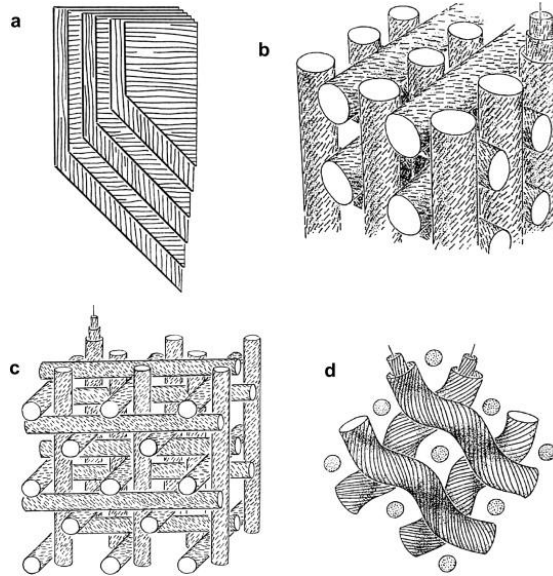
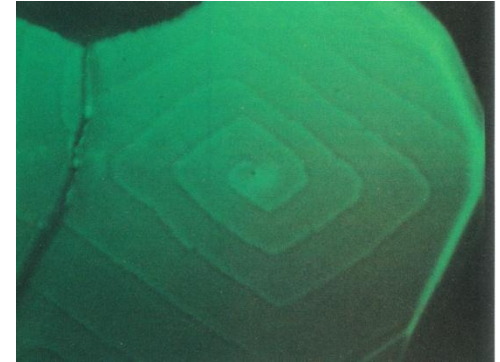
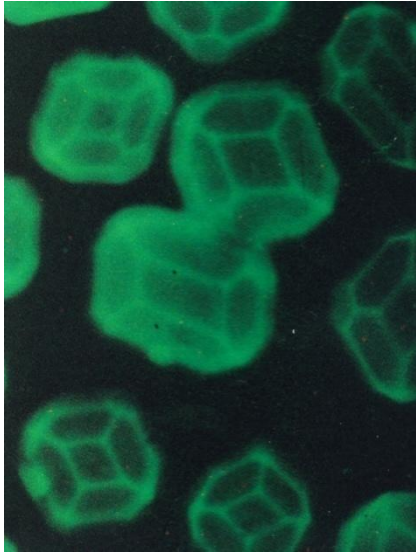
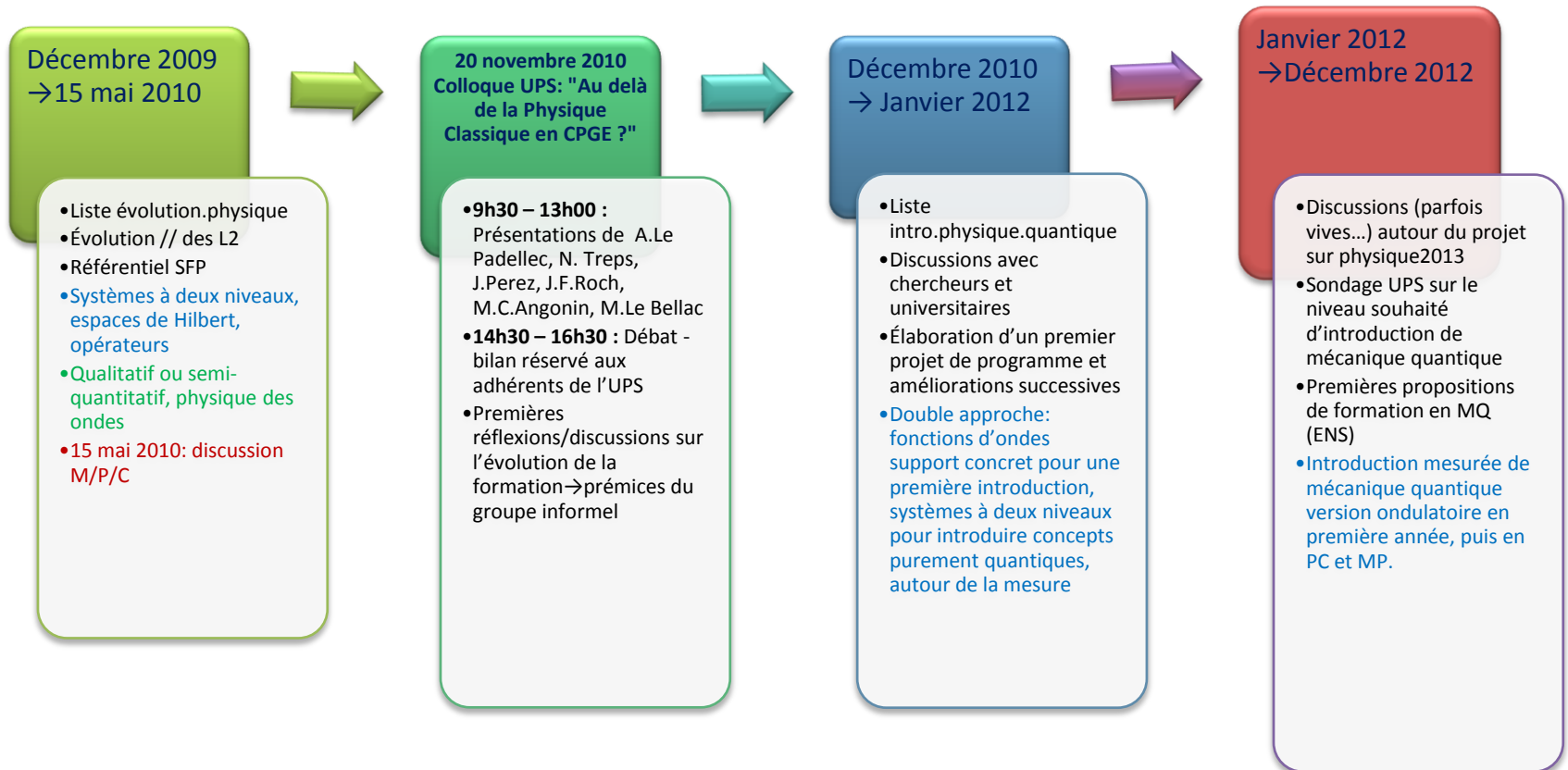


Enseigner la mécanique quantique en CPGE: réforme 2013, une première étape



Enseigner la mécanique quantique en CPGE: réforme 2013, une première étape



Enseigner la mécanique quantique en CPGE: réforme 2013, une première étape

Heisenberg spatial en situation 1D confinée

- Double Puits: premiers états stationnaires, évolution temporelle
- Effet Tunnel: radioactivité Alpha, microscopie, spectroscopie

