

# Analyse Temps-Fréquence et Temps-Echelle

Olivier Rioul

Dept. Comelec  
Télécom ParisTech  
`olivier.rioul@telecom-paristech.fr`  
`perso.telecom-paristech.fr/rioul/`

Formation LIESSE  
Fourier, temps et fréquence  
2018

Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

- 1 Notion de fréquence
- 2 Notion de résolution (temps et fréquence)
- 3 Pourquoi l'analyse temps-fréquence ?
- 4 Transformée de Fourier Court-Terme
- 5 Transformée en Ondelettes
- 6 Transformations bilinéaires
- 7 Boîtes à outils

Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

# Transformée de Fourier (T.F.)



Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Pour des signaux 1D :

**Description temporelle** : Signal vu comme une fonction  $x(t)$  de la variable **temps**  $t \in \mathbb{R}$

**Description fréquentielle** : Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2j\pi ft} dt$$

fonction de la variable (duale) de **fréquence**  $f \in \mathbb{R}$

Fréquence

Transformée de  
Fourier

Propriétés de la TF

Conservation de  
l'énergie

Discretisations

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

- Noter que  $X(f) \in \mathbb{C}$ , même pour un signal réel
- La T.F. d'un signal réel est à **symétrie hermitienne** :  
$$X(-f) = X^*(f)$$
- On peut donc se limiter aux fréquences  $\geq 0$  pour un  $x(t)$  à valeurs réelles
- **Signal analytique** :  $z(t) \in \mathbb{C}$  tel que  $Z(f) = 2X_+(f)$
- Il est commode de supposer dans la suite que  $x(t)$  est déjà analytique :  $x(t) = z(t)$ .

## Attention

### L'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2j\pi ft} dt$$

n'a souvent « aucun sens ».

- Signaux  $\mathbf{L}^1$  « intégrables » :  $\int |x(t)| dt < \infty$ . La T.F.  $X(f)$  est continue et bornée.
- Signaux  $\mathbf{L}^2$  « de carré intégrable » (d'énergie finie) :

$$\|x\|^2 = \int |x(t)|^2 dt < \infty$$

La T.F.  $X(f)$  est elle-même  $\mathbf{L}^2$  (cf. Parseval), passage à la limite dans  $\mathbf{L}^2$  de l'intégrale tronquée.

## Cadre général

Signaux  $\mathcal{S}'$  (distribution **tempérée**) :  $x(t) = O(t^\alpha)$ .  
La T.F.  $X(f)$  est elle même tempérée.

## Exemple : impulsion de Dirac

$$\int e^{2j\pi ft} dt = \delta(f)$$

$$\int e^{2j\pi ft} df = \delta(t)$$

## Reconstruction du signal

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{2j\pi ft} df$$

## Démonstration.

$$\begin{aligned} \int \left( \int x(\tau) e^{-2j\pi f\tau} d\tau \right) e^{2j\pi ft} df &= \int x(\tau) \left( \int e^{2j\pi f(t-\tau)} df \right) d\tau \\ &= \int x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \\ &= x(t) \quad \square \end{aligned}$$

- Les TF directe et inverse ont des formes similaires (et donc des propriétés similaires).
- « **Dualité temps-fréquence** » :  $t \iff f$

## Translation $\overset{\text{T.F.}}{\rightleftarrows}$ Modulation

$$x(t)e^{2j\pi f_0 t} \overset{\text{T.F.}}{\rightleftarrows} X(f - f_0)$$
$$x(t - t_0) \overset{\text{T.F.}}{\rightleftarrows} X(f)e^{-2j\pi f t_0}$$

## Démonstration.

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t - t_0)e^{-2j\pi f(t+t_0)} dt$$

$$X(f - f_0) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-2j\pi(f-f_0)t} dt$$





# Impulsion/Onde pure

Impulsion (Dirac)  $\stackrel{\text{T.F.}}{\rightleftarrows}$  Onde pure (sinusoïde)

$$e^{2j\pi f_0 t} \stackrel{\text{T.F.}}{\rightleftarrows} \delta(f - f_0)$$

$$\delta(t - t_0) \stackrel{\text{T.F.}}{\rightleftarrows} e^{-2j\pi f t_0}$$

## Démonstration.

Par translation/modulation à partir de

$$\int e^{-2j\pi f t} dt = \delta(f)$$

et de la formule duale. □

Convolution  $\xLeftrightarrow{\text{T.F.}}$  Produit

$$\int x(u)y(t-u)du \xLeftrightarrow{\text{T.F.}} X(f)Y(f)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \int \left( \int x(u)y(t-u)du \right) e^{-2j\pi ft} dt \\ &= \int x(u)e^{-2j\pi fu} \int y(t-u)e^{-2j\pi f(t-u)} dt du \\ &= X(f)Y(f) \quad \square \end{aligned}$$

Translation : convolution par  $\delta(t-t_0)$

Dérivation  $\stackrel{\text{T.F.}}{\Leftrightarrow}$  Produit par  $2j\pi f$

$$x'(t) \stackrel{\text{T.F.}}{\Leftrightarrow} 2j\pi f X(f)$$

Démonstration.

Intégration par parties :

$$\int x'(t)e^{-2j\pi ft} dt = -(-2j\pi f) \int x(t)e^{-2j\pi ft} dt \quad \square$$

- Dérivation : convolution par  $\delta'$
- Dualité régularité/décroissance à l' $\infty$  :
  - Th. de Bernstein : bande limitée  $\implies$  toutes dérivées bornées
  - Irrégularité  $\implies$  composantes de fréquences élevées.  
Exemples : rectangle et sinus cardinal, triangle et (sinus cardinal)<sup>2</sup>

Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Transformée de  
Fourier

Propriétés de la TF

Conservation de  
l'énergie

Discretisations

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

# Dilatation/Contraction

## Dilatation $\stackrel{\text{T.F.}}{\rightleftarrows}$ Contraction

La transformée de Fourier transforme dilatation en contraction et *vice versa* :

$$\frac{1}{\sqrt{a}}x\left(\frac{t}{a}\right) \stackrel{\text{T.F.}}{\rightleftarrows} \sqrt{a}X(af)$$

- Paramètre  $a > 0$
- En temps : dilatation ( $a > 1$ ) ou contraction ( $a < 1$ )

## Démonstration.

Changement de variable :

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \int x\left(\frac{t}{a}\right) e^{-2j\pi ft} dt = \frac{a}{\sqrt{a}} \int x(t) e^{-2j\pi a ft} dt$$



## Relation de Parseval-Plancherel (dans $\mathbf{L}^2$ )

$$\int |x(t)|^2 dt = \int |X(f)|^2 df$$

## Démonstration.

$$\begin{aligned} \int X(f)X^*(f) df &= \int \int \int x(t)x^*(u)e^{2j\pi f(u-t)} df dt du \\ &= \int \int x(t)x^*(u)\delta(t-u) dt du = \int x(t)x^*(t)dt \quad \square \end{aligned}$$

La transformée de Fourier conserve l'énergie (isométrie).

