

Méthodes haute-résolution en analyse spectrale et localisation

Yves Grenier

TELECOM ParisTech

Novembre 2012

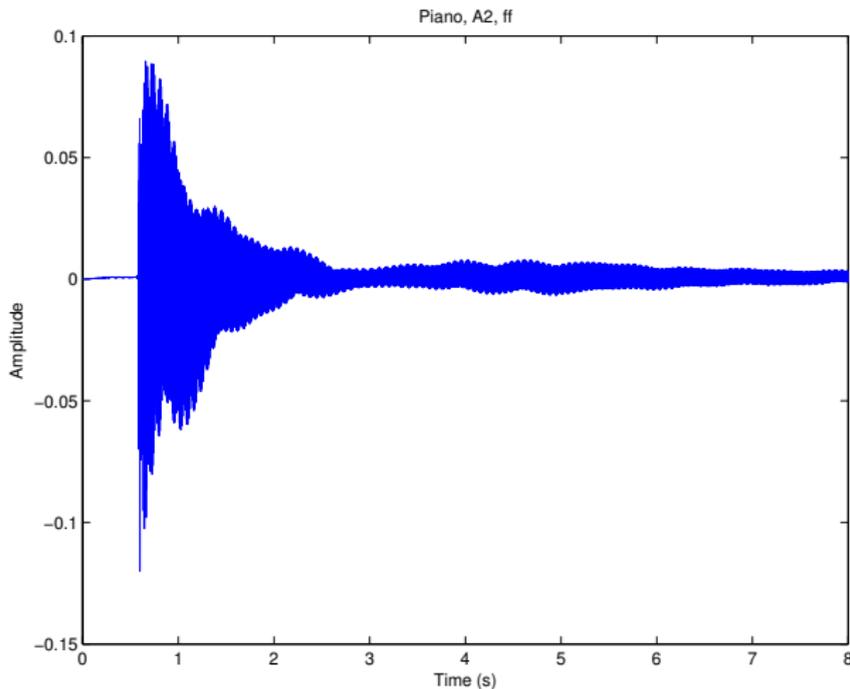
Plan

- 1 Estimation de raies spectrales
- 2 Localisation de sources
- 3 Vers la super resolution
- 4 Robustesse

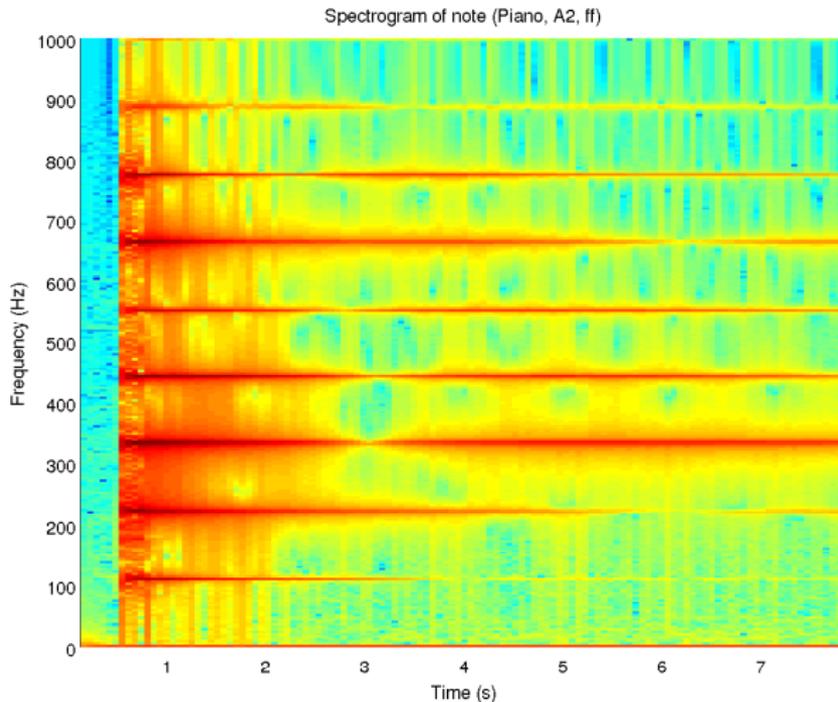
Une première formalisation

L'estimation de raies spectrales

Un exemple de signal (note de piano, la2)



Représentation temps-fréquence de cette note



Sommes de sinusoides

Signal représenté comme somme de sinusoides amorties :

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=1}^N \tilde{A}_k e^{-\beta_k t} \sin(2\pi f_k t + \varphi_k)$$

L'amortissement peut être négligé si la fenêtre d'analyse est courte.
On travaille dans \mathbb{C} :

$$\tilde{y}(t) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^N A_k e^{j2\pi f_k t} \right)$$

Puis si $y(t)$ est la transformée de Hilbert de $\tilde{y}(t)$:

$$y(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{j2\pi f_k t}$$

Échantillonnage du signal

Remplacer le signal à temps continu $y(t)$ par le signal à temps discret y_n :

$$y_n = y(nT)$$

Période d'échantillonnage T , fréquence d'échantillonnage $F_e = 1/T$.