Photons et polarisation

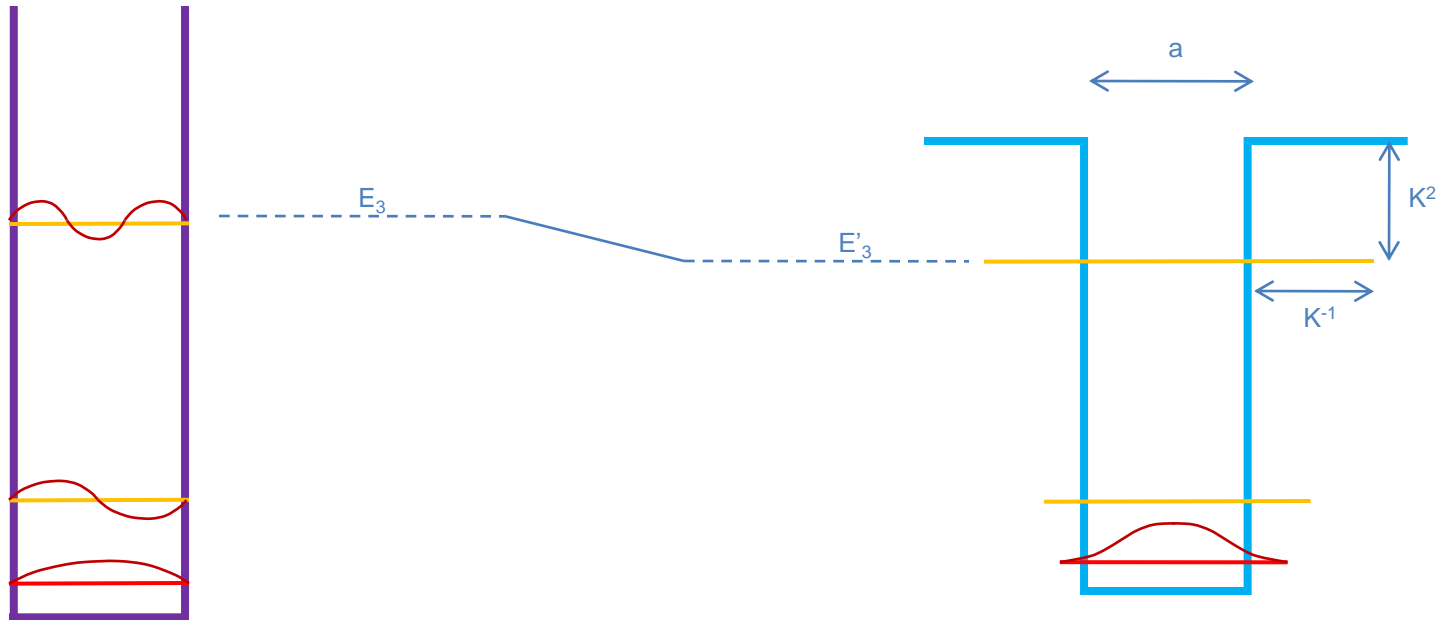
- Mesures sur une base de PR, expérience à choix multiple
- Polarisation circulaires

Indiscernabilité: Fermions et bosons

- Grégarité bosonique
- Pauli et la matière fermionique

Heisenberg spatial en situation 1D confinée

1. Du puits infini au puits fini



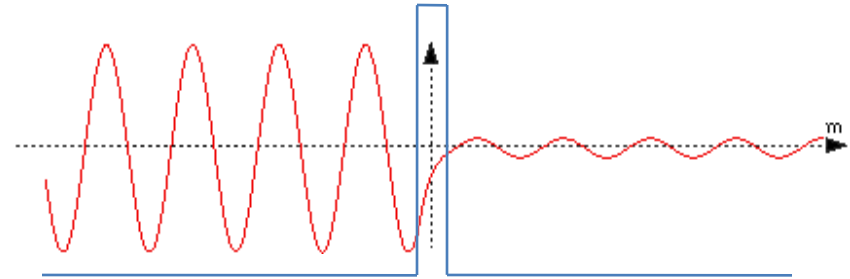
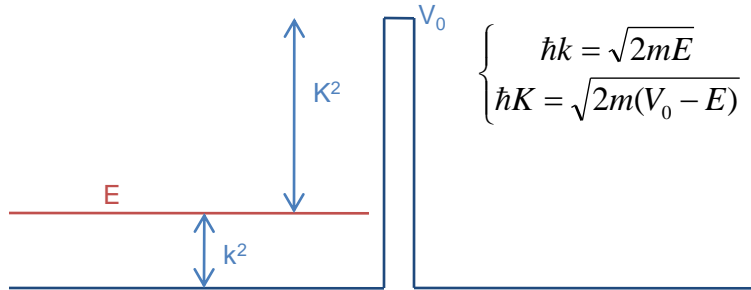
Niveaux « profonds »

$$a \rightarrow a + 2K^{-1} \longrightarrow E_1 \rightarrow E'_1 = E_1 \left(1 - 4(Ka)^{-1}\right)$$

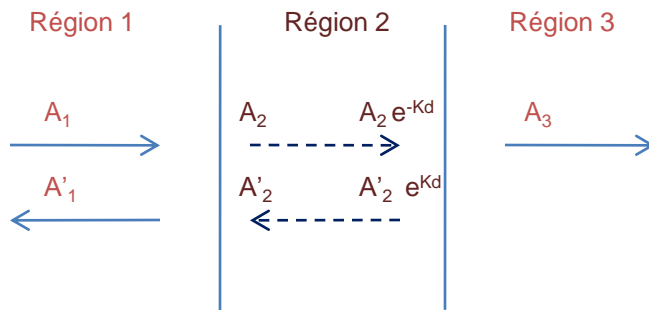
$$\left\{ \begin{array}{l} E = \frac{p^2}{2m} \\ p = \hbar k \\ \text{Heisenberg} \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow E_n = n^2 E_1 \\ \longrightarrow E_1 = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{a} \right)^2 \pi^2 \end{array}$$

Heisenberg spatial en situation 1D confinée

2. Franchissement tunnel d'une barrière



<http://phys.educ.ksu.edu/vqm/html/qtunneling.html>



$$A_3 \approx t_{23} t_{12} A_1 e^{-Kd}$$

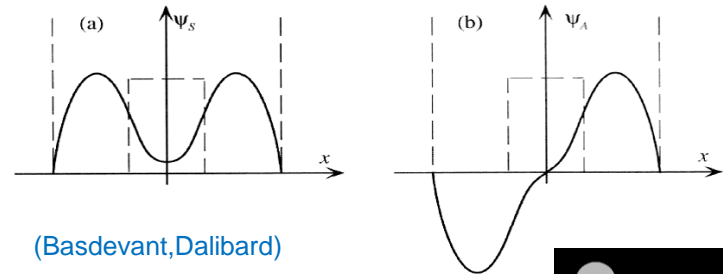
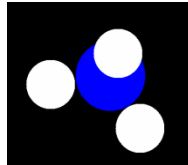
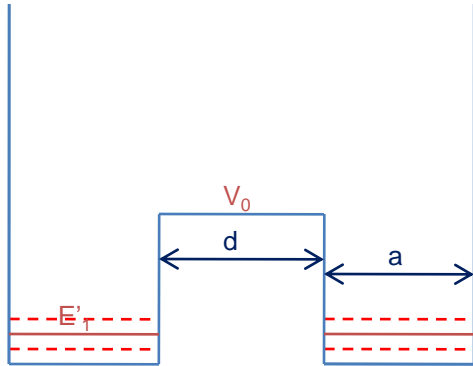
- Tout se passe comme si on ignorait les ondes retour
- Sans lesquelles l'effet serait nul!

$$\begin{cases} A_3 = t_{23} A_2 e^{-Kd} \\ A_2 = t_{12} A_1 + r_{21} A'_2 \\ A'_2 e^{Kd} = r_{23} A_2 e^{-Kd} \end{cases} \Rightarrow A_3 = \frac{t_{23} t_{12} A_1 e^{-Kd}}{1 - r_{21} r_{23} e^{-2Kd}}$$

$$\begin{cases} r_{12} = \frac{k - iK}{k + iK} \\ t_{12} = \frac{2k}{k + iK} \\ t_{23} = \frac{2iK}{k + iK} \end{cases} \rightarrow T = \frac{\| \vec{J}_t \|}{\| \vec{J}_i \|} \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2Kd}$$

