsi.enst.fr, badeau@enst.fr, moreau@tsi.enst.fr`

TP 1

Echantillonnage, TFTD

Exemple 1.1 (AMBIGU.M) Exécuter le programme proposé qui calcule les échantillons de deux sinusoides distinctes de fréquences respectives $F_0 = 125$ Hz et $F_1 = 875$ Hz échantillonnées à $F_s = 1000$ Hz.

1. Que constate-t-on ?
2. Déterminer une autre fréquence qui se comporte de la même manière que F_1 puis vérifier le résultat avec Matlab.
3. Que se passe-t-il si on change le cosinus en sinus ?

Exemple 1.2 (MODULFREQ.M) On appelle fréquence instantanée du signal $x(t) = A \cos(\theta(t))$ la quantité :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Cette notion est fondamentalement différente de la fréquence définie par la transformée de Fourier (entre autres, la fréquence de Fourier intègre le temps de $-\infty$ à $+\infty$). Toutefois on peut montrer que, si $f_i(t)$ varie lentement autour de la fréquence f_0 , la plage de la fréquence instantanée représente assez bien la bande d'occupation spectrale de $x(t)$. Dans l'exemple proposé on prend

$$f_i(t) = f_0 + \lambda t$$

avec $f_0 = 1000$ Hz et le signal est échantillonné à $F_s = 8000$ Hz. Exécuter le programme proposé pour $\lambda = 1000$ puis pour $\lambda = 2000$. Que constate-t-on pour $\lambda = 2000$?

Exemple 1.3 (RESOLFREQ.M) On observe le spectre (module de la Transformée de Fourier Discrète - TFD) de la somme de deux sinusoides de même amplitude et on fait varier la différence des deux fréquences.

1. Quel rôle joue le nombre de points L de calcul de la TFD sur la résolution ? sur la précision ?
2. Pour les fréquences $f_0 = 0,2$ et $f_1 = 0,22$, déterminer la valeur du nombre N d'échantillons qui permet de séparer (on dit aussi "résoudre") les deux sinusoides à partir de l'observation du spectre. Le vérifier avec Matlab.

Exemple 1.4 (RESOLFREQ2.M) On observe le spectre de la somme de deux sinusoides d'amplitudes et de fréquences différentes.

1. En utilisant la fonction `fft` de Matlab, tracer le module de la Transformée de Fourier à Temps Discret - TFTD - de la fenêtre rectangulaire et de la fenêtre de Hamming.
2. En utilisant les observations faites à la question précédente, expliquer la forme des observations spectrales obtenues figure 2 avec le programme proposé.

Exemple 1.5 (CVLINCVMOD.M)

On considère les deux suites $x(n)$ et $y(n)$ de longueur N où $n = 0 : N - 1$. On note $X(k)$ et $Y(k)$ leurs Transformées de Fourier Discrètes (TFD) respectives.

1. Donner, en fonction de $x(n)$ et $y(n)$, l'expression de la TFD inverse de $X(k)Y(k)$. Comparer le résultat à la convolution (linéaire) des deux séquences.
2. En fonction du résultat précédent, expliquer ce que l'on observe avec le programme proposé.
3. Pourquoi a-t-on mis `real` devant `ifft`?

Exemple 1.6 (`SPEECHDSPL.M`, `SPEECHFLTNG.M`) (★) Les fichiers de parole contiennent une voix de femme et une voix d'homme échantillonnées à $F_s = 8000$ Hz.

1. Observer sous Matlab la forme temporelle des deux signaux (utiliser la fonction `wavread`).
2. Sélectionner pour chaque fichier une plage de son dit "voisé" (comportement très périodique). En utilisant la fonction `fft`, tracer sous Matlab le spectre de la zone voisée choisie. Evaluer, pour la femme puis pour l'homme, la fréquence fondamentale (appelée plus couramment `pitch`).
3. Exécuter le programme `SPEECHDSPL.M`. Expliquer ce que l'on entend.
4. Exécuter le programme `SPEECHFLTNG.M`. Expliquer ce que l'on obtient au niveau de l'écoute. Observer avec Matlab les effets du traitement sur les zones voisées et non voisées.
5. On appelle signal analytique associé au signal réel $x(t)$ le signal complexe $z(t)$ défini comme la transformée de Fourier inverse de

$$Z(f) = 2X(f)\mathbf{1}(f \in [0, +\infty])$$

On montre aisément que $x(t)$ est la partie réelle de $z(t)$. La transformée de Hilbert est définie comme la partie imaginaire de $z(t)$.