Théorème

Théorème de Shannon : si le signal à temps continu $y(t)$ a une transformée de Fourier à support borné ($\exists B : Y(f) = 0 \forall f \text{ t.q } |f| >= B$) alors il peut être reconstruit parfaitement à partir de $\{y_n\}$ si $F_e >= 2B$.

$$y(t) \rightarrow Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad y_n \rightarrow \tilde{Y}(\tilde{f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n e^{-j2\pi \tilde{f} n}$$

$$\tilde{f} = \frac{f}{F_e}$$

Signaux aléatoires

Variable aléatoire $X : \omega \rightarrow x(\omega)$, densité de probabilité $p(x)$ t.q. :

$$\text{Prob}(x \in B) = \int_B p(x) dx$$

Espérance mathématique :

$$E(f(x)) = \int f(x)p(x) dx$$

Considérer le signal $\{y_n\}$ comme une réalisation particulière du signal aléatoire $\{y_n(\omega)\}$, caractérisé par :

$$p(y_{n_1}, y_{n_2}, \dots, y_{n_K}), \forall K > 0, \forall n_1, \forall n_2, \dots, \forall n_K$$

Pour un signal aléatoire du second ordre, $E(y_n)$ et $E(y_n y_{n'})$.

Stationarité (moyenne, autocorrélation) :

$$E(y_n) = \mu, \quad E((y_n - \mu)(y_{n'} - \mu)) = R_{yy}(n - n')$$

Densité spectrale de puissance

Définie comme la transformée de Fourier de l'autocorrélation R_{yy} :

$$R_{yy}(n) = E(y_t y_{t+n}) \rightarrow S_{yy}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{yy}(n) e^{-j2\pi fn}$$

Exemple pour une sinusoïde :

$$y_n = A \sin(2\pi f_0 n + \varphi(\omega)) \quad (\varphi(\omega) \text{ uniforme sur } [0, 2\pi])$$

$$R_{yy}(n) = A^2 \cos(2\pi f_0 n)$$

$$S_{yy}(f) = A^2 [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

Résolution fréquentielle

Sinusoïde observée sur une durée T :

$$\tilde{y}_n = y_n \times 1_{[0, T-1]} \Rightarrow S_{\tilde{y}\tilde{y}}(n) = S_{yy}(n) * |T.F.(1_{[0, T-1]})|^2$$

$$S_{\tilde{y}\tilde{y}}(n) = A^2 \left| \frac{\sin(\pi T(f - f_0))}{T \sin(\pi(f - f_0))} \right|^2$$

Si y est la somme de deux sinusoides indépendantes à f_1 et f_2 :

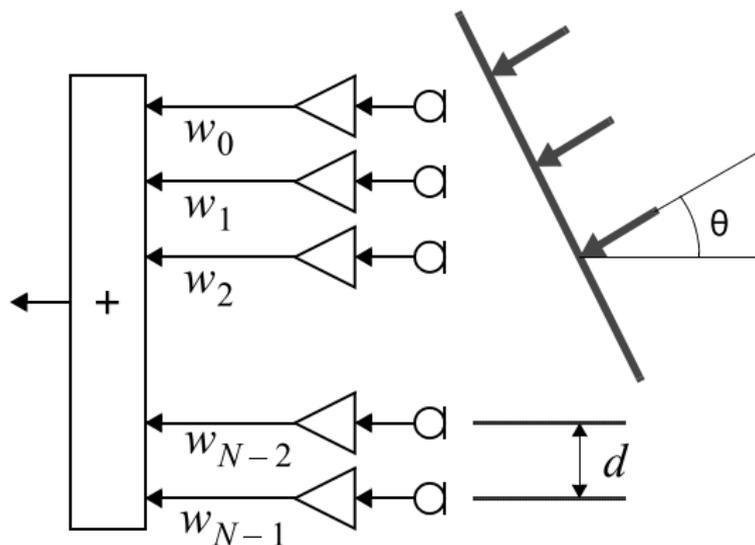
$$S_{\tilde{y}\tilde{y}}(n) = A_1^2 \left| \frac{\sin(\pi T(f - f_1))}{T \sin(\pi(f - f_1))} \right|^2 + A_2^2 \left| \frac{\sin(\pi T(f - f_2))}{T \sin(\pi(f - f_2))} \right|^2$$

Un écart minimal entre f_1 et f_2 est nécessaire pour distinguer les deux sinusoides (approximativement $|f_1 - f_2| > 1/T$)

Une seconde formalisation

Localisation de sources ponctuelles par un réseau de capteurs

Antenne linéaire uniforme



Antenne monochromatique en champ lointain

Problèmes du traitement d'antenne

- 1 focaliser la réception dans une direction choisie de façon à rehausser le niveau du signal d'intérêt et à rejeter les brouilleurs,
- 2 focaliser l'émission dans une direction choisie de façon à minimiser les interférences dans les secteurs voisins,
- 3 estimer les directions d'arrivée (azimut, élévation) des sources reçues sur un réseau de capteurs.