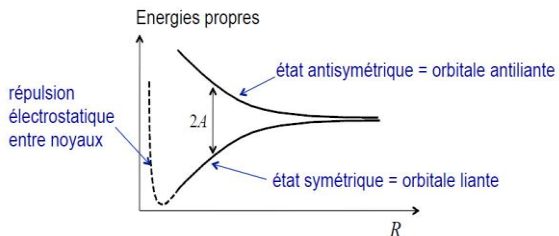
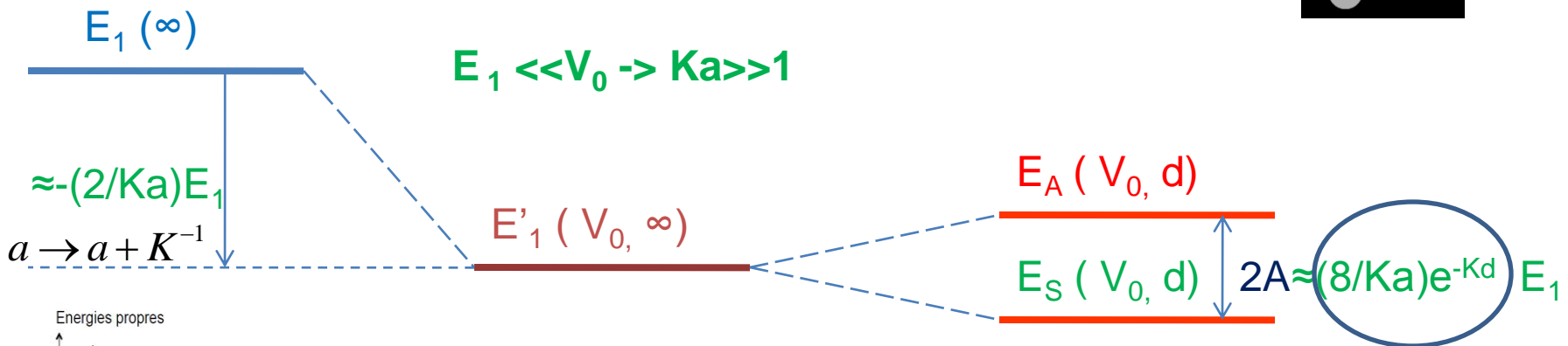
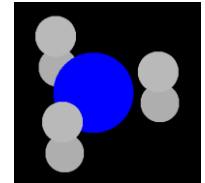
Heisenberg spatial en situation 1D confinée

3. Double Puits: Premiers états stationnaires



(Basdevant, Dalibard)

<http://www.quantum-physics.polytechnique.fr/>

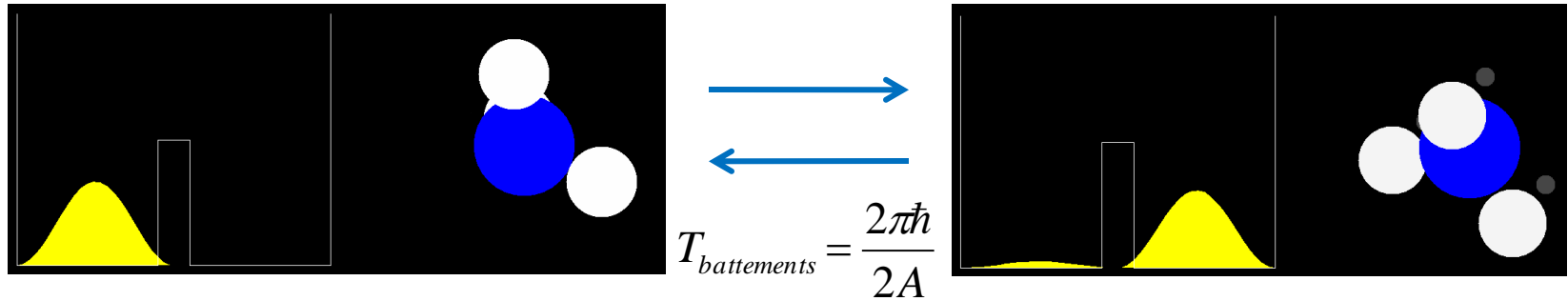


<http://www.phys.ens.fr/~dalibard/PHY311/2012/>

•Rôle fondamental de l'effet tunnel dans la formation des molécules en chimie...

Heisenberg spatial en situation 1D confinée

3. Double Puits: Évolution temporelle



- Particule confinée dans le puits de gauche

$$p = \pm \hbar\pi/a \Rightarrow \tau_{AR} = 2a/v = 2ma^2/\pi\hbar = \pi\hbar/E_1$$

- Amplitude de probabilité de franchissement

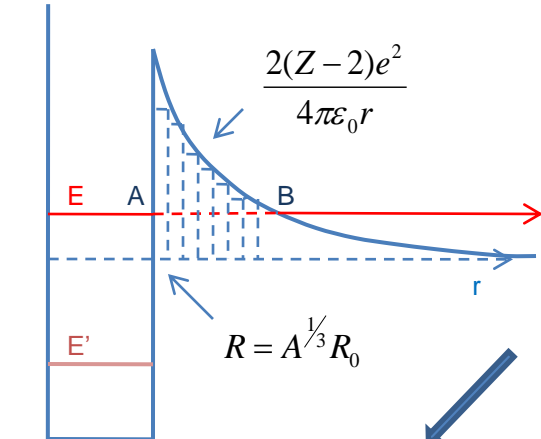
$$\sqrt{T} \approx \sqrt{\frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2}} e^{-2Kd} \approx \frac{4k}{K} e^{-Kd} = \frac{4\pi}{Ka} e^{-Kd}$$

- Rapport τ_{AR} à $T_{battements}$ /2 correspond \approx à cette amplitude

$$2 \frac{\tau_{AR}}{T_{battements}} \cong \frac{4\pi}{Ka} e^{-Kd} \Rightarrow 2A \cong \frac{4\pi}{Ka} e^{-Kd} E_1$$

Heisenberg spatial en situation 1D confinée

4. Effet Tunnel: Radioactivité Alpha



$$A_3 \approx t_{23} t_{12} A_1 e^{-Kd}$$

- Amplitude lentement variable (Rayleigh)
- Approximation WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin)

$$\frac{(V-E)}{|V|} \gg K^{-1} \Rightarrow \hbar |V| \ll \langle \sqrt{2m(V-E)} \rangle^3$$