Justifier l'utilisation faite de la TFD pour effectuer le filtrage malgré le problème posé par la convolution circulaire.

Remarque: dans le cas où $x(n)$ désigne une suite de longueur N paire, on peut montrer que la TFD inverse de $Z(k) = H(k)X(k)$ vérifie $x(n) = \text{Ré}(z(n)) = (z(n) + z^*(n))/2$ si $H(k)$ vérifie $H(k) + H^*(-k) = 2$ ¹. Il faut donc prendre:

$$H(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 2 & \text{si } k = 1 : N/2 - 1 \\ 1 & \text{si } k = N/2 \\ 0 & \text{si } k = N/2 + 1 : N - 1 \end{cases}$$

¹Les indices sont calculés modulo N .

TP 2

Filtrage, TZ

Exemple 2.1 (lowpassF.m)

A partir du programme donné, on pourra vérifier :

- l'expression des coefficients

$$h(n) = \int_{-f_c}^{f_c} H(f) e^{2\pi j n f} df, \quad (2.1)$$

- que les oscillations ne disparaissent pas lorsqu'on augmente le nombre de coefficients N (pas de convergence uniforme),
- que l'on a introduit un retard et qu'il y a un transitoire (filtrer par exemple `eye(1,100)`).

Noter les effets de l'application d'une fenêtre autre que rectangulaire sur les ondulations et la largeur de la bande de transition.

Effectuer le tracé en dB et noter le gain réalisé sur la première ondulation.

Exercice 2.1 (Méthode de la fenêtre: filtre passe-bande)

Soit le filtre de réponse impulsionnelle $h(n)$.

1. Quel est le gain complexe du filtre $2h(n) \cos(2\pi n f_0)$? En déduire une façon de synthétiser un filtre passe-bande à partir d'un filtre passe-bas?
2. Ecrire un programme qui utilise la synthèse donnée en exemple pour synthétiser un filtre passe-bande centré sur 1 600 Hz et de largeur 800 Hz sachant que la fréquence d'échantillonnage est $F_e = 8\,000$ Hz.

Exemple 2.2 (Equations récurrentes et transformée en z)

On considère l'équation récurrente définie par :

$$y(n) - 2\rho \cos\theta y(n-1) + \rho^2 y(n-2) = x(n) - x(n-1) \quad (2.2)$$

- Dans le premier cas on se donne $\rho = .95$. En prenant `x=randn(1,200)`; et en utilisant la fonction `filter`, construire la suite $\{y(n)\}$. Visualiser les $y(n)$. Que se passe-t-il lorsqu'on approche ρ de 1 par valeur inférieure?

```
|| rho=.95; theta=pi/4; x=randn(1,200);  
|| % Voir help filter  
|| y=filter([1 -1],[1 -2*rho*cos(theta) rho*rho],x);
```

En examinant $\{y(n)\}$ vérifier que la valeur de θ est bien $\pi/4$.

- Même question avec $\rho = 2$.

- Appliquer la transformée en z à la relation de récurrence 2.2 et en déduire la fonction de transfert $H(z)$.
(On applique $y(n - K) \rightarrow z^{-K}Y(z) \Rightarrow$)

$$Y(z) - 2\rho \cos \theta z^{-1}Y(z) + \rho^2 z^{-2}Y(z) = X(z) - z^{-1}X(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

- Sachant que le gain complexe est obtenu en faisant $z = e^{2j\pi f}$ dans la fonction de transfert, donner un moyen rapide de calcul de ce gain complexe.

```

% Cas rho<1 !
nfft=1024;
num=[1 -1]; den=[1 -2*rho*cos(theta) rho*rho];
Hs=fft(num,nfft) ./ fft(den,nfft);

```

- Donner une interprétation géométrique du module du gain complexe.

