Des chaînes de Markov en prépa ?

Roger Mansuy

Introduction

Pourquoi étudier les chaînes de Markov en prépa ?

- un sujet très proche d'autres problématiques du cours (réduction en algèbre linéaire, automates ou graphes en informatique...)
- une grande source de sujets de TIPE
- un moyen de développer les compétences de modélisation
- un moyen de sortir les probas d'une vision « calculatoire » de premier cycle
- un accès à des mathématiques du XX-ième siècle
- une continuité avec le programme de la spécialité mathématiques en terminale

Extrait du bulletin officiel spécial n°8 du 13 octobre 2011

Exemples de problèmes

Marche aléatoire simple sur un graphe à deux ou trois sommets.

Marche aléatoire sur un tétraèdre ou sur un graphe à N sommets avec saut direct possible d'un sommet à un autre : à chaque instant, le mobile peut suivre les arêtes du graphe probabiliste ou aller directement sur n'importe quel sommet avec une probabilité constante p .

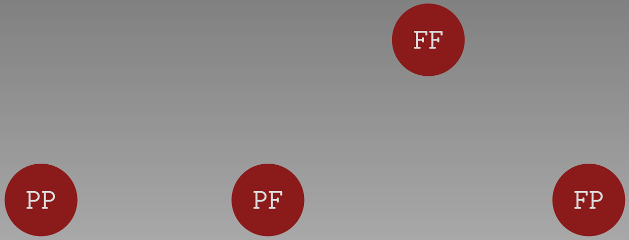
Etude du principe du calcul de la pertinence d'une page web.

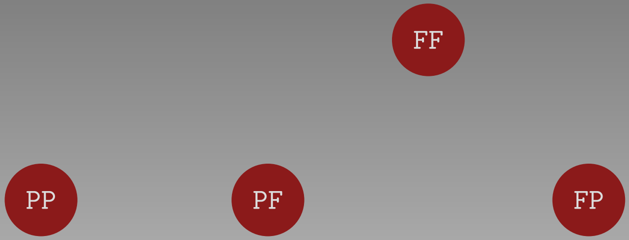
Modèle de diffusion d'Ehrenfest : N particules sont réparties dans deux récipients ; à chaque instant, une particule choisie au hasard change de récipient.

Considérons les lancers successifs d'une pièce équilibrée jusqu'à obtenir les résultats consécutifs FPP ou PPF.

- Si le motif FPP apparaît en premier, je suis gagnant.
- Si le motif PPF apparaît en premier, vous êtes gagnant.

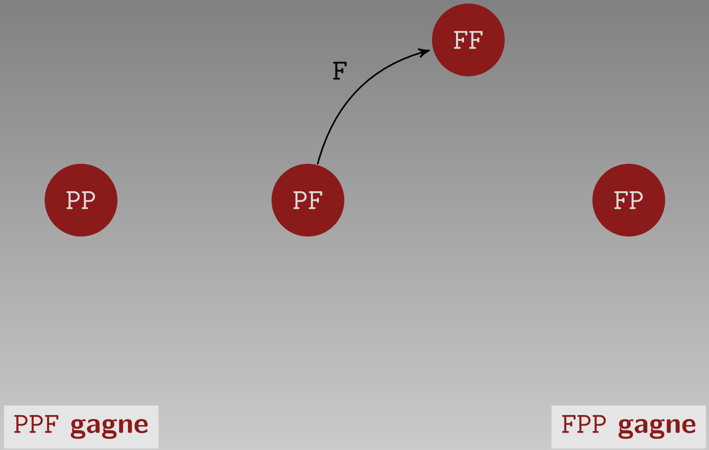
Acceptez vous de jouer avec moi ?