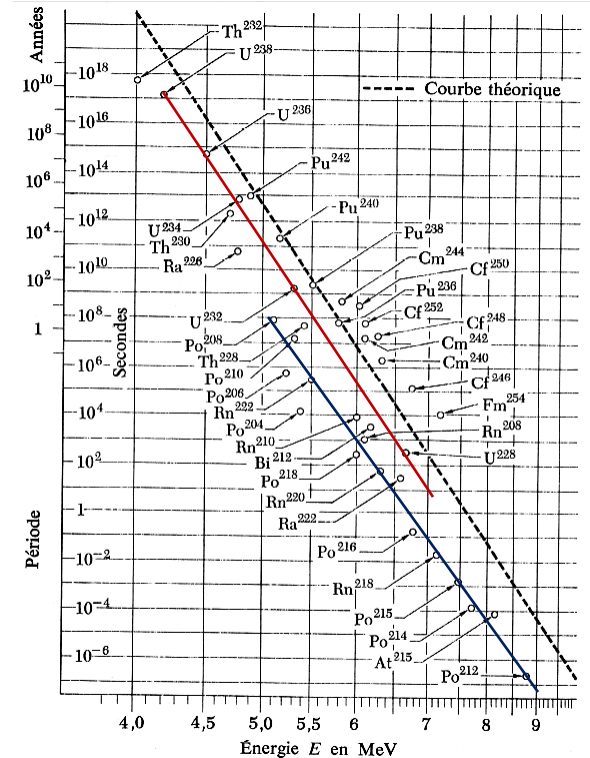
$$T \approx e^{-\frac{2}{\hbar} \int_A^B \sqrt{2m(V(r)-E)} dr}$$

Gamow (1928)

$$\begin{cases} \tau_0 = 2R/v \\ \tau_0 / \tau = T \end{cases} \Rightarrow \tau = B_1 e^{\frac{B_2(Z-2)}{\sqrt{E}}}$$

Geiger-Nuttall

$$\begin{cases} \tau_0 \approx 10^{-21} s \\ B_1 = \tau_0 e^{\frac{8e\sqrt{m(Z-2)}R}{\hbar}} \\ B_2 = \frac{2\pi e^2}{\hbar} \sqrt{2m} \end{cases}$$

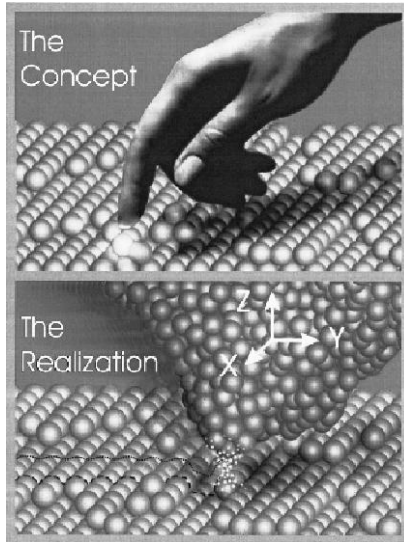


Berkeley vol.4

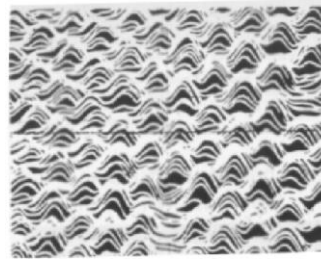
$$\ln(\tau) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{E}}\right)$$

Heisenberg spatial en situation 1D confinée

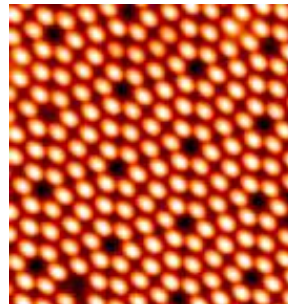
5. Effet Tunnel: Microscopie



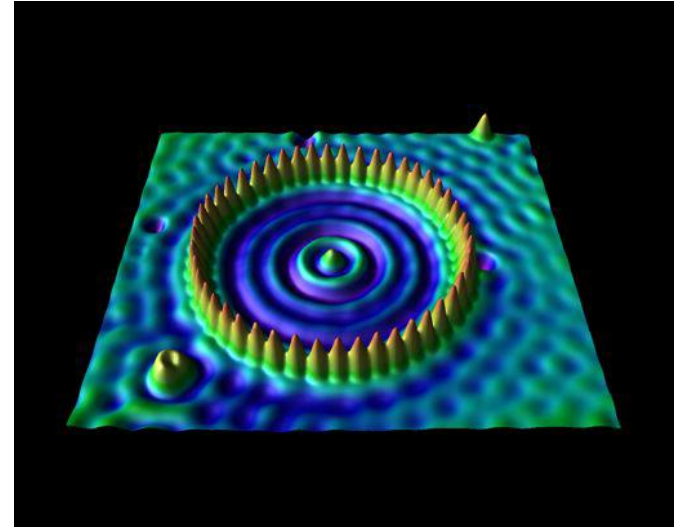
G. Binnig and H. Rohrer,
Rev. of Mod. Phys. 71 (1999)



Si(111)-7x7



<http://sondeslocales.fr/upload/documents/forum2011/cours/cours/Forum2011-Palmino.pdf>



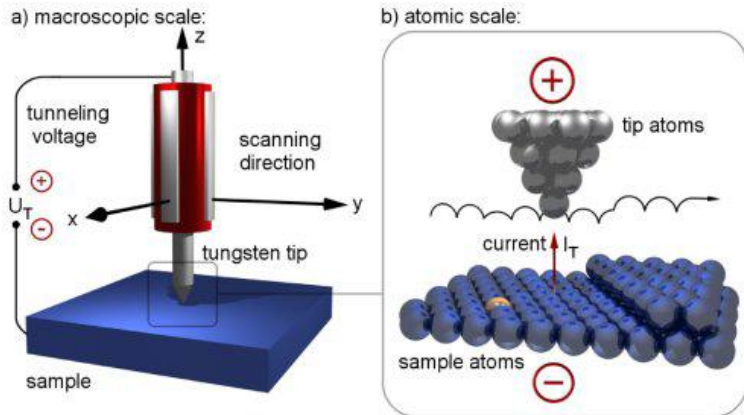
48 atomes de Fer rangés sur une surface de Cuivre (IBM)

<http://www.phys.ens.fr/~dalibard/PHY311/2012/>

- Premiers travaux de Binnig en 1978: profilomètre de résolution attendue quelques dizaines d'angströms
- Première réalisation de STM, Binnig et Rohrer en 1982, reconstruction de Si(111)-7x7 (APL, PRL)
- Microscopie Optique en champ proche (1984), AFM (1985)
- Nobel en 1986 (avec Ruska: microscopie électronique)
- 1991 plus de 1000 publications...

Heisenberg spatial en situation 1D confinée

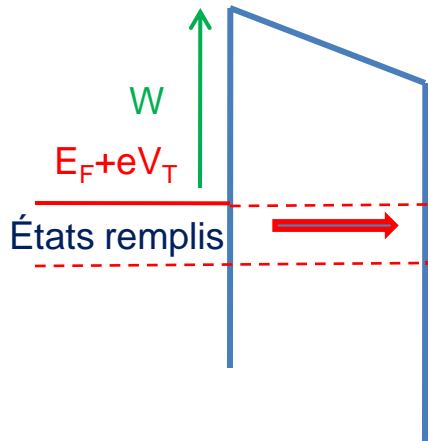
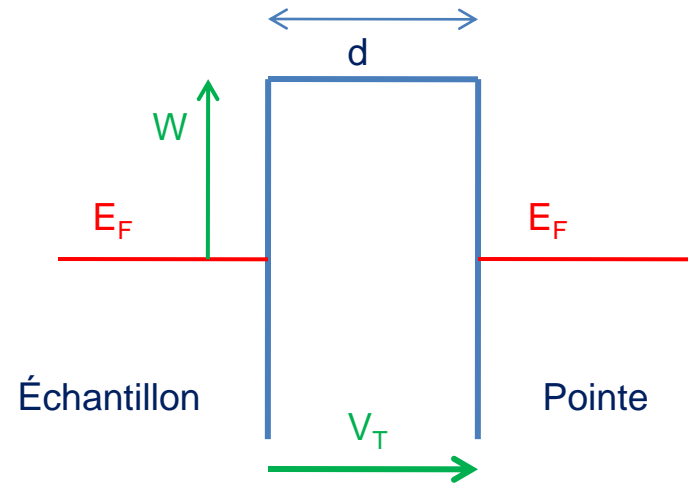
5. Effet Tunnel: Microscopie