Exercice 2.2 (Suppression d'une composante sinusoïdale)

(*) La réjection consiste à supprimer une composante fréquentielle $f = f_0$. La première idée est de placer un zéro sur le cercle unité en $f = f_0$. Comme on veut avoir une fonction de transfert réelle, il faut aussi le zéro conjugué. Le numérateur a alors la forme :

$$N_z(z) = (1 - e^{2j\pi f_0} z^{-1})(1 - e^{-2j\pi f_0} z^{-1})$$

Si on se limite à ce filtrage, le gain ne sera pas satisfaisant. C'est la raison pour laquelle on place un pôle à proximité de chaque zéro. Ici on prend $\rho e^{2j\pi f_0}$ et $\rho e^{-2j\pi f_0}$ avec $\rho < 1$ et ≈ 1 . Ainsi, lorsque $z = e^{2j\pi f}$ se trouve "éloigné" des couples "pôle-zéro", le gain est sensiblement égal à 1. On a $MP \approx MZ$ et $M\bar{P} \approx M\bar{Z}$ (figure 1).

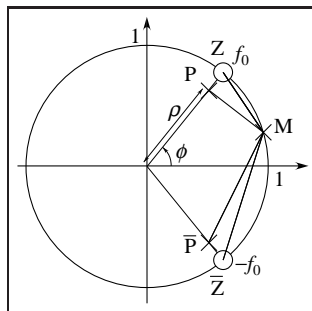


Figure 1 : Interprétation graphique du gain

Cela conduit à une fonction de transfert de la forme 2.3.

$$H_z(z) = H_0 \frac{1 - 2 \cos \theta z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2\rho \cos \theta z^{-1} + \rho^2 z^{-2}} \quad (2.3)$$

Soit donc le filtre du second ordre de fonction de transfert $H_z(z)$ où $\rho < 1$, $\rho \approx 1$ et H_0 tel que $H(1) = 1$.

1. Quelle est la relation de récurrence liant le signal d'entrée au signal de sortie ?
2. Ecrire un programme qui trace la réponse en fréquence de ce filtre.
3. Utiliser le signal du fichier `voix_homme.wav` (fréquence d'échantillonnage $F_e = 8000$ Hz). Superposer au signal une sinusoïde de fréquence 500 Hz. Effectuer le filtrage de ce signal en utilisant la fonction `filter` avec le filtre $H_z(z)$ défini précédemment.

Que se passe-t-il lorsqu'on fait tendre ρ vers 1 par valeur inférieure (écouter ou examiner le signal de sortie du filtre) ?

4. Au lieu de prendre 2.3, on définit le filtre :

$$H_z(z) = \frac{1}{2} \frac{(1 + \rho^2) - 4\rho \cos \varphi z^{-1} + (1 + \rho^2)z^{-2}}{1 - 2\rho \cos \varphi z^{-1} + \rho^2 z^{-2}} \quad (2.4)$$

(a) Vérifier que l'on a des gains égaux à 1 en $f = 0$ et $f = 1/2$.

(b) Vérifier que l'on a :

$$2\rho \cos \varphi = (1 + \rho^2) \cos \theta \quad (2.5)$$

(c) Tracer les pôles et zéros dans le plan complexe pour 2.3 et 2.4.

(d) Tracer le gain de 2.4.

Exercice 2.3 (Stabilité/causalité)

On considère un modèle de canal de la forme $C_z(z) = (1 - 2z^{-1})(1 - z^{-1}/3)$. Une façon de compenser l'effet du canal (on parle d'égalisation) consiste à effectuer un filtrage du signal reçu par un filtre de fonction de transfert $H_z(z) = 1/C_z(z)$.

1. Que peut-on dire de la stabilité du filtre ? (on peut taper `stem(filter(1, [1 -7/3 2/3], eye(1, 20)))` pour s'en convaincre)

Donner une réalisation stable de $H_z(z)$ (décomposition en éléments simples et écriture de l'original sous forme "bilatérale").

Comment réalise-t-on l'égalisation ?

2. On considère maintenant le filtre de fonction de transfert :

$$P_z(z) = \frac{z - 2}{1 - 2z}$$

Quel est le gain de ce filtre ?