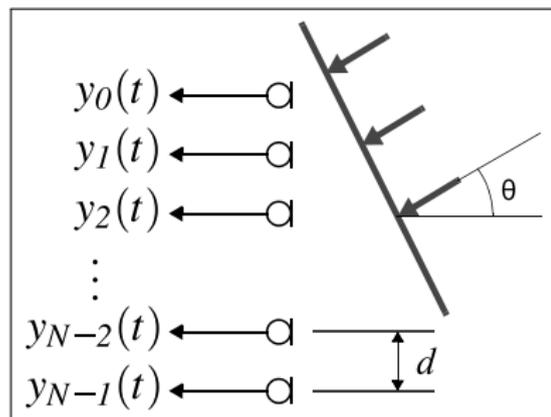
Les deux techniques utilisées sont :

- 1 formation de voie (en réception ou en émission)
- 2 localisation de sources

Applications du traitement d'antenne :

- 1 astronomie (VLT),
- 2 communications sans fil,
- 3 guerre électronique,
- 4 réseaux de microphones,
- 5 imagerie médicale,
- 6 études géologiques, sismique, etc.

Angles et retards



Signaux reçus ;

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \\ \vdots \\ y_{N-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(t) \\ s(t - \tau_1) \\ \vdots \\ s(t - \tau_n) \\ \vdots \\ s(t - \tau_{N-1}) \end{bmatrix}$$

$$\tau_n = n \frac{d}{C} \sin(\theta)$$

Hypothèse bande étroite

Dans l'hypothèse d'un signal $s(t)$ à bande étroite :

$$s(t) = \alpha(t)e^{j2\pi f_0 t}$$

Enveloppe complexe $\alpha(t)$, porteuse f_0 . On aura pour tout n ($\tau_0 = 0$) :

$$\alpha(t - \tau_n) \simeq \alpha(t)$$

$$\begin{bmatrix} s(t) \\ s(t - \tau_1) \\ \vdots \\ s(t - \tau_n) \\ \vdots \\ s(t - \tau_{N-1}) \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \alpha(t)e^{j2\pi f_0(t-\tau_0)} \\ \alpha(t)e^{j2\pi f_0(t-\tau_1)} \\ \vdots \\ \alpha(t)e^{j2\pi f_0(t-\tau_n)} \\ \vdots \\ \alpha(t)e^{j2\pi f_0(t-\tau_{N-1})} \end{bmatrix} \simeq \alpha(t)e^{j2\pi f_0 t} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j2\pi f_0 \tau_1} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi f_0 \tau_n} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi f_0 \tau_{N-1}} \end{bmatrix}$$

Variété d'antenne

Avec l'expression du retard,

$$\tau_n = n \frac{d}{c} \sin(\theta)$$

le vecteur des signaux reçus devient

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j2\pi f_0 \frac{d}{c} \sin(\theta)} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi f_0 n \frac{d}{c} \sin(\theta)} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi f_0 (N-1) \frac{d}{c} \sin(\theta)} \end{bmatrix} \alpha(t) e^{j2\pi f_0 t} = a(\theta) s(t)$$

Le vecteur $a(\theta)$ est appelé "vecteur directionnel" (steering vector).
L'ensemble $\{a(\theta), \theta \in [-\pi/2, +\pi/2]\}$ est appelé "variété d'antenne"
(array manifold).

Signaux après échantillonnage

Pour une source unique et pour $t \in \mathbb{Z}$:

$$Y_t = a(\theta)s_t + b_t$$

Pour K sources, $\Theta = [\theta_1 \theta_2 \dots \theta_K]^T$:

$$Y_t = A s_t + b_t$$

où

$$A = [a(\theta_1) \ a(\theta_2) \ \dots \ a(\theta_K)] \quad s_t = [s_{1,t} \ s_{2,t} \ \dots \ s_{K,t}]^T$$

Le vecteur b_t , de dimension $N \times 1$ représente l'enveloppe complexe du bruit sur les N capteurs.

Dimensions : $Y_t \leftrightarrow (N \times 1)$, $A \leftrightarrow (N \times K)$, $s_t \leftrightarrow (K \times 1)$, $b_t \leftrightarrow (N \times 1)$.

Localisation ou somme de sinusôides ?

La suite des coefficients d'un vecteur directionnel est celle des échantillons d'une sinusoïde :

$$a(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j2\pi f_0 \frac{d}{c} \sin(\theta)} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi f_0 n \frac{d}{c} \sin(\theta)} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi f_0 (N-1) \frac{d}{c} \sin(\theta)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j2\pi \nu_\theta} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi \nu_\theta n} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi \nu_\theta (N-1)} \end{bmatrix}$$
$$\nu_\theta = f_0 \frac{d}{c} \sin \theta = \frac{d}{\lambda} \sin \theta$$

où λ est la longueur d'onde, et ν_θ est la fréquence spatiale.

Deux formalisations

Dans les deux cas présentés :

- 1 l'estimation de raies spectrales,
- 2 la localisation de sources ponctuelles,

le problème devient celui d'estimer les fréquences en disposant d'un nombre réduit d'échantillons.