<http://www.ieap.uni-kiel.de>

- $kT \ll E_F, W$
- Pauli

- $I_t = 0 \dots$
- Appliquer V_T



$$I_t \propto e^{-2 \frac{\sqrt{2mW}}{\hbar} d} \approx e^{-\sqrt{W_{eV}} d_A}$$

• Si $W \approx 4$ eV, $I_t \downarrow$ un ordre de grandeur quand d augmente de 1 Å

$$I_t \propto \sum_{E_F \leq E_n \leq E_F + eV_T} eT(E_n) |\phi_n(z=0)|^2 \approx eT(E_F) (N(E_F + eV_T) - N(E_F))$$

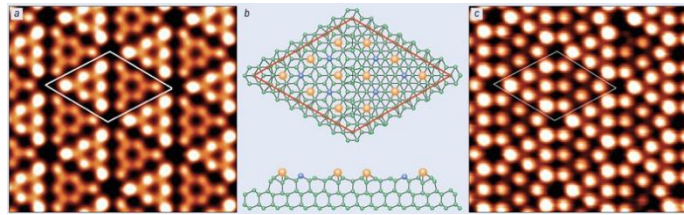
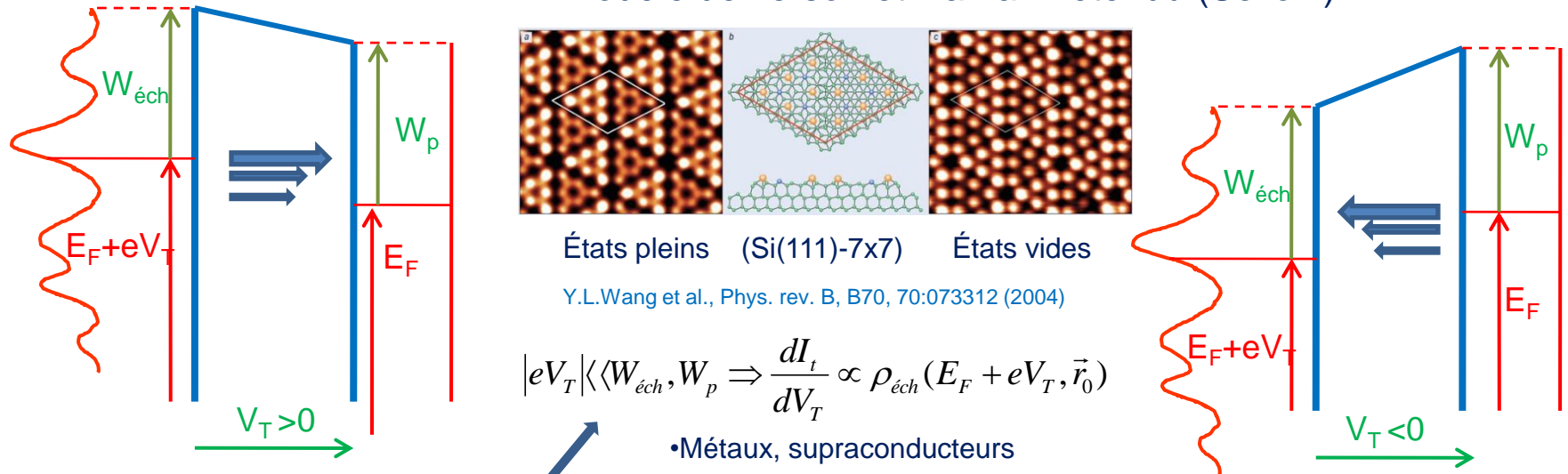
- $eV_T \ll W, E_F$

$$I_t(x, y) \propto e^2 V_T T(E_F) \rho_{éch}(E_F, x, y, z=0)$$

Heisenberg spatial en situation 1D confinée

5. Effet Tunnel: Microscopie, spectroscopie

Modèle de Tersoff et Hamann étendu (Selloni)



États pleins (Si(111)-7x7) États vides

Y.L.Wang et al., Phys. rev. B, B70, 70:073312 (2004)

$$|eV_T| \langle \langle W_{éch}, W_p \rangle \rangle \Rightarrow \frac{dI_t}{dV_T} \propto \rho_{éch}(E_F + eV_T, \vec{r}_0)$$

• Métaux, supraconducteurs

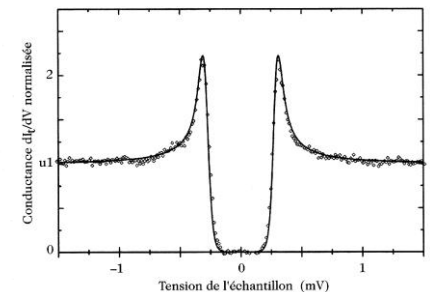
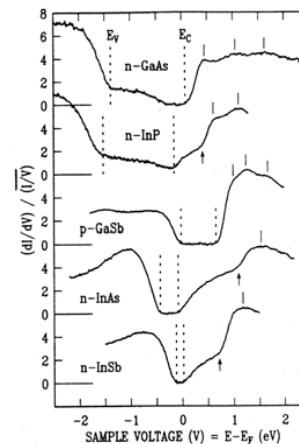
$$I_t(x, y) \propto \int_{E_F}^{E_F + eV_T} T(E, eV_T, r_0) \rho_{éch}(E, \vec{r}_0) \rho_{pointe}(E - eV_T, \vec{r}_0) dE$$

$$T(E, eV_T, z) = \exp\left(-\frac{2z(2m)^{1/2}}{\hbar} \left[\frac{W_{éch} + W_p}{2} + \frac{eV_T}{2} - (E - E_F)\right]^{1/2}\right)$$

• Semi-conducteurs

R.M.Feenstra, Phys Rev B, 50, 4561(1994)

$$\frac{dI_t}{dV_T} \approx \frac{\rho_{éch}(E_F + eV_T, \vec{r}_0)}{(1/eV_T) \int_{E_F}^{E_F + eV_T} \rho_{éch}(E, \vec{r}_0) dE}$$



B.Sacépé et al., Phys Rev Lett., 96:97006(2006)

Heisenberg spatial en situation 1D confinée

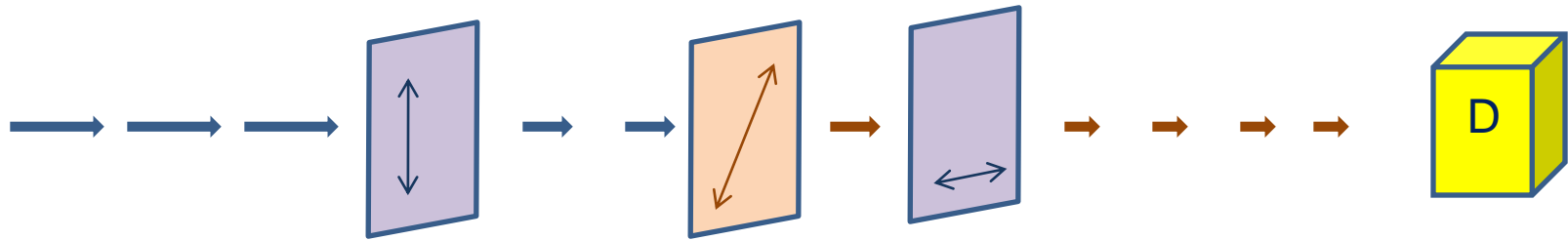
Conclusions

- Rôle du confinement dans la quantification
- Influence de la délocalisation sur l'abaissement de l'énergie des différents niveaux
- Cohérence d'une description ondulatoire et de l'effet tunnel associé avec les résultats expérimentaux
- Rôle de l'effet tunnel sur la formation de liaisons chimiques