On forme $H_z(z)P_z(z)$. Quelle sont les similitudes et les différences avec le filtre de la question précédente ?

Exercice 2.4 (Canal+)

(*) Partant d'un son (signal réel $x(t)$) de bande B , une technique classique de cryptage consiste à effectuer un traitement, schématisé figure 2 (retournement ou inversion de spectre).

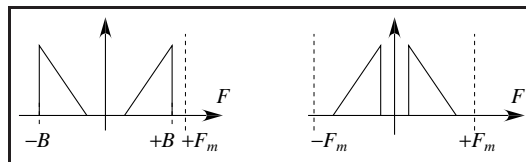


Figure 2: Cryptage de son : à gauche spectre du signal réel à crypter, à droite spectre du signal crypté.

L'extrait d'enregistrement donné en exemple a été échantillonné à 48 kHz.

1. Notons $y(t) = 2 \times x(t) \times \cos(2\pi F_m t)$ avec $F_m = 12800$ Hz. A partir du spectre de $y(t)$, montrer que, si $F_m > B$, on peut obtenir le spectre du signal "crypté". En quoi consiste l'opération de décryptage ?
2. Ecrire un programme qui effectue le décryptage, pour la fréquence F_m , d'un signal de bande B , échantillonné à F_e .
3. On effectue une démodulation synchrone à $F_e/4$. A quelle opération simple cela correspond-il ? Ecouter le résultat.

Exercice 2.5 (Utilisation de la TFD pour la synthèse)

(*) On se donne $G(f)$, gain complexe d'un filtre de réponse impulsionnelle $\{g(n)\}$. Donner l'expression de la réponse impulsionnelle $\{\tilde{g}(n)\}$ du filtre calculé à partir des $G(k/N)$ en fonction des $g(n)$.

A quelles conditions peut-on utiliser cette méthode pour synthétiser des filtres ?

TP 3

Processus aléatoires

Exemple 3.1 (Sinusoïde bruitée, `sinnoise.m`)

Soit le processus à temps discret défini par $x(n) = A \cos(2\pi f_0 n + \Phi) + b(n)$ où Φ est une variable aléatoire équirépartie sur $[0, 2\pi]$ et $b(n)$ un bruit blanc gaussien centré de dsp σ^2 et indépendant de Φ . On suppose en outre que $-1/2 < f_0 < 1/2$.

1. Donner la moyenne statistique $m_X(n)$ ($m_X(n) = 0$).
2. Calculer l'autocovariance $R_{XX}(n, p)$ et en déduire la densité spectrale de puissance de x ($R_{XX}(p) = A^2 \cos(2\pi f_0 p)/2 + \sigma^2 \delta(p)$).
3. Au lieu de calculer la TFTD de R_{XX} , on calcule le périodogramme de $x(n)$ sur L points. Commenter les effets du nombre de points sur l'estimation de f_0 (raies en $LA^2/4$ et bruit en σ^2).

Exemple 3.2 (Dispersion du périodogramme, `fluctperio.m`)

Exécuter le programme et commenter l'effet de la durée d'observation.

Exemple 3.3 (Covariance et réponse impulsionnelle, `covimpresp.m`)

(*) On applique à l'entrée du filtre de fonction de transfert $H(z) = 1 + z^{-1} + 2z^{-3}$ un bruit blanc gaussien de puissance unité. On rappelle que :

$$R_{YX}(p) = (h \star R_{XX})(p) \leftrightarrow S_{YX}(f) = H(e^{2\pi j f}) S_{XX}(f) \quad (3.1)$$

Utiliser les estimations de la covariance entrée-sortie et de l'autocovariance de l'entrée pour estimer la réponse impulsionnelle d'un RIF.

Exemple 3.4 (Modèles MA et AR, `estimcov.m`)

On appelle MA-2 le processus défini par :

$$x(n) = w(n) + b_1 w(n-1) + b_2 w(n-2)$$

où $w(n)$ est blanc centré de variance σ^2 .

1. Déterminer l'expression des coefficients de covariance du MA-2 en fonction de σ^2 , b_1 , b_2 .
2. Comparer sous Matlab, avec les variances estimées.
3. Tracer les spectres à partir de la formule théorique du spectre, des coefficients estimés et du périodogramme.