Comment parvenir à dépasser la limite de résolution imposée par la transformée de Fourier ?

Nous considérerons le problème de la localisation et supposerons que :

- 1 le nombre K des sources est connu,
- 2 il y a moins de sources que de capteurs ($K < M$)

Modèles

Reprenons l'équation : $Y_t = A s_t + b_t$

Le signal s_t est un processus aléatoire gaussien complexe, centré, de covariance

$$E(s_t s_{t'}^H) = R_{ss} \delta_{t,t'}$$

Le bruit b_n est supposé, gaussien complexe, centré, blanc.

$$E(b_n) = 0, \quad E(b_n b_{n'}^H) = \sigma_b^2 I \delta_{n,n'}$$

On suppose que, pour tout couple (t, t') , b_t et $s_{t'}$ sont indépendants.
On en déduit que Y_t est gaussien complexe, centré, de covariance :

$$R_{YY} = E(Y_t Y_t^H) = A R_{ss} A^H + \sigma_b^2 I$$

Avec T tirs (snapshots), la covariance empirique sera :

$$\hat{R}_{YY} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t Y_t^H$$

Localisation par formation de voie

Utiliser une formation de voies (filtrage spatial) et balayer l'ensemble des directions possibles \iff rechercher les maxima de la fonction $J(\theta)$:

$$J(\theta) = \sum_{t=1}^T |w^H(\theta) Y_t|^2$$

Notons que $E(J(\theta)) = w^H R_{YY} w$ où $R_{YY} = E(Y_t Y_t^H)$.

Essentiellement deux méthodes :

- 1 la formation de voie classique qui ne prend pas en compte les données,
- 2 la formation de voie dépendant des données (MVDR).

En pratique R_{YY} est remplacé par \hat{R}_{YY} estimé à partir d'une suite de T observations.

Méthode de Bartlett (1/2)

Choisir $w(\theta)$ qui maximise $w^H R_{YY} w$ sous contrainte que $w^H w = 1$. On en déduit que w est le vecteur propre de R_{YY} associé à la plus grande valeur propre.

Dans le cas d'une source unique on a :

$$Y_t = a s_t + b_t$$
$$\implies R_{YY} = E(Y_t Y_t^H) = \sigma_s^2 a a^H + \sigma_b^2 I$$

Le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre est $a(\theta)$:

$$w = \frac{1}{\sqrt{a^H(\theta) a(\theta)}} a(\theta)$$

Le choix de w ne dépend pas des observations.

Méthode de Bartlett (2/2)

Pour localiser les sources, on cherchera le maximum de la fonction $J(\theta)$:

$$J(\theta) = \frac{1}{a^H(\theta)a(\theta)} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^T |a^H(\theta)Y_t|^2$$

Connaissant la matrice de covariance spatiale, cela donne :

$$J(\theta) = \frac{1}{N^2} a^H(\theta) \hat{R}_{YY} a(\theta)$$

Méthode de Capon, MVDR

La méthode de Capon ou formation de voie MVDR prend en compte les observations. Elle minimise $w(\theta)R_{YY}w(\theta)$ sous la contrainte $w(\theta)^H a(\theta) = 1$:

$$w(\theta) = \frac{1}{a(\theta)^H R_{YY}^{-1} a(\theta)} R_{YY}^{-1} a(\theta)$$

La valeur de la fonction de localisation devient :

$$J(\theta) = \frac{1}{a(\theta)^H R_{YY}^{-1} a(\theta)}$$

En remplaçant R_{YY} par \hat{R}_{YY} , il vient :

$$J(\theta) = \frac{1}{a(\theta)^H \hat{R}_{YY}^{-1} a(\theta)}$$

Structure de la matrice de covariance

La matrice de covariance admet deux décompositions :

$$R_{YY} = E(Y_t Y_t^H) = AR_{SS}A^H + \sigma_b^2 I = U_s \Lambda_s U_s^H + \sigma_b^2 U_b U_b^H$$

Si les sources sont indépendantes, R_{SS} est de rang K , on en déduit que :

- 1 $\text{span}\{u_{s,1} \cdots u_{s,K}\} = \text{span}\{(AR_{SS})_1 \cdots (AR_{SS})_K\} \subseteq \text{span}\{a(\theta_1) \cdots a(\theta_K)\}$,
- 2 $\mathcal{S} = \text{span}\{a(\theta_1) \cdots a(\theta_K)\}$ est appelé le *sous-espace-signal* ;
- 3 U_b est de dimension $N \times (N - K)$ et $\Pi_b = U_b U_b^H$ est un projecteur orthogonal défini sur \mathbb{C}^N et à valeurs dans un sous-espace de dimension $(N - R)$ appelé le *sous-espace-bruit*,
- 4 $\Pi_s \Pi_b = 0$,
- 5 $\Lambda_s > \sigma_b^2 I_K$.