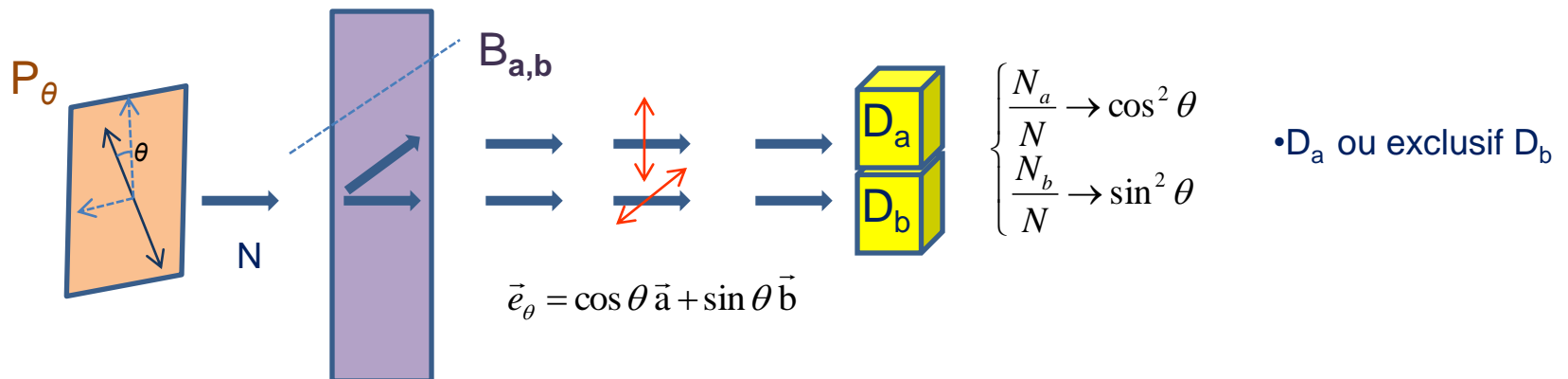
- Mesure?
- Indiscernabilité?

Photons et polarisation

1. Mesures sur une base de PR

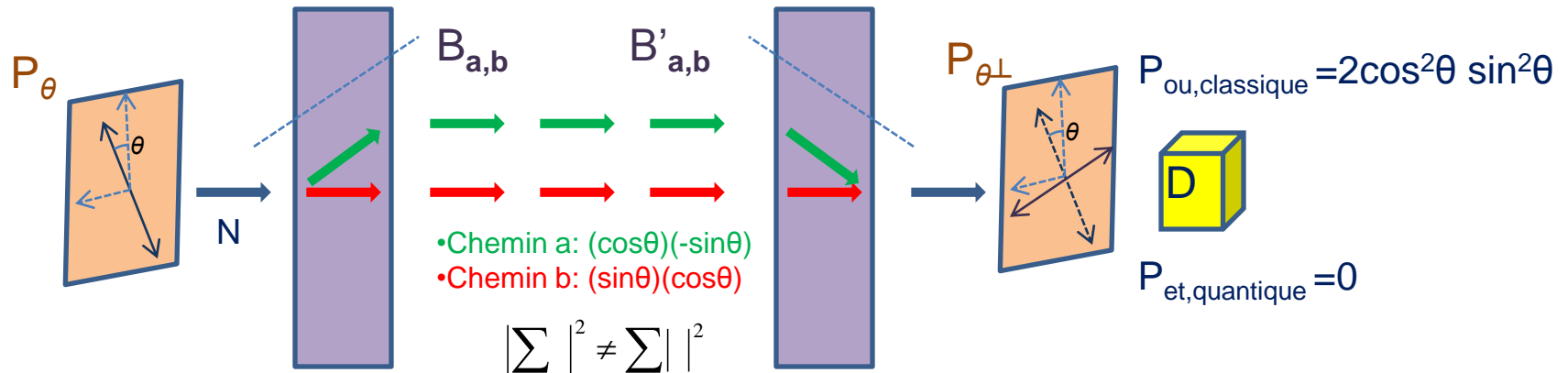


- PR verticale et horizontale forment une base orthogonale des états de polarisation
- La mesure se fait par projection sur un des états de la base, modification de l'état du système
- La mesure d'un état oblique est incompatible avec celle d'un état h ou v
- La logique quantique diffère profondément de la logique classique...
 - (50% des hommes bruns sont des femmes!...?)

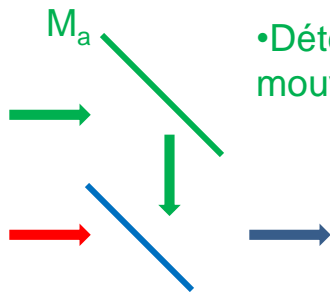


Photons et polarisation

2. Expérience à choix multiple



- Linéarité, mais pas sur les probabilités → amplitude de probabilité
- « et »: on ne connaît pas le chemin pris par un photon (explore tous les possibles)



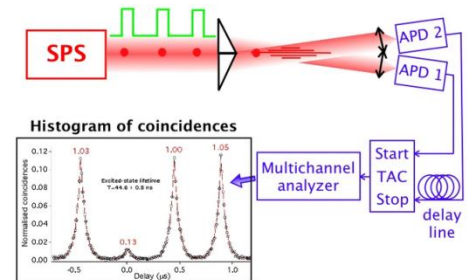
• Détection du mouvement de M_a ?

$$p_{recul} \geq \Delta p_{miroir} \geq \frac{\hbar}{\Delta l_{miroir}} \Rightarrow \Delta \varphi_{miroir} \geq 1$$

• Existence des photons?