- $|x(t)|^2$  : densité temporelle d'énergie (**puissance instantanée**)
- $|X(f)|^2$  : densité fréquentielle (spectrale) d'énergie (**dsp**)

## Généralisation : Relation de Parseval

$$\int x(t)y^*(t) dt = \int X(f)Y^*(f) df$$

## Démonstration.

Similaire au cas de la norme (énergie  $\|x\|^2 = \langle x|x \rangle$ ).

N.B. Le produit scalaire découle de la norme :

$$4 \langle x|y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + j\|x + jy\|^2 - j\|x - jy\|^2 \quad \square$$

Pour un signal à temps discret  $x_n = x(nT)$  :

- transformée de Fourier

$$X(f) = \sum_n x_n e^{-2j\pi n f T}$$

- fréquence périodique (de période  $1/T$ )
- reconstruction (série de Fourier) :

$$x_n = T \int_{\langle 1/T \rangle} X(f) e^{2j\pi n f T} df$$

- énergie (Parseval) :

$$\sum_n |x_n|^2 = T \int_{\langle 1/T \rangle} |X(f)|^2 df$$

# Temps et fréquence discrets

Pour un signal à durée limitée  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$  :

- transformée de Fourier discrète

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2j\pi nk/N}$$

- algorithmes rapides (FFT de toutes sortes)
- temps et fréquence périodiques (de longueur  $N$ )
- reconstruction :

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{2j\pi nk/N}$$

- énergie (Parseval) :

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$$



# Dans un corps fini

Pour un signal  $q$ -aire  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1} \in \mathbb{F}_q$  (corps fini à  $q$  éléments)

- transformée de Fourier discrète dans un corps fini :

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \alpha^{nk}$$

- $\alpha$  est d'ordre  $N$  ( $\alpha^N = 1$  implique  $N|q^m - 1$ ) et  $X_k \in \mathbb{F}_{q^m}$  (sur-corps localisateur)
- reconstruction :

$$x_n = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \alpha^{nk}$$

- utile en algèbre (codes correcteurs d'erreurs, etc)
- généralisation : indicage sur un groupe de caractères  $\{\chi\}$

## Note

- Des discrétisations similaires sont possibles pour tout ce qui va suivre (analyse temps-fréquence, transformées bilinéaires, etc.)
- c'est indispensable pour l'implantation (toolboxes)
- ce n'est pas trivial! (plusieurs méthodes)
- [*nous resterons discrets sur la discrétisation...*]

# Résolution temporelle ou fréquentielle

$$\text{Energie } E = \int |x(t)|^2 dt = \int |X(f)|^2 df$$

## Définition

Centre temporel/fréquentiel d'énergie : espérance mathématique

$$\langle t \rangle = \frac{1}{E} \int t |x(t)|^2 dt \quad \langle f \rangle = \frac{1}{E} \int f |X(f)|^2 df$$

## Définition

Résolution temporelle/fréquentielle : dispersion d'énergie

$$\Delta t = \sqrt{\frac{1}{E} \int (t - \langle t \rangle)^2 |x(t)|^2 dt} \quad \Delta f = \sqrt{\frac{1}{E} \int (f - \langle f \rangle)^2 |X(f)|^2 df}$$

Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Principe d'incertitude

Décomposition de  
signaux

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

# Inégalité de Weyl-Heisenberg



## Théorème (Weyl, 1931)

Si  $x(t), tx(t), x'(t) \in \mathbf{L}^2$  alors

$$\|x(t)\|^2 \leq 2\|tx(t)\|\|x'(t)\|$$

avec égalité ssi  $x(t)$  est une **gaussienne**.

## Démonstration.

$$\int x^2(t)dt = -2 \int tx(t)x'(t)dt \quad \text{int. par parties}$$
$$\|x(t)\|^2 \leq 2\|tx(t)\|\|x'(t)\| \quad \text{Cauchy-Schwarz.}$$

avec égalité ssi  $x'(t)/x(t) \propto t$ . □

L'inégalité de Weyl est célèbre pour son application à la mécanique quantique (principe d'incertitude d'Heisenberg).

Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Principe d'incertitude

Décomposition de  
signaux

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

## Principe d'incertitude temps-fréquence

Pour tout signal  $x(t)$  d'énergie finie avec  $\Delta t$  et  $\Delta f$  finis :

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}$$

avec égalité ssi  $x(t)$  est une **gaussienne**.

## Démonstration.

On se ramène à  $\langle t \rangle = 0$  par translation dans le temps, à  $\langle f \rangle = 0$  par modulation fréquentielle.

On a  $E = \|x(t)\|^2 = \|X(f)\|^2$  et par la formule de dérivation  $\|x'(t)\|^2 = |2j\pi|^2 \|fX(f)\|^2$ . D'où Weyl :  $\|x(t)\|^2 \leq 2\|tx(t)\|\|x'(t)\|$  s'écrit

$$E \leq 4\pi\|tx(t)\|\|fX(f)\| = 4\pi E\Delta t\Delta f. \quad \square$$

- Limitation fondamentale de la transformée de Fourier : On ne peut pas être à la fois « précis » en temps **et** en fréquence
- Bonne localisation temporelle  $\iff$  mauvaise localisation fréquentielle, et *vice versa* (il faudra faire un choix)
- La **gaussienne** a la meilleure localisation temps-fréquence

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

On peut (toujours) écrire :

$$x(t) = \int x(u)\delta(t - u) du$$

- $\delta(t)$  élément neutre pour la convolution
- C'est une décomposition de  $x(t)$  sur des « fonctions de base » translattées  $\delta(t - u)$  :  $\Delta t = 0$
- Les fonctions de base  $\delta(t - u)$  ont pour T.F.  $e^{-2j\pi fu}$  :  
 $\Delta f = \infty$ .

Conclusion : Le principe d'incertitude est vérifié à la limite :

$$\boxed{\Delta t = 0 \quad \Delta f = \infty}$$

Synthèse spectrale par TF inverse :

$$x(t) = \int X(\nu) e^{2j\pi\nu t} d\nu$$

- Décomposition sur des fonctions de base  $e^{2j\pi\nu t}$  (ondes pures) éternelles :  $\Delta t = \infty$
- Les fonctions de base ont pour T.F.  $\delta(f - \nu)$  :  $\Delta f = 0$

Conclusion : Le principe d'incertitude est vérifié à la limite :

$$\boxed{\Delta t = \infty \quad \Delta f = 0}$$

La fréquence est globale : gomme l'aspect temporel



# Note sur la décomposition spectrale



Dans la décomposition :

$$x(t) = \int X(f)e^{2j\pi ft} df$$

- **Orthonormalité** entre fonctions de base oscillant à des fréquences différentes :

$$\langle e^{2j\pi ft} | e^{2j\pi \nu t} \rangle = \delta(f - \nu)$$

- La Transformée de Fourier est donc le **produit scalaire** :

$$X(f) = \langle x(t) | e^{2j\pi ft} \rangle$$

coefficient de la décomposition de  $x(t)$ . Indique la « ressemblance » de  $x(t)$  contre une onde pure.

- Synthèse : somme (continue) des **projections** orthonormales sur les fonctions de base.

Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Principe d'incertitude

Décomposition de  
signaux

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

## Définition

Signal stationnaire : dont les caractéristiques (spectrales) ne varient pas dans le temps.

L'analyse spectrale (de Fourier) est bien adaptée.

## Exemples

- Onde pure
- Combinaison linéaire d'ondes pures (harmoniques)

## Définition

Filtre : Transformation linéaire  $\mathbf{F}$  invariante dans le temps

Puisque  $x(t) = x(t) * \delta(t) = \int x(u)\delta(t-u) du$  :

$$\mathbf{F}(x(t)) = \int x(u)\mathbf{F}(\delta)(t-u) du$$

Réponse impulsionnelle :  $h(t) = \mathbf{F}(\delta)(t)$ .

$$\mathbf{F}(x(t)) = \boxed{\int x(u)h(t-u) du} \quad (\text{Convolution})$$

Sur la base de Fourier :  $\boxed{Y(f) = H(f)X(f)}$ . La TF **diagonalise** le filtre.

- Vecteurs propres : les ondes pures  $e^{2j\pi ft}$ .
- Valeurs propres :  $H(f)$  (réponse fréquentielle)

Un exemple d'outil du stationnaire :

## Modélisation par filtrage linéaire

Le signal (aléatoire **stationnaire**)  $x(t)$  est modélisé comme sortie d'un filtre  $h(t)$  excité par un bruit blanc  $e(t)$

La densité spectrale de puissance en sortie est donnée par la formule de filtrage :

$$S_{xx}(f) = S_{ee}(f)|H(f)|^2 \propto |H(f)|^2$$

Applications :

- analyse de signal par modèle linéaire AR, ARMA,...
- codage par prédiction linéaire (parole, son)
- ...

## Définition

Signal non stationnaire : dont les caractéristiques (spectrales) varient au cours du temps.

## Exemple

Morceau de musique : chaque note a un temps d'émission et une hauteur.

- L'essentiel de l'information est portée par les non-stationnarités : Début, fin, transitoires
- L'analyse spectrale perd l'information temporelle puisqu'elle moyenne sur tous les temps.
- Approche **par morceaux** : adapter les outils du stationnaire (TF, modèle linéaire) aux variations dans le temps.

- Une solution : Modèles paramétriques sur tranches temporelles du signal (supposées localement stationnaires).
- Exemples de méthodes spectrales paramétriques : AR, ARMA, MUSIC
- Méthodes adaptatives/évolutives
- Problème : Nécessité d'estimer l'ordre du modèle au fil de l'eau
- Connaissance *a priori* difficile à exploiter sur les non-stationnarités.

- Alternative : analyse globale des caractéristiques spectrales dépendantes du temps : **analyse temps-fréquence**.
- Aucune connaissance *a priori* nécessaire : « universel »
- On évite le problème de l'estimation de l'ordre d'un modèle
- Problème : Choix du type d'analyse. L'analyse peut jouer le rôle d'un « modèle ».
- Difficulté d'interprétation de l'analyse (principe d'incertitude, interférences).

# Fréquence instantanée

Première idée (simple) : définir une **fréquence locale** (qui dépend du temps)



- Ecrire le signal modulé en amplitude et en phase (signal analytique à fréquences positives)

$$x(t) = a(t)e^{j\phi(t)}$$

- Les variations de la phase définissent la **fréquence instantanée** :

$$f_x(t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$



# Fréquence instantanée et retard de groupe

## Exemples

- La fréquence instantanée de  $\cos(2\pi f_0 t)$  est  $f_x(t) = f_0$  (constante)
- **Chirp** (signal modulé linéairement en fréquence) : la fréquence instantanée de  $\cos(2\pi(at^2 + bt))$  est  $f_x(t) = 2at + b$

Notion duale : les variations fréquentielles de phase de

$$X(f) = A(f)e^{j\Phi(f)}$$

définissent le **retard de groupe** : temps dépendant de la fréquence

$$t_x(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial f}$$

Exemple :  $\delta(t - t_0)$  a pour retard de groupe  $t_x(f) = t_0$

# Limitations

- La méthode  $f(t)$  ne convient qu'à des signaux de type VCO.
- Pour deux chirps simultanés  $\cos(2\pi(at^2 + bt)) + \cos(2\pi(a't^2 + b't))$ , les fréquences locales sont moyennées : horrible !
- Il faut donc disposer d'une dimension supplémentaire, i.e., définir une **amplitude** dépendant du temps et de la fréquence :  $A_x(t, f)$  (représentation 3D)

Analogie : partition musicale

1  $\bullet = 60$

Piano

*mf*

Domin7 Fa $\Delta$  Légèrement

La - La Li - La Laa \_

The image shows a musical score for piano. It features a treble clef, a key signature of one flat (B-flat), and a 3/4 time signature. The tempo is marked as quarter note = 60. The score includes a first ending bracket and dynamic markings like *mf*. Above the staff, there are annotations: 'Domin7' above the first measure, 'Fa $\Delta$ ' above the second measure, and 'Légèrement' above the final measure. Below the staff, the lyrics 'La - La Li - La Laa \_' are written, with lines connecting them to the notes. A double bar line is placed between 'La - La' and 'Li - La'.

Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

Cas stationnaire

Cas non stationnaire

Fréquence dépendant  
du temps

Besoin d'une  
véritable analyse  
temps-fréquence

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

# Fenêtre glissante sur la TF

## Idée

Analyse de Fourier sur tranches temporelles du signal (supposées localement stationnaires) :

$$\text{fenêtre glissante } h(t - \tau)$$

On obtient :

## Transformée de Fourier court-terme

$$S_x(\tau, f) = \int x(t)h^*(t - \tau)e^{-2j\pi ft} dt$$

(**STFT** : Short-Time Fourier Transform)

Le paramètre  $\tau$  permet d'analyser (spectralement) l'information à tous les instants.

- La notion de fréquence  $f$  dépend ici du **choix** de la fenêtre analysante  $h(t)$  et de sa **longueur**.
- $h(t)$  = rectangle (mauvaise localisation fréquentielle), gaussienne (meilleure localisation temps-fréquence : Gabor, 1946), ...
- en temps-discret : Bartlett, Hamming, Hanning, Blackman, Chebyshev, Kaiser (suivant critère de localisation fréquentielle : lobes secondaires, equiripples, etc.)  
Ici la fenêtre est « sautante » ( $\tau$  est discrétisé)

# Décomposition sur les fonctions de base



Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Fenêtrage

Décomposition sur  
des fonctions de base

Groupe de  
transformations

Résolution de  
l'identité

Spectrogramme

Mono-résolution

Ondelettes

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

- On peut interpréter la STFT comme des **produits scalaires** :

$$S_x(t, f) = \langle x(t) | h(t - \tau) e^{2j\pi ft} \rangle$$

contre des **fonctions de base**.