MUSIC (1/2)

Dans le cas où R_{ss} est de rang plein K , le sous-espace engendré par $U_s = [u_{s,1} \cdots u_{s,K}]$ coïncide avec le sous-espace engendré par A , ce qui s'écrit :

$$\text{span}\{u_{s,1} \cdots u_{s,K}\} = \text{span}\{a(\theta_1) \cdots a(\theta_K)\}$$

Par conséquent

$$\Pi_A \Pi_b = 0$$

où $\Pi_A = A(A^H A)^{-1} A^H$ et $\Pi_b = U_b U_b^H$.

Si A et U_s engendrent le même sous-espace, il existe une matrice P telle que :

$$U_s = AP$$

MUSIC (2/2)

Si on connaît l'espace-bruit, on peut alors chercher les directions d'arrivée telles que leur vecteur directionnel est orthogonal au sous-espace bruit :

$$u_B^H a(\theta) = 0$$

où u_B désigne un vecteur de l'espace-bruit.

Plutôt que minimiser ces quantités, on maximisera leur inverse :

$$J(\theta) = \frac{1}{a(\theta)^H \Pi_b a(\theta)} = \frac{1}{a(\theta)^H U_b U_b^H a(\theta)}$$

ESPRIT, décomposition en sous-antennes

ESPRIT : Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariant Techniques

Décomposition de l'antenne en deux sous-antennes de même taille :

$$\left. \begin{aligned}
 a(\theta) &= \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j2\pi\nu\theta} \\ \vdots \\ e^{j2\pi\nu\theta(N-2)} \\ e^{j2\pi\nu\theta(N-1)} \end{bmatrix} \\
 a_1(\theta) &= \begin{bmatrix} I_{N-1} & 0 \end{bmatrix} a(\theta) \\
 a_2(\theta) &= \begin{bmatrix} 0 & I_{N-1} \end{bmatrix} a(\theta)
 \end{aligned} \right\} \implies a_2(\theta) = a_1(\theta) e^{j2\pi\nu\theta}$$

Pour K sources

$$A_1 = \begin{bmatrix} I_{N-1} & 0 \end{bmatrix} A \text{ et } A_2 = \begin{bmatrix} 0 & I_{N-1} \end{bmatrix} A \implies A_2 = A_1 \Omega$$

$$\Omega = \text{diag}(e^{j2\pi\nu\theta_1}, \dots, e^{j2\pi\nu\theta_K})$$

ESPRIT, décomposition du sous-espace signal

De même que $A_2 = A_1 \Omega$ avec $\Omega = \text{diag}(e^{j2\pi\nu\theta_1}, \dots, e^{j2\pi\nu\theta_K})$,
décomposons U_s :

$$V_1 = \begin{bmatrix} I_{N-1} & 0 \end{bmatrix} U_s \quad \text{et} \quad V_2 = \begin{bmatrix} 0 & I_{N-1} \end{bmatrix} U_s$$

On a vu qu'il existe P tel que $U_s = AP$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} V_1 &= \begin{bmatrix} I_{N-1} & 0 \end{bmatrix} AP = A_1 P \\ V_2 &= \begin{bmatrix} 0 & I_{N-1} \end{bmatrix} AP = A_2 P = A_1 \Omega P \\ \implies V_2 &= V_1 P^{-1} \Omega P \\ \implies (V_1^H V_1)^{-1} V_1^H V_2 &= P^{-1} \Omega P \end{aligned}$$

Les matrices Ω et $V_1^\# V_2$ sont semblables ($V_1^\# = (V_1^H V_1)^{-1} V_1^H$ est la pseudo-inverse de V_1) : elles ont mêmes valeurs propres.

ESPRIT : résumé de l'algorithme

- 1 estimer la matrice de covariance R_{YY} ,
- 2 diagonaliser la matrice R_{YY} ,
- 3 former U_s avec les K vecteurs propres associés aux K plus grandes valeurs propres,
- 4 extraire de U_s les matrices V_1 et V_2 ,
- 5 diagonaliser $V_1^\# V_2$, les valeurs propres sont les $e^{j2\pi\nu_k}$.

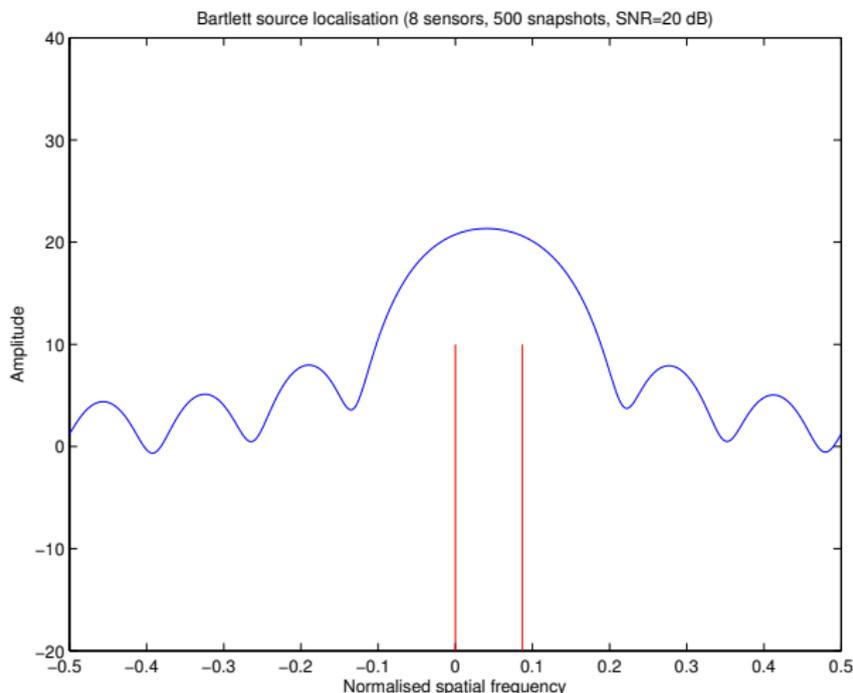
Avantages : facile à calculer (pas de recherche de maxima), ne nécessite pas une procédure de calibration de la réponse d'antenne $a(\theta)$.