• Expériences d'anticorrélation:

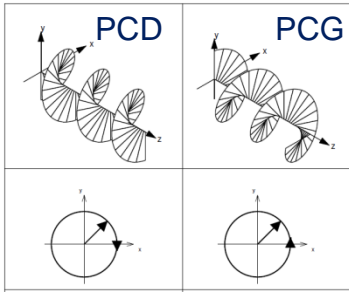
- R. Hanbury-Brown et R.Q. Twiss (1956)
- P. Grangier, G. Roger, A. Aspect (1986)



http://www.physique.ens-cachan.fr/old/franges_photon/anticorrelation.htm
 J.F.Roch, F. Treussart, P. Grangier

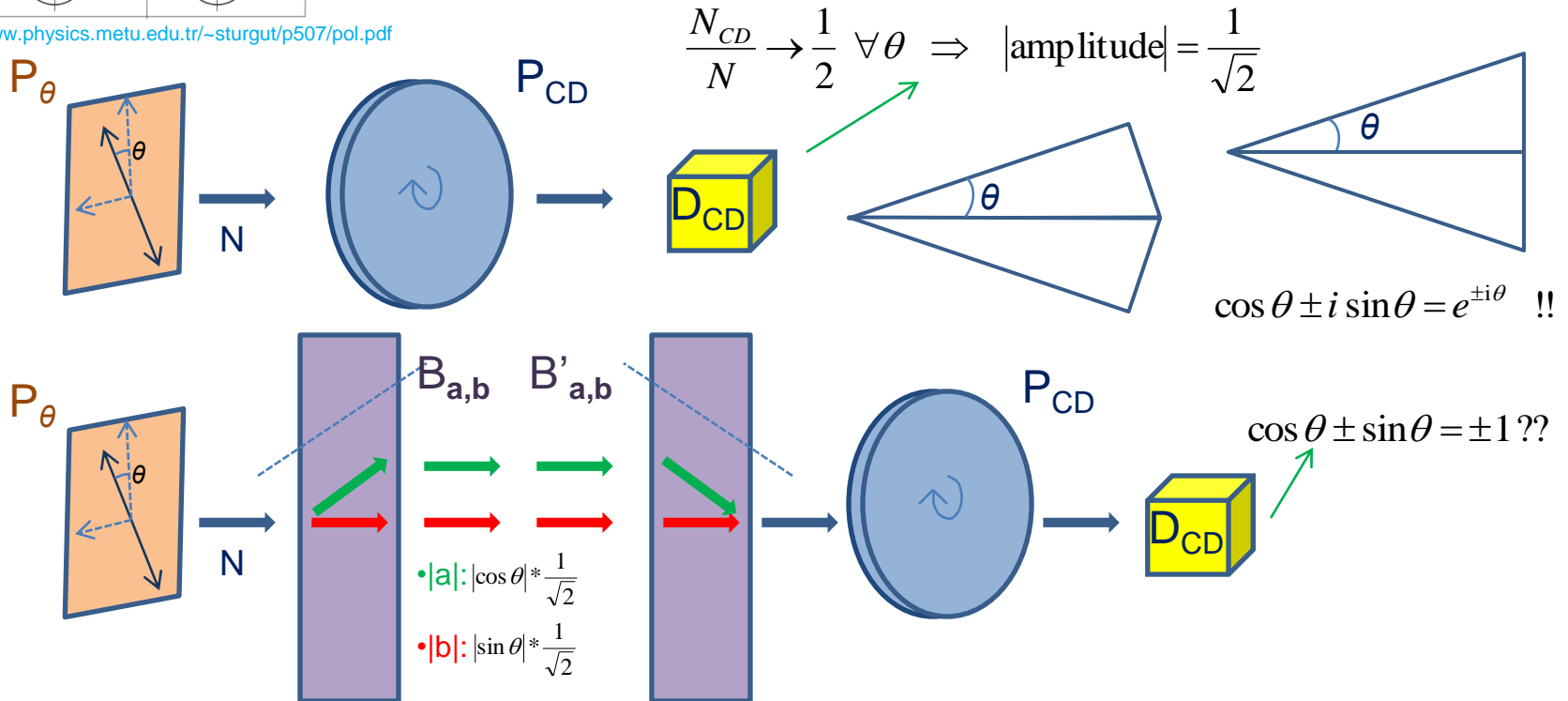
Photons et polarisation

3. Polarisations circulaires



- PCG, PCD base équivalente à toute base de PR \perp
- Projecteur sur PCD: P_{CD} ($\lambda/4_{xy} \rightarrow P_{45^\circ} \rightarrow \lambda/4_{yx}$)
- Projecteur sur PCG: P_{CG} ($\lambda/4_{yx} \rightarrow P_{45^\circ} \rightarrow \lambda/4_{xy}$)

<http://www.physics.metu.edu.tr/~sturgut/p507/pol.pdf>



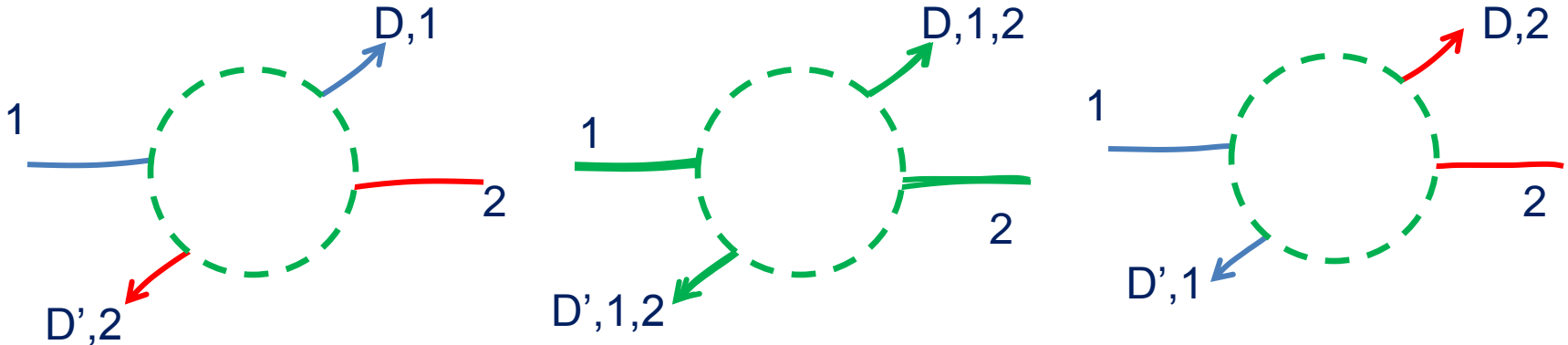
Photons et polarisation

Conclusions

- Amplitudes de probabilités dont le module au carré donne P
- Nécessité de travailler sur les complexes
- Mesure d'une grandeur physique pour un système à deux états:
 - Base d'états propres
 - Linéarité
 - Réduction de paquet d'onde

Indiscernabilité: Fermions et bosons

1. Indiscernabilité et fonction d'onde



$$|\psi(1,2)|^2 = |\psi(2,1)|^2 \Rightarrow \psi(1,2) = e^{i\delta} \psi(2,1) \Rightarrow \text{en itérant } e^{i\delta} = \pm 1$$