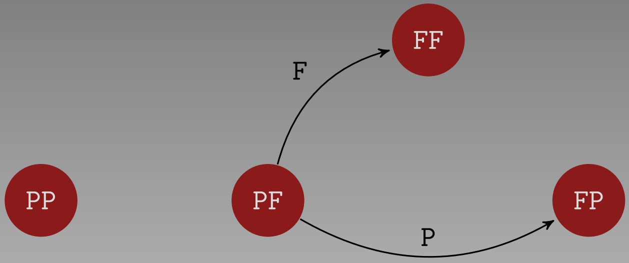

FF
PP
PF
FP



PPF **gagne**

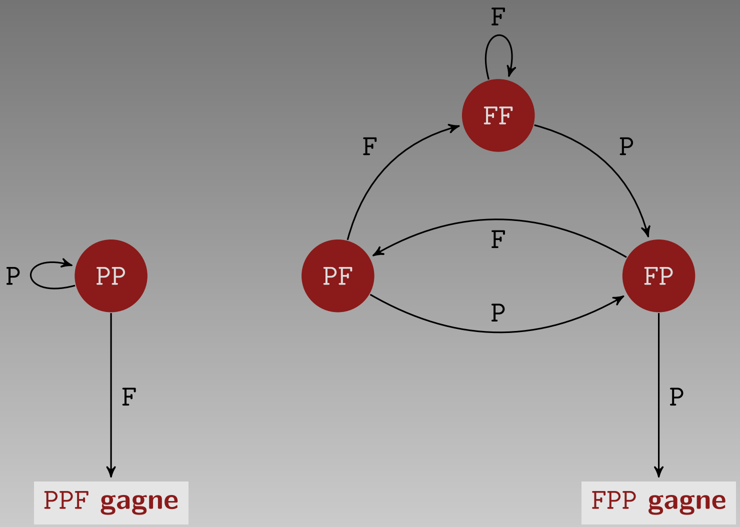
FPP **gagne**


FF
F
PP
PF
FP
PPF gagne
FPP gagne

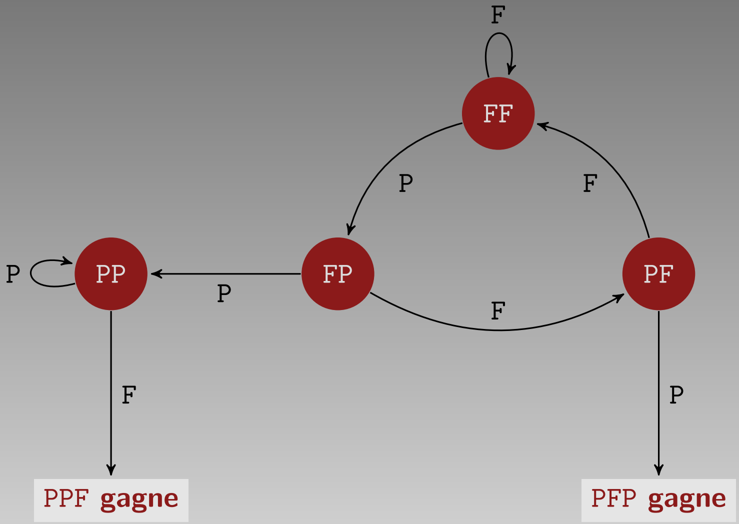


PPF **gagne**

FPP **gagne**

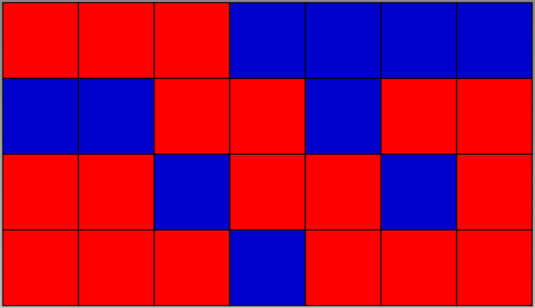

F
FF
F
P
F
PP
PF
FP
P
P
F
P
PPF gagne
FPP gagne

Avec les mots PFP et PPF, le graphe devient



On considère un « damier » dont les cases sont colorées en rouge ou en bleu. À chaque étape, une case est choisie uniformément et prend la couleur d'une de ses (au plus) quatre voisine. Quelle est la probabilité que le damier finisse entièrement rouge ?

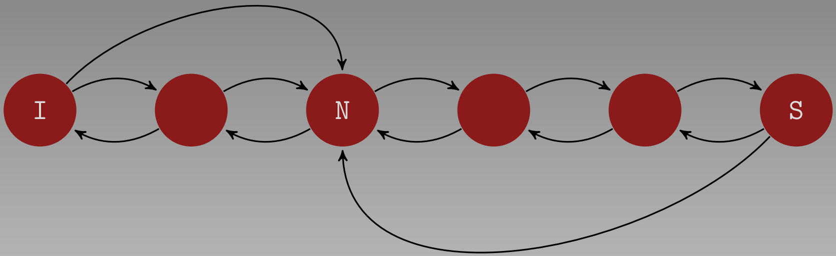
Cette fois le graphe compte 2^{mn} sommets qui correspondent à des configurations comme celle-ci :



Considérons le guichet d'une banque avec le fonctionnement suivant :

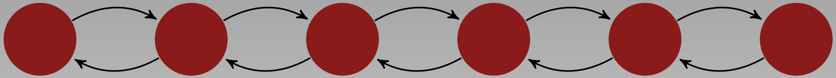
- chaque jour, le montant de liquidités en stock varie d'une unité (en positif ou en négatif) ;
- si le solde atteint le palier supérieur S, on effectue un transfert de fond pour se ramener à un solde normal N ;
- si le solde atteint le palier inférieur I, on effectue un transfert de fond pour se ramener à un solde normal N.