Inconvénients : nécessite des géométries particulières d'antennes (par exemple linéaire uniforme), nécessite que les deux sous-antennes soient parfaitement identiques.

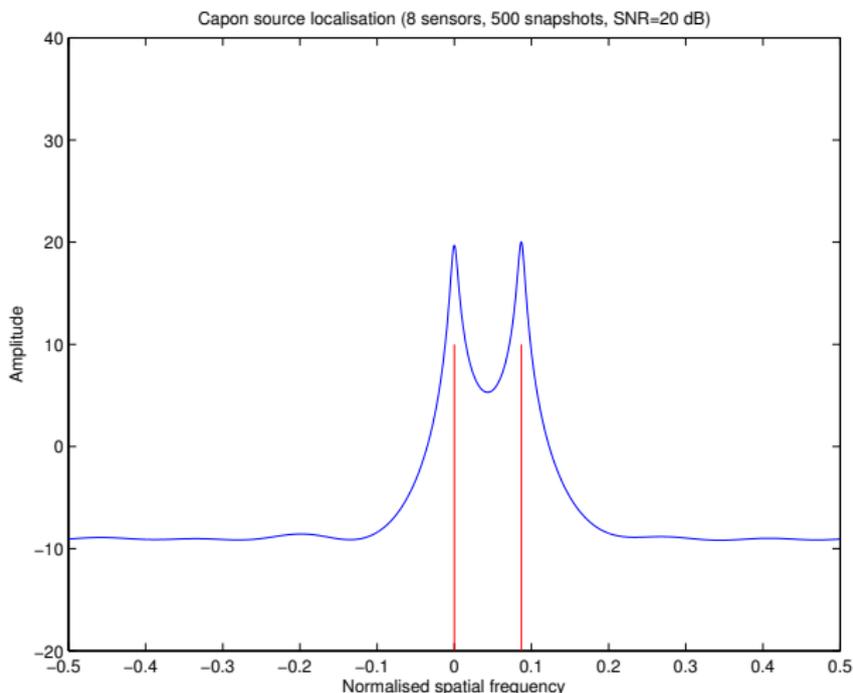
Robustesse au bruit

Comment les méthodes résistent-elles au bruit ?

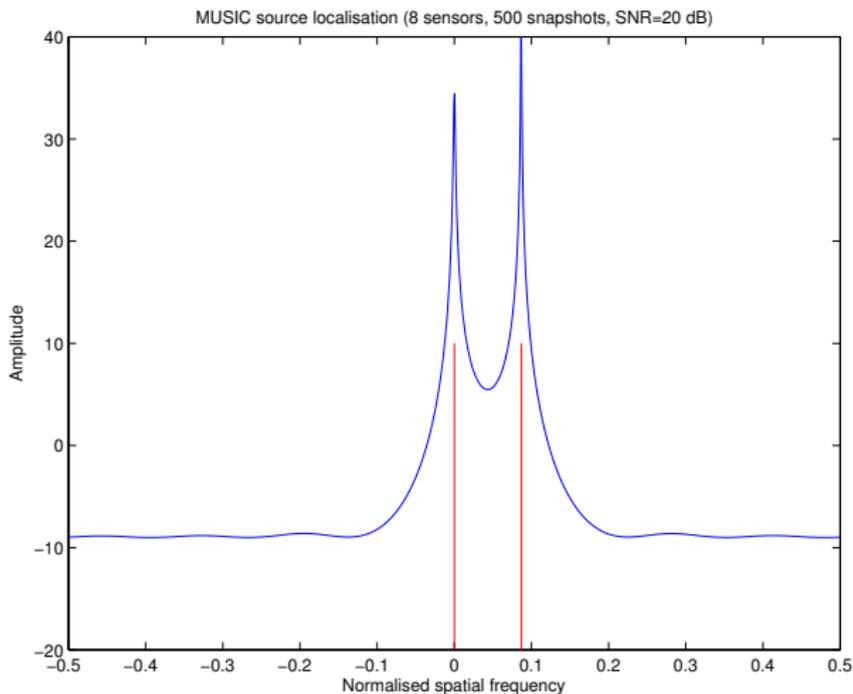
Méthode de Bartlett, deux sources, SNR=+20 dB