- Les fonctions de base sont des fenêtres modulées (ex : Gabor). « Atomes temps-fréquence »
- Par Parseval :

$$S_x(t, f) = \langle X(\nu) | H(\nu - f) e^{-2j\pi(\nu - f)\tau} \rangle$$

fonctions de base en fréquence

- L'analyse temps-fréquence est aussi une analyse fréquence-temps

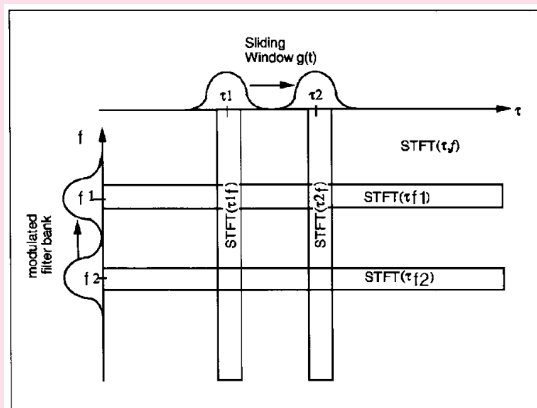


Fig. 1. Time-frequency plane corresponding to the Short-Time Fourier Transform. It can be seen either as a succession of Fourier Transforms of a windowed segment of the signal (vertical stripes) or as a modulated analysis filter bank (horizontal stripes).

Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Fenêtrage

Décomposition sur  
des fonctions de base

Groupe de  
transformations

Résolution de  
l'identité

Spectrogramme  
Mono-résolution

Ondelettes

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

- Sur les lignes (pour chaque  $f$ ) :

$$S_x(t, f) = \langle x(t) | h(t - \tau) e^{2j\pi f t} \rangle$$

- Sur les colonnes (pour chaque  $t$ ) :

$$S_x(t, f) = e^{2j\pi f t} \cdot \text{T.F.}^{-1} \text{ de } X(\nu) H^*(\nu - f)$$

Filtrage avec réponses fréquentielles  $H^*(\nu - f)$

- Bancs de filtres uniforme (largeur de bande  $\Delta f$  constante)

- **Groupe de translation/modulation** de Weyl-Heisenberg :

$$(t, \nu) \mapsto (t - \tau, \nu - f)$$

- Action (à gauche) sur la fenêtre analysante :

$$h_{\tau, f}(t) = h(t - \tau)e^{2j\pi ft}$$

$$H_{\tau, f}(\nu) = H(\nu - f)e^{-2j\pi(\nu - f)\tau}$$

- Mesure (de Haar) invariante par le groupe :

$$d(t, f) = dt df$$

- Relation avec les états cohérents de la Mécanique Quantique...



## Orthonormalité temps-fréquence

$$\int \int h_{t,f}(\tau) h_{t,f}^*(u) d(t, f) = \delta(u - \tau)$$

On dit aussi « fermeture » ou « résolution de l'identité »

## Démonstration.

$$\int \int h(\tau - t) h^*(u - t) e^{-2j\pi f(u - \tau)} dt df = E_h \cdot \delta(u - \tau)$$

OK pour une fenêtre **admissible** (d'énergie finie) normalisée ( $E_h = 1$ ) □

Par résolution de l'identité dans l'expression

$$\int \int S_x(t, f) h_{t,f}(\tau) d(t, f) = \int \int \int x(u) h_{t,f}^*(u) h_{t,f}(\tau) d(t, f) du$$

on obtient

$$x(\tau) = \int \int S_x(t, f) h_{t,f}(\tau) d(t, f)$$

(reconstruction du signal par sommation des projections)

## Inversibilité de la STFT

$$x(\tau) = \int \int S_x(t, f) h(t - \tau) e^{-2j\pi f t} dt df$$

Possibilité de modélisation temps-fréquence par STFT  
(squelette...)

Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Fenêtrage

Décomposition sur  
des fonctions de base

Groupe de  
transformations

Résolution de  
l'identité

Spectrogramme

Mono-résolution

Ondelettes

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

- La résolution de l'identité s'écrit

$$\int \int h_{t,f}(\tau) h_{t,f}^*(u) d(t, f) = \delta(u - \tau)$$

- Notion duale : **Noyau reproduisant** :

$$K(t, f, u, \nu) = \int h_{t,f}(\tau) h_{u,\nu}^*(\tau) d\tau$$

- C'est la transformée de l'atome temps-fréquence analysé par lui-même
- Explication du terme « Noyau reproduisant » :

$$S_x(u, \nu) = \int \int K(t, f, u, \nu) S_x(t, f) d(t, f)$$

## Définition

$$\text{Spectrogramme : } |S_x(t, f)|^2$$

C'est une **distribution d'énergie temps-fréquence** :

## Conservation de l'énergie

$$E = \int \int |S_x(t, f)|^2 dt df$$

## Démonstration.

L'intégrale est

$$\int x(\tau) \int x^*(u) \int \int h_{t,f}(\tau) h_{t,f}^*(u) d(t, f) d\tau du$$

où par résolution de l'identité, l'intégrale en  $(t, f)$  vaut  $\delta(u - \tau)$ . □

# Généralisation au produit scalaire



Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Fenêtrage

Décomposition sur  
des fonctions de base

Groupe de  
transformations

Résolution de  
l'identité

**Spectrogramme**

Mono-résolution

Ondelettes

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Formule de type Parseval :

$$\langle x|y \rangle = \int \int S_x(t, f) S_y^*(t, f) dt df$$

Démonstration.

Même preuve que pour  $\langle x|x \rangle = \|x\|^2$ .



## Pourquoi Mono-résolution ?

Parce que les fonctions de base  $h(t - \tau)e^{2j\pi ft}$  sont toutes de même résolutions  $\Delta t, \Delta f$  (vérifiant l'inégalité d'incertitude)

## Exemples

- $x(t) = \delta(t - t_0)$  donne  $|S_x(t, f)|^2 = |h(t_0 - t)|^2$
- $x(t) = e^{2j\pi f_0 t}$  donne  $|S_x(t, f)|^2 = |H(f_0 - f)|^2$
- Pour « voir » des zones oscillatoires (stationnaires), prendre une fenêtre longue.
- Pour « voir » des zones transitoires (non stationnaires), recommencer toute l'analyse avec une fenêtre courte.

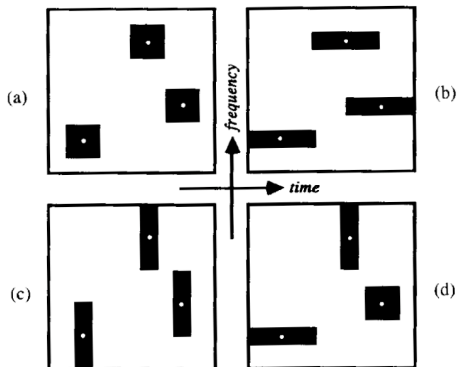


Fig. 1. Compared time-frequency resolution of spectrograms and scalograms. (a) Spectrogram with window neither short nor long; (b) Spectrogram with long window; (c) Spectrogram with short window. (d) Scalograms.