Existe-t-il une loi sur les entiers $[\![I, S]\!]$ stationnaire pour ce modèle ?


I
N
S

Simplifions cet exemple.

Considérons une marche aléatoire sur un segment d'entiers avec réflexion sur les bords.
Existe-t-il une loi stationnaire ?



On considère le système de communication avec un centre qui émet vers l'extérieur (l'émetteur international de Hawaï) et des émetteurs satellites qui émettent vers le centre (sur chacune des îles de l'archipel). À des instants synchronisés, les émetteurs satellites envoient ou pas un message vers l'émetteur central.

1. Si deux (ou plus) messages arrivent en même temps, ils sont rejetés.
2. Tout message rejeté est automatiquement réémis vers l'émetteur central jusqu'à son envoi avec une probabilité $p \in]0, 1[$.

Est ce que ce procédé de communication est stable ?

Programme

1. **Définitions, Exemples**
   Définition chaîne de Markov
   Matrice de transition
   Loi du n-ième terme
2. **Topologie de la matrice de transition**
   Relation d'équivalence de communication
   États absorbants
   Chaîne irréductible
3. **Analyse à un pas**
   Calcul de la probabilité d'absorbtion, du temps moyen avant absorbtion
4. **Analyse asymptotique**
   Loi stationnaire
   Période, chaîne apériodique
   Convergence vers la loi stationnaire

Définitions

Définition

Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ d'états $E = \{e_1, \dots, e_N\}$ telle que
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall y, y_0, \dots, y_n \in E,$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0 = y_0, \dots, X_n = y_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = y_n).$$

Elle est homogène si cette quantité ne dépend pas de n.

Une suite $(X_n)_n$ de variables indépendantes est une chaîne de Markov (à intérêt limité) puisque

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0 = y_0, \ldots, X_n = y_n) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = y), \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = y_n) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = y). \end{aligned}$$

Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables indépendantes identiquement distribuées. La suite

$$\left(X_n = \sum_{k=0}^{n} Y_k\right)_n$$

est une chaîne de Markov. En effet,
$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0 = y_0, \ldots, X_n = y_n)$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}(X_n + Y_{n+1} = y | X_0 = y_0, \ldots, X_n = y_n) \\ &= \mathbb{P}(y_n + Y_{n+1} = y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = y_n) &= \mathbb{P}(X_n + Y_{n+1} = y | X_n = y_n) \\ &= \mathbb{P}(y_n + Y_{n+1} = y). \end{aligned}$$

Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans F, X_0 une variable à valeur dans E indépendante de cette suite et $f : E \times F \to E$. La suite $(X_n)_n$ définie par la relation $X_{n+1} = f(X_n, Y_n)$ est une chaîne de Markov. En effet,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0 = y_0, \dots, X_n = y_n) \\
&\qquad = \mathbb{P}(f(y_n, Y_n) = y | X_0 = y_0, \dots, X_n = y_n) \\
&\qquad = \mathbb{P}(f(y_n, Y_n) = y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = y_n) &= \mathbb{P}(f(y_n, Y_n) = y | X_n = y_n) \\
&= \mathbb{P}(f(y_n, Y_n) = y).
\end{aligned}$$

Considérons une famille $(Y_{i,j})_{i,j}$ de variables aléatoires indépendantes, $X_0 \in \mathbb{N}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} Y_{n+1,k}.$$

Alors, la suite $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène. En effet

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0 = y_0, \ldots, X_n = y_n) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{y_n} Y_{n+1,k} = y\right).$$

Définition

La matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène $(X_n)_n$ dont les états sont $e_1, \dots, e_N$ est la matrice stochastique d'ordre N dont le coefficient en position (i, j) est

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = e_j | X_n = e_i).$$

Pour l'exemple du guichet de banque, la matrice de transition est

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition

Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov, d'états $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$, de matrice de transition A. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n

$$\nu_n = \left(\ \mathbb{P}(X_n = e_1), \quad \mathbb{P}(X_n = e_2), \quad \ldots, \quad \mathbb{P}(X_n = e_N) \ \right).$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\nu_{n+1} = \nu_n A$.