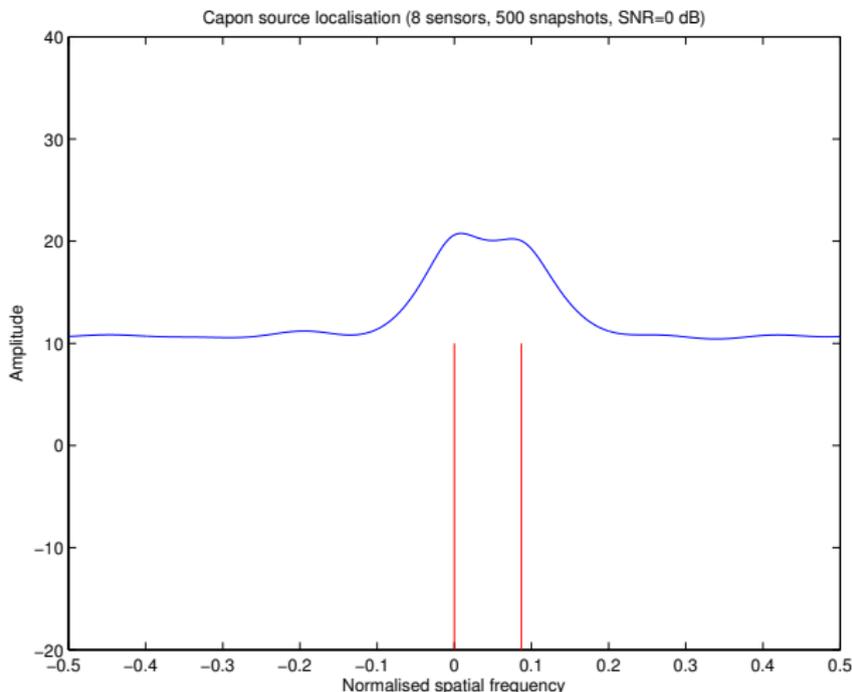
Méthode de Capon, deux sources, SNR=+20 dB