- Pour une large classe de signaux réels, les zones d'énergie sont surtout « non stationnaires » sur des périodes courtes à haute fréquence.
- D'où l'idée d'une analyse **multirésolution** :
  - $\Delta t$  petit ( $\Delta f$  grand) dans les fréquences hautes
  - $\Delta f$  petit ( $\Delta t$  grand) dans les fréquences basses



- On suit la même démarche que pour la STFT, mais pour un autre groupe de transformations :
- **Groupe affine**  $ax + b$  de translation/dilatation
- Action sur un  $h(t)$

$$h_{\tau,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{t - \tau}{a}\right)$$

(le facteur  $1/\sqrt{a}$  sert à normaliser l'énergie)

- Dilatation si  $a > 1$
- Contraction si  $a < 1$
- Mesure invariante (à gauche) par le groupe :

$$d(t, a) = \frac{dt da}{a^2}$$

- Relation avec les états cohérents affines de la MécaQ

Les  $h_{\tau,a}(t)$  sont utilisées comme fonctions de base, appelées « **Ondelettes** »

## Transformée en ondelettes

$$C_x(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(t) h^* \left( \frac{t - \tau}{a} \right) dt$$

(**CWT** : continuous wavelet transform)

- La CWT forme des produits scalaires contre les fonctions de base ondelettes

$$C_x(\tau, a) = \langle x(t) | h_{\tau,a}(t) \rangle$$

- Les ondelettes sont les « Atomes temps-échelle »  $(\tau, a)$

## Pourquoi multi-résolution ?

Parce que les ondelettes sont de résolutions différentes  $\Delta t, \Delta f$   
(avec inégalité d'incertitude) :

$$\frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{t - \tau}{a}\right) \stackrel{\text{T.F.}}{\rightleftharpoons} \sqrt{a} H(af) e^{-2j\pi f\tau}$$

- $\Delta t$  petit ( $\Delta f$  grand) dans les échelles  $a$  faibles, et
- $\Delta f$  petit ( $\Delta t$  grand) dans les échelles  $a$  hautes.

# Illustration

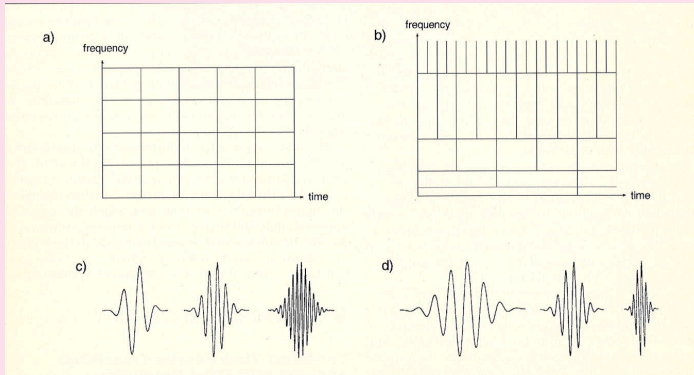


Fig. 2. Basis functions and time-frequency resolution of the Short-Time Fourier Transform (STFT) and the Wavelet Transform (WT). The tiles represent the essential concentration in the time-frequency plane of a given basis function. (a) Coverage of the time-frequency plane for the STFT, (b) for the WT. (c) Corresponding basis functions for the STFT, (d) for the WT ("wavelets").

Par Parseval :

$$C_x(\tau, a) = \langle X(\nu) | H_{\tau, a}(\nu) \rangle = \sqrt{a} \text{T.F.}^{-1} \text{ de } X(\nu) H^*(a\nu)$$

Bancs de filtres à Q-constant (réponses fréquentielles  $H^*(a\nu)$ )

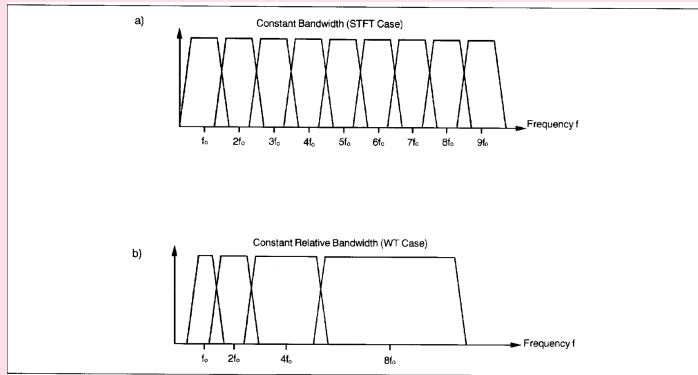


Fig. 3. Division of the frequency domain (a) for the STFT (uniform coverage) and (b) for the WT (logarithmic coverage).

Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur  
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse  
de signaux

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

## Orthonormalité temps-échelle

$$\int \int h_{t,a}(\tau) h_{t,a}^*(u) d(t, a) = \delta(u - \tau)$$

## Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int \int h\left(\frac{\tau-t}{a}\right) h^*\left(\frac{u-t}{a}\right) \frac{dt da}{a^2} \\ &= a \int \int H(a\nu) H^*(a\nu) e^{-2j\pi\nu(\tau-u)} d\nu \frac{da}{a^2} \\ &= A_h \cdot \delta(u - \tau) \end{aligned}$$

OK si l'ondelette est « admissible » :  $A_h = 1$



## Ondelette admissible

$$A_h = \int \frac{|H(\nu)|^2}{|\nu|} d\nu < +\infty$$

(normalisée à  $A_h = 1$ ).

- Une ondelette admissible doit être « passe-bande » :
- de valeur moyenne nulle  $\int h(t) dt = 0$  (d'où le terme « **ondelette** »)
- de densité spectrale d'énergie  $\ll \frac{1}{|\nu|}$  à l'infini.

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur  
des ondelettes

Multirésolution

**Reconstruction**

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse  
de signaux

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

## Exemples d'ondelettes (admissibles)

- Ondelette de Morlet-Gabor : gaussienne modulée

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-2j\pi f_0 t}$$

- « Chapeau mexicain » (dérivée seconde de gaussienne)

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(1 - \frac{t^2}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$



Grâce à la résolution de l'identité :

Reconstruction par sommation des projections :

$$x(\tau) = \int \int C_x(t, a) h_{t,a}(\tau) d(t, a)$$

## Inversibilité de la CWT

$$x(\tau) = \int \int C_x(t, a) \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{t - \tau}{a}\right) \frac{dt da}{a^2}$$

Possibilité de modélisation temps-échelle par CWT (squelette...)

- La résolution de l'identité s'écrit

$$\int \int h_{t,a}(\tau) h_{t,a}^*(u) d(t, a) = \delta(u - \tau)$$

- Notion duale : **Noyau reproduisant** :

$$K(t, a, u, \alpha) = \int h_{t,a}(\tau) h_{u,\alpha}^*(\tau) d\tau$$

- C'est la transformée de l'atome temps-échelle analysé par lui-même
- Explication du terme « Noyau reproduisant » :

$$C_x(u, \alpha) = \int \int K(t, a, u, \alpha) C_x(t, a) d(t, a)$$

## Définition

$$\text{Scalogramme : } |C_x(t, a)|^2$$

C'est une **distribution d'énergie temps-échelle** :

## Conservation de l'énergie

$$E = \int \int |C_x(t, a)|^2 \frac{dt da}{a^2}$$

## Démonstration.

L'intégrale est

$$\int x(\tau) \int x^*(u) \int \int h_{t,a}(\tau) h_{t,a}^*(u) d(t, a) d\tau du$$

où par résolution de l'identité, l'intégrale en  $(t, a)$  vaut  $\delta(u - \tau)$ . □

Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur  
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

**Scalogramme**

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse  
de signaux

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

# Généralisation au produit scalaire



Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur  
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

**Scalogramme**

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse  
de signaux

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Formule de type Parseval :

$$\langle x|y \rangle = \int \int C_x(t, a) C_y^*(t, a) \frac{dt da}{a^2}$$

Démonstration.