Démonstration

Il suffit d'appliquer la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = e_k)\mathbb{P}(X_n = e_k).$$

■

Proposition

Avec les mêmes notations, $\nu_n = \nu_0 A^n$.

Toujours avec la propriété de Markov.

Proposition

Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov d'états $E = \{e_1, \dots, e_N\}$ de matrice de transition A, $f : E \to \mathbb{R}_+$. Alors

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1})|X_0, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^{N} [A]_{X_n,j} f(e_j).$$

« Topologie » de la matrice de transition

Définition

Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov, d'états $E = \{e_1, \dots, e_N\}$.

- Un état $x \in E$ est absorbant si

$$\mathbb{P}(X_1 = x | X_0 = x) = 1.$$

- Une partie $A \subset E$ est fermée si

$$\mathbb{P}(X_1 \in A | X_0 \in A) = 1.$$

Pour le jeu de Penney, deux états sont absorbants (les états victorieux).
Pour l'automate cellulaire bicolore, les configurations monochromes sont absorbantes.

Définition

Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov, d'états $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

- L'état e_j est accessible depuis l'état e_i s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathbb{P}(X_p = e_j | X_0 = e_i) > 0.$$

- Les états e_i et e_j communiquent si e_j est accessible depuis e_i et e_i est accessible depuis e_j (relation d'équivalence).
- Une chaîne est irréductible si tous les états communiquent deux à deux (une seule classe d'équivalence pour la relation précédente).

La marche aléatoire réfléchie et le problème du guichet définissent des chaînes de Markov irréductibles.

Traduisons sur la matrice de transition ces définitions.

Proposition

Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov, d'états $E = \{e_1, \dots, e_N\}$ et de matrice de transition A.
L'état e_j est accessible depuis e_i s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $[A^p]_{i,j} > 0$.

Démonstration

Il suffit de remarquer $[A^p]_{i,j} = P(X_p = e_j | X_0 = e_i)$. ∎

Attention, deux classes peuvent être reliée par un arc.

Pour le protocole de transmission Aloha, si on suppose que la loi μ d'émission de nouveaux messages à chaque instant vérifie

$$0 < \mu_0 < 1, \qquad 0 < \mu_1 < 1,$$

alors la chaîne associée est irréductible. En effet, la matrice de transition vérifie

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} ip(1-p)^{i-1}\mu_0 & \text{si } j = i-1 \\ (1 - ip(1-p)^{i-1})\mu_0 + (1-p)^i\mu_1 & \text{si } j = i \\ (1-(1-p)^i)\mu_1 & \text{si } j = i+1 \\ \mu_{j-i} & \text{si } j \geq i+2 \end{cases}$$

Analyse à un pas

Idée générale

Pour calculer la probabilité d'absorbtion ou le temps moyen avant absorbtion, il suffit de se ramener à la résolution d'un système linéaire.

Analyse à un pas

Idée générale

Pour calculer la probabilité d'absorbtion ou le temps moyen avant absorbtion, il suffit de se ramener à la résolution d'un système linéaire.

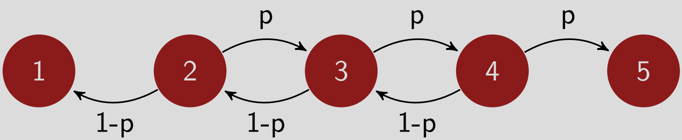
Considérons la fin d'un jeu au tennis entre deux joueurs (à partir de la situation `40A`).

Analyse à un pas

Idée générale

Pour calculer la probabilité d'absorbtion ou le temps moyen avant absorbtion, il suffit de se ramener à la résolution d'un système linéaire.

Considérons la fin d'un jeu au tennis entre deux joueurs (à partir de la situation `40A`). Le score suit alors la chaîne de Markov suivante