On appelle AR-2 le processus défini par :

$$x(n) = w(n) - a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2)$$

où $w(n)$ est blanc centré de variance σ^2 et où le polynôme $1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$ a ses racines à l'intérieur du cercle unité.

1. Comparer sous Matlab, avec les variances estimées.
2. Tracer les spectres à partir de la formule théorique du spectre, des coefficients estimés et du périodogramme.

Exercice 3.1 (Quantification)

L'étude de la quantification linéaire (celle de la grande majorité des convertisseurs analogiques-numériques) montre que l'on gagne 6 dB par bit de quantification. Ecrire un programme vérifiant cette propriété en se basant sur les quelques lignes qui suivent :

```

%==== quantizt.m
[y,Fs]=wavread('voix_homme'); %soundsc(y,Fs)
yL=length(y);
ynorm=y/max(abs(y));
%==== 5-bits quantization
%...
%==== 6-bits quantization
%...
%==== Calcul du gain en DB
gdb=...

```

Exemple 3.5 (Positivité de la dsp, dspposit.m)

(★) On considère un bloc de données de longueur N .

1. Pourquoi la matrice de covariance estimée est-elle obligatoirement positive lorsqu'on prend l'estimateur biaisé $\hat{R}(k) = (1/N) \sum_{n=1}^{N-k+1} x(n)x(n-k+1)$ au lieu de $\hat{R}(k) = (1/(N-k+1)) \sum_{n=1}^{N-k+1} x(n)x(n-k+1)$?
2. Prendre $N_{cc} = \text{floor}(1b/2)$. Que se passe-t-il ? La suite de covariance est habituellement fenêtrée par une fenêtre triangulaire (fenêtre de Fejér) $wn = [1:N_{cc} \quad [N_{cc}-1:-1:1]]$; . Pour quelle raison ?

TP 4

Changements de fréquences

Exercice 4.1 (Sur-échantillonnage/interpolation)

On va effectuer une interpolation de facteur $R = 4$ sur un signal donné (fichier `sigi.mat`).

1. A partir du signal utilisé, construire une nouvelle suite en insérant $R - 1$ zéros entre chaque échantillon.

```
|| Lsig=length(sigi); xsup=[sigi;zeros(R-1,Lsig)];  
|| xsup=reshape(xsup,1,R*Lsig);
```

Tracer le spectre (calcul par `fft`) du signal de départ et celui du signal après insertion de zéros. Noter l'apparition d'*images* dans le spectre.

2. Dans le cas où le signal d'origine est le résultat de l'échantillonnage d'un signal à temps continu à la fréquence F_s , par exemple 8000 Hz, tracer les spectres en fonction des fréquences exprimées en Hz.
3. Calculer un filtre (méthode de la fenêtre vue précédemment) qui permette de construire l'interpolée du signal de départ.
4. Visualiser les suites.

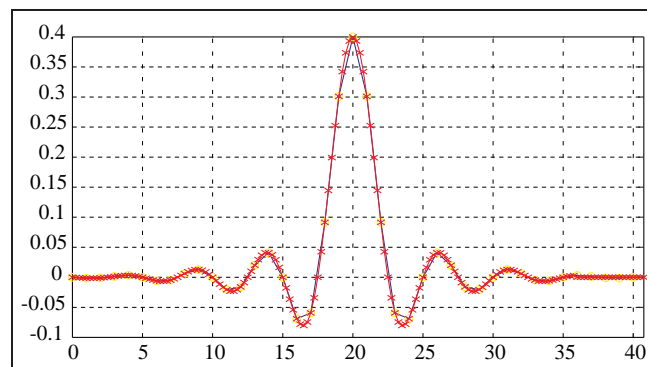


Figure 1: Suites originale et interpolée

Exemple 4.1 (Sous-échantillonnage)

Le sous-échantillonnage de facteur R consiste à prélever un échantillon sur R .

1. Charger un signal audio. Effectuer un sous-échantillonnage de rapport $R = 6$. Ecouter le résultat.
2. Pré-filtrer le signal original par le filtre adéquat avant sous-échantillonnage. Ecouter le résultat.