Même preuve que pour  $\langle x|x \rangle = \|x\|^2$ .



# Quel lien entre échelle et fréquence ?



Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur  
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse  
de signaux

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

- Soit  $f_0$  la fréquence caractéristique de l'« ondelette-mère »  $h(t)$  (ex : ondelette de Morlet)
- Les autres ondelettes  $\frac{1}{\sqrt{a}}h\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$  oscillent à la fréquence  $f = f_0/a$
- D'où l'identification

$$a \approx \frac{f_0}{f}$$

- Axe (logarithmique) des échelles pointant vers le bas

# Calcul par colonne (suite)

Rappel  $C_x(\tau, a) = \sqrt{a} \cdot \text{T.F.}^{-1}$  de  $X(\nu)H^*(a\nu)$   
(filtrage avec réponses fréquentielles  $H^*(a\nu)$ )

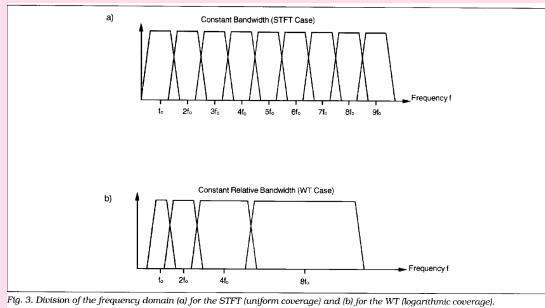


Fig. 3. Division of the frequency domain (a) for the STFT (uniform coverage) and (b) for the WT (logarithmic coverage).

Par dilatation (paramètre  $a$ ),  $\frac{\Delta f}{f}$  est constant :  
« Filtrage à  $Q$  constant » :  $Q$  est la surtension (fréquence centrale rapportée à la largeur de bande)

Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur  
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse  
de signaux

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

# Comparaison STFT-CWT

## Une impulsion / 3 sinusoïdes

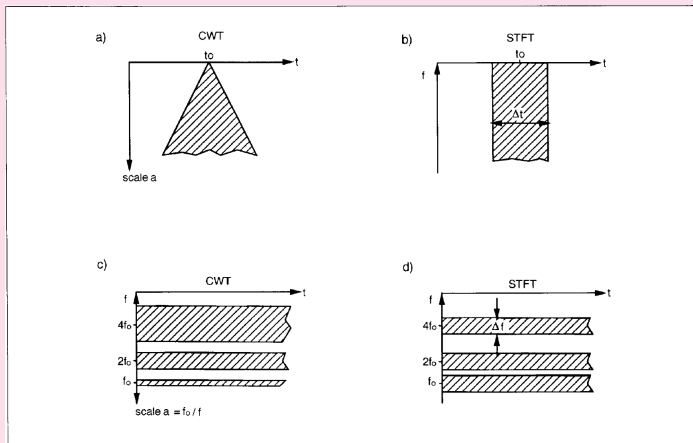


Fig. 4. Regions of influence of a Dirac pulse at  $t=t_0$  (a) for the CWT and (b) for the STFT; as well as of three sinusoids (of frequencies  $f_0$ ,  $2f_0$ ,  $4f_0$ ) for (c) the CWT and (d) the STFT.

Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur  
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse  
de signaux

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

# Comparaison STFT-CWT (module et phase)

Deux impulsions et deux sinusoides (ensemble)

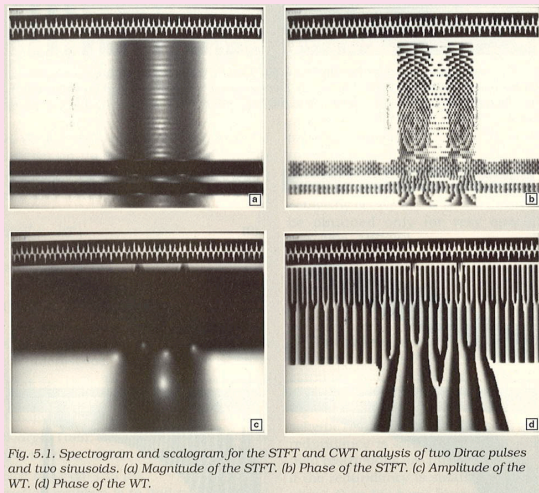


Fig. 5.1. Spectrogram and scalogram for the STFT and CWT analysis of two Dirac pulses and two sinusoids. (a) Magnitude of the STFT. (b) Phase of the STFT. (c) Amplitude of the WT. (d) Phase of the WT.

Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur  
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse  
de signaux

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie



# Comparaison STFT-CWT (module et phase)

Trois sinusoïdes d'instants d'émission décalés

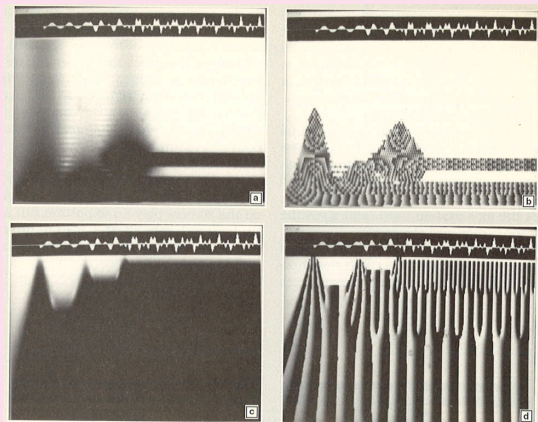


Fig. 5.2. Spectrogram and scalogram for the STFT and CWT analysis of three sinusoids with staggered starting times. The low frequency one comes first, followed by the medium and high frequency ones. (a) Magnitude of the STFT. (b) Phase of the STFT. (c) Amplitude of the WT. (d) Phase of the WT.

Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur  
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse  
de signaux

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

# Comparaison STFT-CWT (module et phase)

Un chirp (signal linéairement modulé en fréquence)

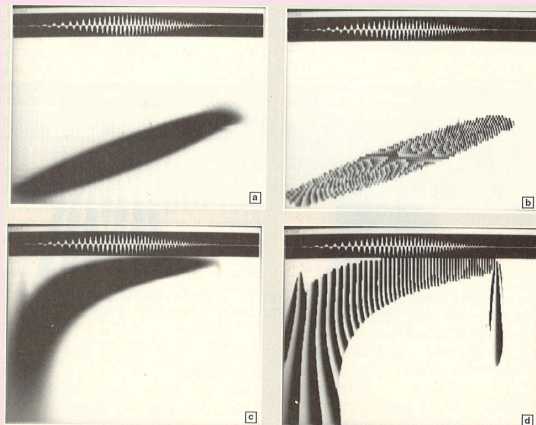


Fig. 5.3. Spectrogram and scalogram for the STFT and CWT analysis of a chirp signal. (a) Magnitude of the STFT. (b) Phase of the STFT. (c) Amplitude of the WT. (d) Phase of the WT.

Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur  
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse  
de signaux

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

# Comparaison STFT-CWT (module et phase)

Un signal de parole :

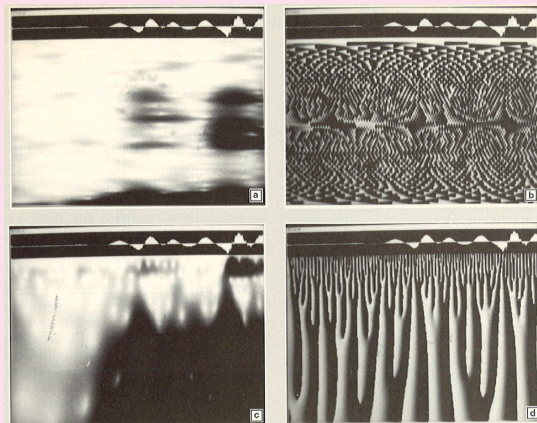


Fig. 5.4. Spectrogram and scalogram for the STFT and CWT analysis of a segment of speech, including onset of voicing. (a) Magnitude of the STFT. (b) Phase of the STFT. (c) Amplitude of the WT. (d) Phase of the WT.

Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur  
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse  
de signaux

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

- Généralisation de la notion de **distribution énergétique** du signal dans le plan temps-fréquence (ou temps-échelle).
- Temps-fréquence : Définir  $T_x(t, f)$  tel que

$$\int T_x(t, f) d(t, f) = E_x = \int |x(t)|^2 dt = \int |X(f)|^2 df$$

(de même en temps-échelle avec la mesure  $d(t, a)$ )

- Cas particuliers :
  - Spectrogramme  $T_x(t, f) = |S_x(t, f)|^2$
  - Scalogramme  $T_x(t, a) = |C_x(t, a)|^2$
- Généralisation : produit scalaire (propriété de **Moyal**)

$$\iint T_x(t, f) T_y(t, f) dt df = \left| \int x(t) y^*(t) dt \right|^2$$

- On cherche naturellement une **forme quadratique (bilinéaire)** du signal :

$$T_x(t, f) = \int \int k(u, v, t, f) x(u) x^*(v) du dv$$

ou

$$T_x(t, f) = \int \int K(\nu, \mu, t, f) X(\nu) X^*(\mu) d\nu d\mu$$

avec un **noyau**  $k$  (ou  $K$ ).

- Noter que  $x(u)x^*(v)$  est invariante par transformation de phase :  $x(t) \mapsto x(t)e^{j\phi}$ . **On ne peut pas ici exploiter l'information sur la phase.**

## Principe fondamental :

### Covariance par rapport au groupe

Le principe de covariance impose une forme particulière du noyau.

## Exemples

- Groupe de Weyl-Heisenberg (de translation temps-fréquence) :

$$y(t) = x(t - t_0)e^{-2j\pi f_0 t} \implies T_y(t, f) = T_x(t - t_0; f - f_0)$$

- Groupe affine (de translation-dilatation)

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0}} x\left(\frac{t - t_0}{a_0}\right) \implies T_y(t, a) = T_x\left(\frac{t - t_0}{a_0}; \frac{a}{a_0}\right)$$

- Par covariance temps-fréquence on obtient la forme générale de la **Classe de Cohen** (1966) :

$$T_x(t, f) = \int \int N(\tau - t, \nu - f) W_x(\tau, \nu) d\tau d\nu$$

- C'est une convolution temps-fréquence (2D) d'un **noyau**  $N$  avec la **distribution de Wigner-Ville** :

$$W_x(t, f) = \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-2j\pi f\tau} d\tau$$

- Note : on retrouve le spectrogramme en prenant  $N = W_h$ . En effet, par la formule de Moyal :

$$\int \int W_x(t, f) W_h(t - \tau, f - \nu) dt df = \left| \int x(t) h_{\tau, \nu}^*(t) dt \right|^2.$$

- Par covariance temps-échelle on obtient la forme générale de la **Classe affine** (Rioul-Flandrin, 1992) :

$$T_x(t, a) = \int \int N \left( \frac{\tau - t}{a}, a\nu \right) W_x(\tau, \nu) d\tau d\nu$$

- C'est une convolution temps-échelle (2D) d'un **noyau**  $N$  avec la même **distribution de Wigner-Ville**
- Note : on retrouve le scalogramme en prenant  $N = W_h$



# Propriété attendue : Marginales



Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations  
bilinéaires

Covariance  
Classes générales

**Autres propriétés  
attendues**

Distribution de  
Wigner-Ville

Choix de noyaux

Boîtes à outils

Bibliographie

On retrouve les **densités temporelle et spectrale d'énergie** par marginalisation temps ou fréquence :

$$\int T_x(t, f) df = |x(t)|^2$$

$$\int T_x(t, f) dt = |X(f)|^2$$

# Propriété attendue : Moments



Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

On retrouve la **fréquence instantanée** et le **retard de groupe** comme les moments d'ordre 1 (temps ou fréquence) : Fréquence

instantanée :

$$f_x(t) = \frac{\int f T_x(t, f) df}{\int T_x(t, f) df}$$

Retard de groupe :

$$t_x(f) = \frac{\int t T_x(t, f) dt}{\int T_x(t, f) dt}$$

(se généralise aux moments d'ordre supérieur)

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations  
bilinéaires

Covariance  
Classes générales

**Autres propriétés  
attendues**

Distribution de  
Wigner-Ville

Choix de noyaux

Boîtes à outils

Bibliographie

- Pour un signal de durée finie  $T$ , sa représentation bilinéaire a le **même support temporel**.
- Pour un signal de bande limitée  $B$ , sa représentation bilinéaire a le **même support fréquentiel**.
- (en contradiction apparente avec le principe d'incertitude : voir interférences plus loin)

# La solution : Distribution de Wigner-Ville



Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations  
bilinéaires

Covariance

Classes générales

Autres propriétés  
attendues

Distribution de  
Wigner-Ville

Choix de noyaux

Boîtes à outils

Bibliographie

Bonne nouvelle [Wigner (1932) et Ville (1948)] :

La distribution de Wigner-Ville :

$$W_x(t, f) = \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)e^{-2j\pi f\tau} d\tau$$

a toutes les propriétés ci-dessus !

En plus, elle est inversible à une amplitude/phase près :

$$x(t) = \frac{1}{x^*(0)} \int W_x\left(\frac{t}{2}, f\right) e^{2j\pi ft} df$$

Preuve : TF inverse pour  $\tau = t/2$ .