Notons p_i la probabilité que la partie se termine en l'état 1 depuis l'état i. Alors $p_1 = 1$, $p_5 = 0$ et pour $i \in [\![2, 4]\!]$,

$$p_i = p p_{i+1} + (1 - p) p_{i-1}.$$

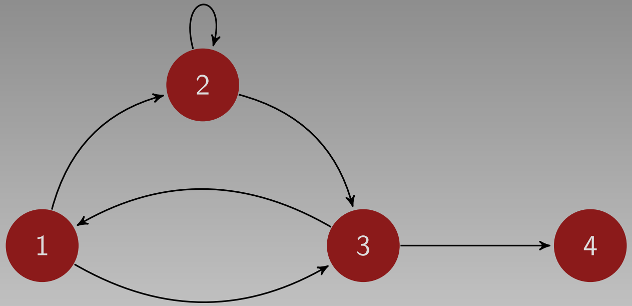
Notons p_i la probabilité que la partie se termine en l'état 1 depuis l'état i. Alors $p_1 = 1$, $p_5 = 0$ et pour $i \in [\![2, 4]\!]$,

$$p_i = pp_{i+1} + (1-p)p_{i-1}.$$

On résout le système et on trouve

$$\begin{aligned}
p_2 &= \frac{(1-p)(1-p(1-p))}{1-2p(1-p)},\\
p_3 &= \frac{(1-p)^2}{1-2p(1-p)},\\
p_4 &= \frac{(1-p)^3}{1-2p(1-p)}.
\end{aligned}$$

Reprenons maintenant le jeu de Penney avec les mots PPF et FPP conditionnellement à ce que les deux premiers lancers ne donnent pas PP.



En notant m_i le temps moyen avant absorbtion (par l'état 4) de la chaîne depuis l'état i. On trouve $m_4 = 0$ et,

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_3 + 1 \\ m_2 &= \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_3 + 1 \\ m_3 &= \frac{1}{2}m_4 + \frac{1}{2}m_1 + 1 \end{aligned}$$

En notant m_i le temps moyen avant absorbtion (par l'état 4) de la chaîne depuis l'état i. On trouve $m_4 = 0$ et,

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_3 + 1 \\ m_2 &= \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_3 + 1 \\ m_3 &= \frac{1}{2}m_4 + \frac{1}{2}m_1 + 1 \end{aligned}$$

Après résolution, on obtient

$$m_1 = 7,\ m_2 = 7,\ m_3 = 5.$$

Analyse asymptotique

Définition

Soit $(X_n)_n$ de matrice d'états E. Un état $y \in E$ est

- récurrent positif si le temps de retour en y partant de y est fini p.s. et d'espérance finie,
- récurrent nul si le temps de retour en y partant de y est fini p.s. mais que son espérance est infinie,
- transient sinon.

Proposition

Deux états qui communiquent sont de même nature.

Remarque

Les chaînes de Markov irréductibles finies sont toujours récurrentes positives.

Définition

Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov. Une loi stationnaire μ est stationnaire si, lorsque $X_0 \sim \mu$, on a $X_1 \sim \mu$. Dans le cas fini, en identifiant μ à son vecteur ligne et en notant A la matrice de transition, cela équivaut à $\mu = \mu A$.

Remarque

Une loi stationnaire est donc un vecteur propre à gauche de la matrice de transition associé à 1, à coordonnées positives et de somme égale à 1.

Proposition

Une chaîne de Markov irréductible est récurrente positive si et seulement si elle admet une loi stationnaire.

Proposition

Soit A une matrice stochastique à coefficients strictement positifs. Alors il existe μ un vecteur ligne positif à coordonnées positives et de somme égale à 1 tel que $(A^n)_n$ converge vers M la matrice dont toutes les lignes sont μ.

Démonstration

Notons $\delta(y)$ l'amplitude d'un vecteur y, c'est-à-dire la différence entre sa plus grande coordonnée et sa plus petite et $d > 0$ la plus petite coordonnée de A. Alors, on vérifie que, pour tout vecteur y, $\delta(Ay) \leq (1 - 2d)\delta(y)$ et donc $(\delta(A^n y))_n$ est de limite nulle. Ceci entraîne que chaque colonne de $(A^n)_n$ converge vers une colonne constante à coordonnées positives : ceci définit le vecteur μ. Il est évident que μ est de somme 1 en considérant le vecteur y dont toutes les coordonnées sont égales à 1. ∎

Proposition

Avec les mêmes notations, $\mu A = \mu$ et s'il existe un vecteur v tel que $vA = v$, alors v est colinéaire à μ.

Démonstration

Le premier point résulte du passage à la limite dans la relation $A^{n+1} = A^n A$.

Pour le second remarquons que $v = vA$ entraîne $v = vM = a\mu$ en notant a le somme des coordonnées de v. ∎

Proposition

Avec les mêmes notations, pour toute loi ν, $(\nu A^n)_n$ converge vers μ. Ainsi, pour une chaîne de Markov associée à A,

$$\lim \mathbb{P}(X_n = e_j) = \mu_j.$$

Les preuves suivantes se généralisent sans peine au cas où la matrice A admet un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que A^r est à coefficients strictement positifs. Pour passer au cas général, on utilise le lemme suivant.