• Particules distinctes en D: $|f(\theta)|^2 + |f(\pi-\theta)|^2$

$$|f1a|^2 |f2b|^2 + |f1b|^2 |f2a|^2$$

• Bosons en D: $|f(\theta) + f(\pi-\theta)|^2$

$$a \approx b \Rightarrow P_2^\neq = 2|f_1 f_2|^2$$

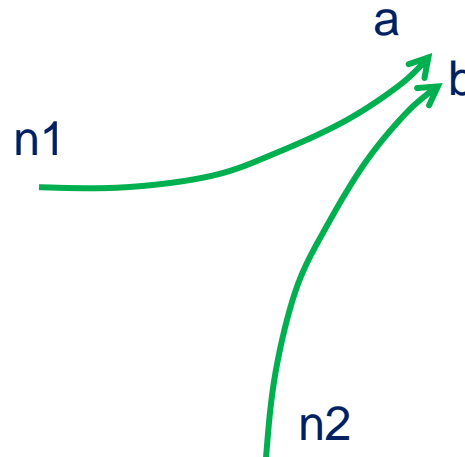
$$|f1af2b + f1bf2a|^2$$

• Fermions en D: $|f(\theta) - f(\pi-\theta)|^2$

$$a \approx b \Rightarrow P_2^{bosons} = 4|f_1 f_2|^2 = 2P_2^\neq$$

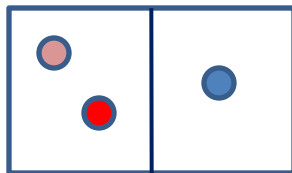
$$|f1af2b - f1bf2a|^2$$

$$a \approx b \Rightarrow P_2^{fermions} = 0 \quad \text{Pauli!}$$



Indiscernabilité: Fermions et bosons

2. Grégarité bosonique

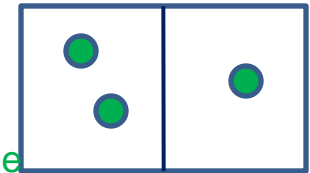


$\binom{N}{k}$ états distincts

somme des carrés des modules

1 seul état

carré du module de la somme



$$P^\neq(N)S^N = \sum_{k=0}^N \left[\binom{N}{k} P^\neq(k) \left(\frac{S}{2}\right)^k P^\neq(N-k) \left(\frac{S}{2}\right)^{N-k} \right]$$

$$P^\neq(N) = (P(1))^N$$

$$P^{bosons}(N)S^N = \sum_{k=0}^N \left[\binom{N}{k} A(k) \left(\frac{S}{2}\right)^{\frac{k}{2}} A(N-k) \left(\frac{S}{2}\right)^{\frac{N-k}{2}} \right]^2$$

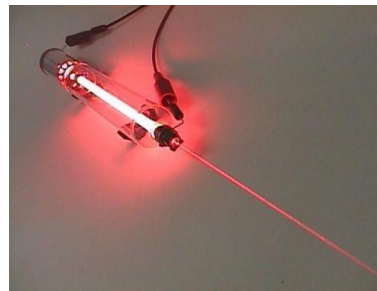
$$P^{bosons}(N) = N! (P(1))^N$$

• Équilibre thermique d'un mode de rayonnement:

$$N_{at,2} (\bar{n} + 1) P = N_{at,1} \bar{n} P$$

$$\varepsilon(\omega) = \frac{\hbar\omega}{\frac{\hbar\omega}{e^{kT}} - 1}$$

+comptage de modes



$$P^{bosons}(N+1) = (N+1)N! (P(1))^N (P(1)) = (N+1)P P^{bosons}(N)$$

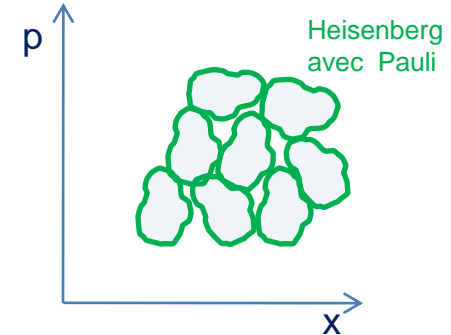
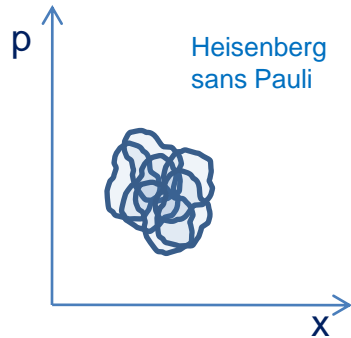
$$P(N \rightarrow N+1) = NP + P$$

induit spontané

$$P(N \rightarrow N-1) = NP \text{ (conjugaison)}$$

Indiscernabilité: Fermions et bosons

3. Pauli et la matière fermionique



Pour l'énergie cinétique minimale, tout se passe comme si chaque fermion disposait de (V/N) au lieu de V

$$L^3 = V$$

$$d^3 = (V/N)$$

$$\Delta p_{total} \Delta x_{total} \geq \hbar \Rightarrow (3D) \Delta p^3 V \geq \hbar^3$$

$$\Delta p_{total} \Delta x_{total} \geq N\hbar \Rightarrow (3D) \Delta p^3 V \geq N\hbar^3$$

$$E \approx N \frac{\hbar^2}{2mL^2} - N \frac{e^2}{d} = N \frac{\hbar^2}{2mL^2} - N \frac{4}{3} \frac{e^2}{L}$$

$$E \approx N \frac{\hbar^2}{2md^2} - N \frac{e^2}{d} = N \frac{5}{3} \frac{\hbar^2}{2mL^2} - N \frac{4}{3} \frac{e^2}{L}$$

$$L = a_0 N^{-1/3}$$

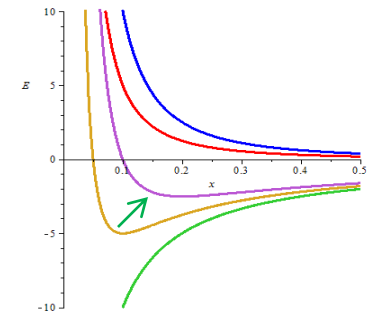
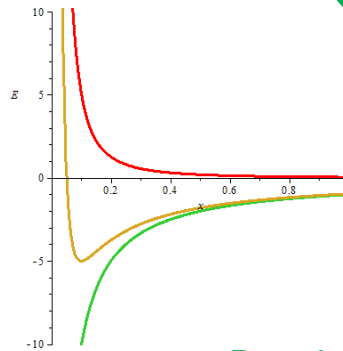
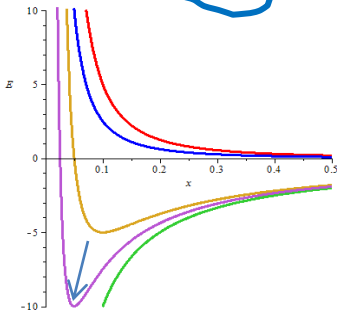
$$L = a_0 N^{1/3}$$

Effondrement!

- Densité indépendante de N
- Énergie proportionnelle à N

$$P_{confinement} = -\frac{dE_c}{dV} = \kappa \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{5}{3}}$$

Ordre de grandeur: qqes GPa comme module d'Young... (Weisskopf, AJP, 53(2), 1985)



Indiscernabilité: Fermions et bosons

3. Pauli et la matière fermionique

Taille d'un atome à Z électrons

$$E = \sum_{i=1}^Z \frac{p_i^2}{2m} - \sum_{i=1}^Z \frac{Ze^2}{r_i} + \sum_{i<j} \frac{e^2}{r_{ij}} \approx \frac{Zp^2}{2m} - \frac{Z^2 e^2}{2a_Z}$$

$$p \approx \hbar/a_Z$$

(cas des hydrogénoïdes)

$$a_Z \approx Z^{-1} a_1$$

$$p \approx Z^{1/3} \hbar/a_Z$$

$$a_Z \approx Z^{-1/3} a_1$$

- À grande échelle, rôle de la gravitation
- Pression de confinement dans des états fortement comprimés (naines blanches) (« pression de Fermi »)
-

Enseigner la mécanique quantique en CPGE: réforme 2013, une première étape

- Nécessité d'un ancrage concret pour les élèves → intérêt de l'approche ondulatoire
- Première approche des spécificités de la mécanique quantique → réflexion nécessaire sur la mesure à partir d'exemples simples → systèmes à deux niveaux
- Transversalité math/physique/chimie → première mise en place d'outils d'algèbre linéaire
- Préalable à cette nouvelle évolution: le retour d'une vraie filière scientifique au lycée...