- Transformée duale de Wigner-Ville : **Fonction d'ambiguïté**

$$A_x(f, \tau) = \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)e^{2j\pi ft} dt$$

- Utile pour la discrimination/séparation temps-fréquence.
- Exemple : Radar pour des cibles proches en distance (retard) et en vitesse (fréquence Doppler)

## Mauvaise nouvelle :

La distribution **énergétique** temps-fréquence  $W_x(t, f)$  est réelle mais **pas toujours positive!!**

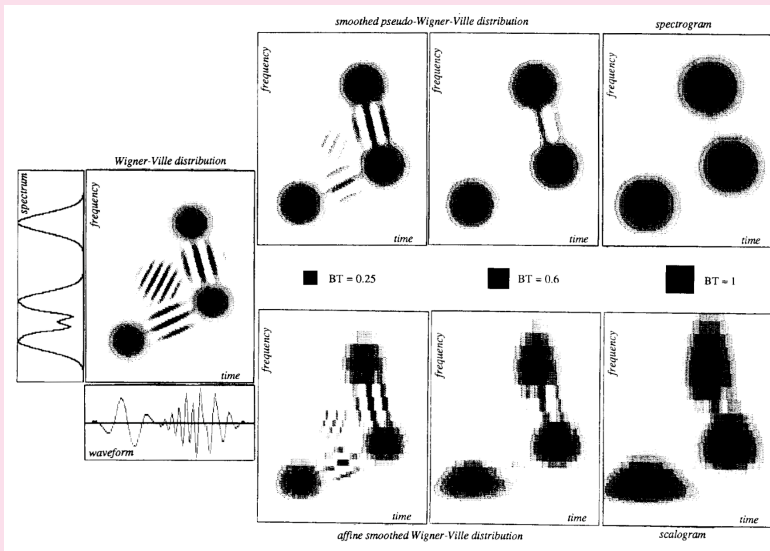
## Très mauvaise nouvelle :

Si  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ , alors (**termes d'interférence**)

$$W_x(t, f) = W_{x_1}(t, f) + W_{x_2}(t, f) + W_{x_1, x_2}(t, f) + W_{x_2, x_1}(t, f)$$

- **Très gênant** pour l'interprétation (explique la non-positivité)
- $N$  composantes donne une représentation temps-fréquence de  $N$  termes +  $N(N - 1)/2$  termes d'interférences!
- D'où l'idée de **lisser** Wigner-Wille (par convolution) pour réduire les interférences :

# Wigner-Ville lissée



Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations  
bilinéaires

Covariance

Classes générales

Autres propriétés  
attendues

Distribution de  
Wigner-Ville

Choix de noyaux

Boîtes à outils

Bibliographie

- **Wigner-Ville pseudo-lissée** (pseudo signifie lissage séparable  $t : f$  ou  $t : a$ )
- Exemple de lissage non séparable temps-fréquence pour réduire les interférences : **Choi-Williams** (1989) :
  - Noyau gaussien en le produit des variables temps-fréquence :

$$N(t, f) = (\text{TF2D})^{-1} \text{ de } e^{-(\pi\nu\tau/\sigma)^2/2}$$

- Intérêt : Réduction d'interférence en conservant les propriétés de marginales et de moments.
- Méthodes de lissage calculées en fonction du signal (méthodes adaptatives non-paramétriques)  
Exemple : OK distribution (Optimal Kernel, **Baraniuk**, 1993)



- Principe : **On fait de l'analyse sur l'outil d'analyse !**
- Chaque propriété voulue se traduit sur le noyau  $N$
- Un ensemble de propriétés définit une classe de solutions  $T_x(t, f)$  (si elle existe !)

## Impossibilités

- Il est impossible de vérifier à la fois positivité et marginales (ex : STFT)
- Il est impossible de vérifier à la fois positivité et Moyal (ex : Wigner-Ville)

# Exemple de distribution temps-fréquence : Rihaczek



Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations  
bilinéaires

Covariance

Classes générales

Autres propriétés  
attendues

Distribution de  
Wigner-Ville

Choix de noyaux

Boîtes à outils

Bibliographie

- Distribution de **Rihaczek** (1968)

$$T_x(t, f) = x(t)X^*(f)e^{-2j\pi ft}$$

- Intérêt : très simple. On en prend souvent la partie réelle (Ackroyd)
- Distribution  $s$ -Wigner : Transition douce entre Wigner-Ville et Rihaczek par un paramètre  $|s| < \frac{1}{2}$  :

$$T_x(t, f) = \int x\left(t + \left(s - \frac{1}{2}\right)\tau\right)x^*\left(t - \left(s + \frac{1}{2}\right)\tau\right)e^{-2j\pi f\tau} d\tau$$

- Distribution de **Page-Levin** (1950)

$$T_x(t, f) = \frac{\partial}{\partial t} \left| \int_{-\infty}^t x(\tau) e^{-2j\pi f\tau} d\tau \right|^2$$

- Intérêt : Causalité

*Ce ne sont que quelques exemples !*





cf. [Flandrin93] pour une liste exhaustive de distributions

- **Signal Processing Toolbox** : `specgram` (spectrogram)
- **Wavelet Toolbox** :
  - Centrale Lyon, Marne-la-Vallée, Paris V et Paris Sud
  - 1D and 2D orthogonal wavelets, paquets, denoising...
  - `cwt` (continuous wavelet transform)

- **Wavelab** : `www-stat.stanford.edu/~wavelab` (Donoho, Williams, Mallat)
- Très varié (pointu) sur l'analyse par ondelettes.
- Squelettes, maxima, packets, interpolation, etc.
- Continuous tools : CWT
- Wigner tools : Spectrogram, WVDist, TFDist

- Bibliothèque **SIMPA** du GDR-PRC ISIS  
[gdr-isis.org/Applications/](http://gdr-isis.org/Applications/)
- Boîte à Outils **Temps-Echelle** (O. Rioul Télécom ParisTech, J. C. Pesquet LSS, H. Krim MIT)
  - Ondelettes (bi)-orthogonales, FWT, régularité
  - Paquets d'ondelettes
- Boîte à Outils **Temps-Fréquence** (P. Flandrin ENS Lyon etc.)
  - [tftb.nongnu.org](http://tftb.nongnu.org) 1996
  - Très complet sur les transformations bilinéaires.
  - Fréquence instantanée, retard de groupe, Mellin,...
  - Classe de Cohen : Spectrogramme, Wigner-Ville, Choi-Williams, Rihaczek, *etc, etc!*
  - Classe affine : Wigner-Ville lissé affine, scalogramme, etc.

# Un peu de lecture...

-  **P. Flandrin.**  
*Temps-fréquence.*  
Hermès, 1993.
-  **M. Akay, ed.**  
*Time-Fréquency and Wavelets in Biomedical Signal Processing.*  
IEEE Press, 1998.
-  **O. Rioul and M. Vetterli.**  
Wavelets and Signal Processing.  
*IEEE Signal Processing Magazine*, Oct. 1991, pp. 14–38.
-  **O. Rioul and P. Flandrin.**  
Time-Scale Energy Distributions : A General Class Extending Wavelet Transforms.  
*IEEE Trans. on Signal Processin*, July 1992,  
40(7) :1746–1757.

Analyse  
Temps-Fréquence  
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution  
temps-fréquence

Pourquoi  
l'analyse  
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations  
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Mes articles « ondelettes et temps-échelle » sont disponibles en format PDF sur ma page Web :

<http://perso.telecom-paristech.fr/rioul/researchold.html>