Lemme

Soit A stochastique irréductible. Alors la matrice $\widetilde{A} = \frac{1}{2}(I_n + A)$ admet un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $\widetilde{A}^r$ est à coefficients strictement positifs. De plus, A et $\widetilde{A}$ admettent les mêmes vecteurs propres à gauche associé à 1.

Remarque

Ainsi, toute matrice stochastique irréductible admet une loi invariante et tout autre vecteur propre à gauche associé à 1 est proportionnel à cette loi. Malheureusement, on n'a plus la convergence de $(A^n)_n$ comme on peut le voir avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration

- Soit $x \in \operatorname{Ker}(I_n - A + M)$. Alors $0 = \mu(I_n - A + M)x = (\mu - \mu + \mu)x = \mu x$. Mais alors, $Mx = 0$ et $x = Ax$ ce qui entraîne x constant d'après un calcul déjà effectué. La condition $\mu x = 0$ implique en conclusion $x = 0$. D'où $I_n - A + M$ est inversible.

Démonstration

- Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(I_n - A + M)$. Alors $0 = \mu(I_n - A + M)x = (\mu - \mu + \mu)x = \mu x$. Mais alors, $Mx = 0$ et $x = Ax$ ce qui entraîne x constant d'après un calcul déjà effectué. La condition $\mu x = 0$ implique en conclusion $x = 0$. D'où $I_n - A + M$ est inversible.
- Remarquons que $(I_n + A + \ldots + A^{n-1})(I_n - A + M) = I - A^n + nM$ et $M(I_n - A + M) = M$. Par conséquent,

$$\frac{1}{n}(I_n + A + \ldots + A^{n-1}) = \frac{1}{n}(I - A^n) + M \to M.$$

$\blacksquare$

Proposition

Soit $(X_n)_n$ une chaîne finie de loi invariante μ. Alors

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = e_j) = \mu_j .$$

Définition

Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov d'états $E = \{e_1, \dots, e_N\}$ et de matrice de transition A. La période de l'état e_i est

$$\mathrm{pgcd}\{k \geq 1,\ [A]_{i,i} \neq 0\}$$

avec la convention ∞ si l'ensemble est vide.

Proposition

Deux états qui communiquent ont la même période.

Par conséquent, on peut parler de la période d'une chaîne de Markov irréductible.

Démonstration

Soit A la matrice de transition, e_i et e_j deux états qui communiquent : il existe des entiers p et q tels que $[A^p]_{i,j} > 0$ et $[A^q]_{j,i} > 0$.
Alors, pour tout entier r tel que $[A^r]_{i,i} > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$[A^{p+q+rn}]_{i,i} \geq [A^p]_{i,j}[A^r]_{i,i}^n[A^q]_{j,i} > 0.$$

Ainsi, la période de e_i divise tous les entiers r tel que $[A^r]_{i,i} > 0$ donc la période de e_j.
Par symétrie, les deux périodes sont égales. ■

- La marche aléatoire réfléchie est de période 2 (en fait, on remarque que le graphe est bipartite).
- La chaîne associée au guichet de banque est de période 2 si $S - N = N - I[2] = 1[2]$, 1 sinon.

Définition

Une chaîne apériodique est une chaîne irréductible de période 1.

Proposition

Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov apériodique d'états $E = \{e_1, \dots, e_N\}$ et de matrice de transition A. Alors, pour tout e_i, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$[A^n]_{i,i} > 0.$$

Proposition

Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov irréductible d'états $E = \{e_1, \dots, e_N\}$ et de matrice de transition A. Il y a équivalence entre

- A est apériodique,
- il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$ et tout (i, j)

$$[A^n]_{i,j} > 0.$$

Par conséquent, $(A^n)_n$ converge vers la matrice M déjà étudiée.

Références

- Paolo Baldi, Laurent Mazliak, Pierre Priouret, Martingales et chaînes de Markov, Hermann, 2001.
- Pierre Brémaud, *Markov chains*, Springer, TAM 31, 1999.
- Arthur Engel, Processus Aléatoires pour les débutants, Cassini, 2011.
- Jean-François Le Gall, Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires, polycopié FIMFA, 2006.
- E. Seneta, *Non-negative Matrices and Markov Chains*, Springer, 1980.
- Bernard Ycart, Modèles et algorithmes markoviens, Springer-SMAI, 2002.