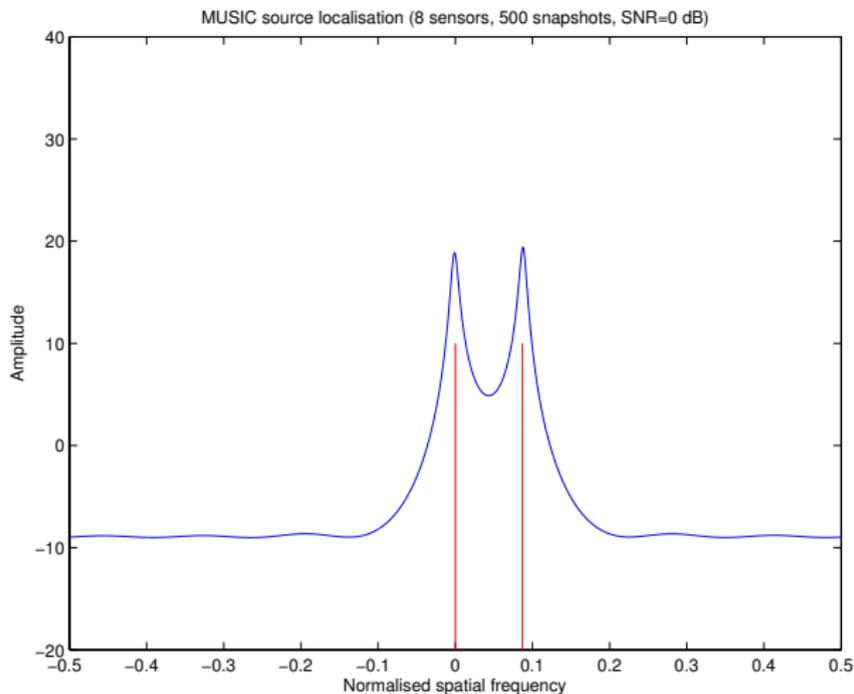
Méthode MUSIC, deux sources, SNR=+20 dB



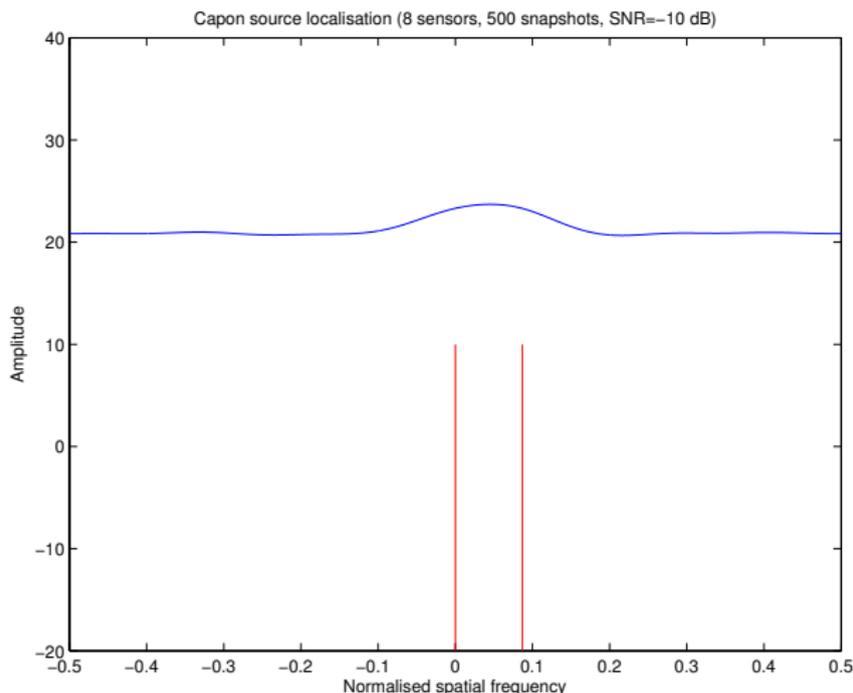
Méthode de Capon, deux sources, SNR=0 dB



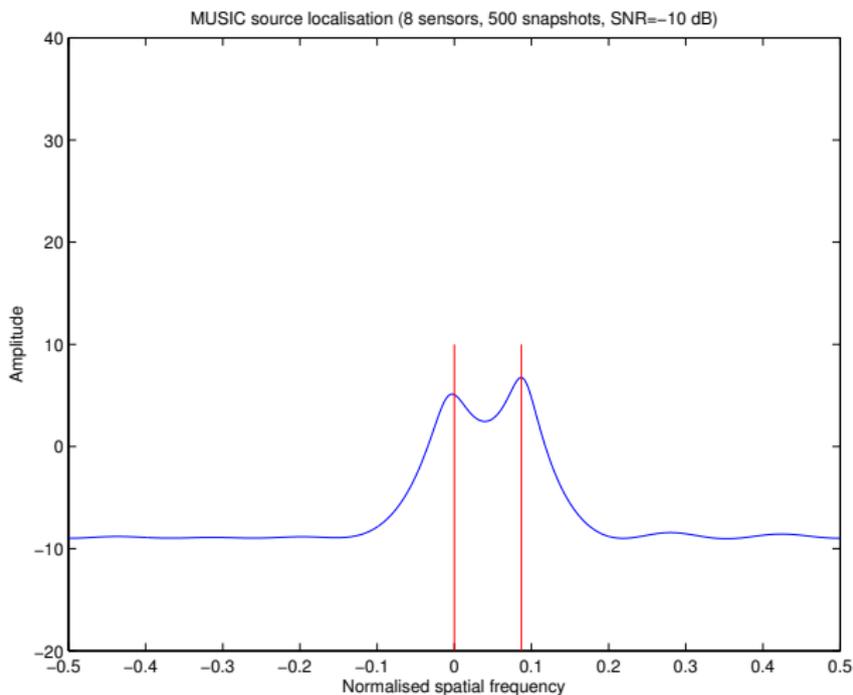
Méthode MUSIC, deux sources, SNR=0 dB



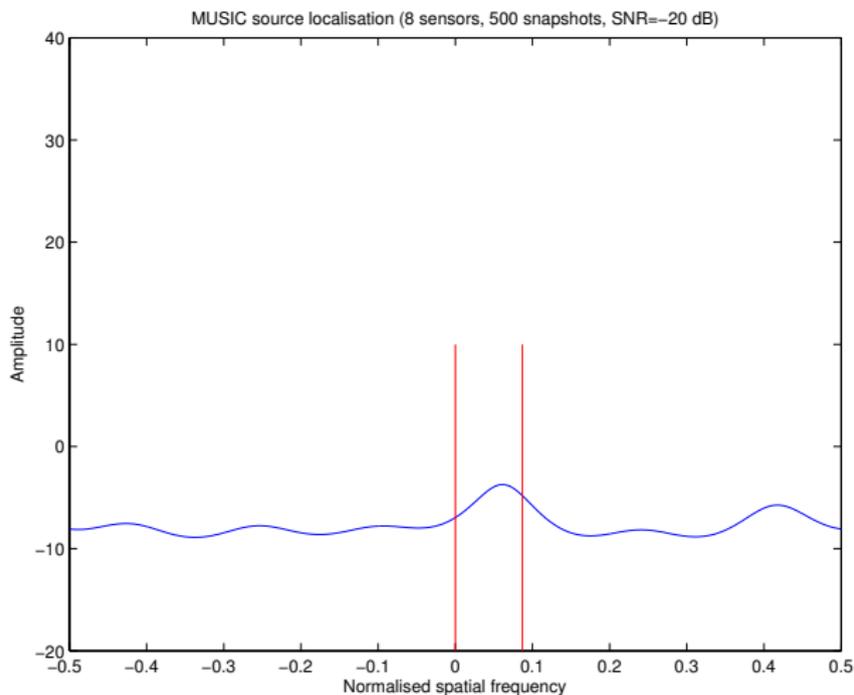
Méthode de Capon, deux sources, SNR=-10 dB



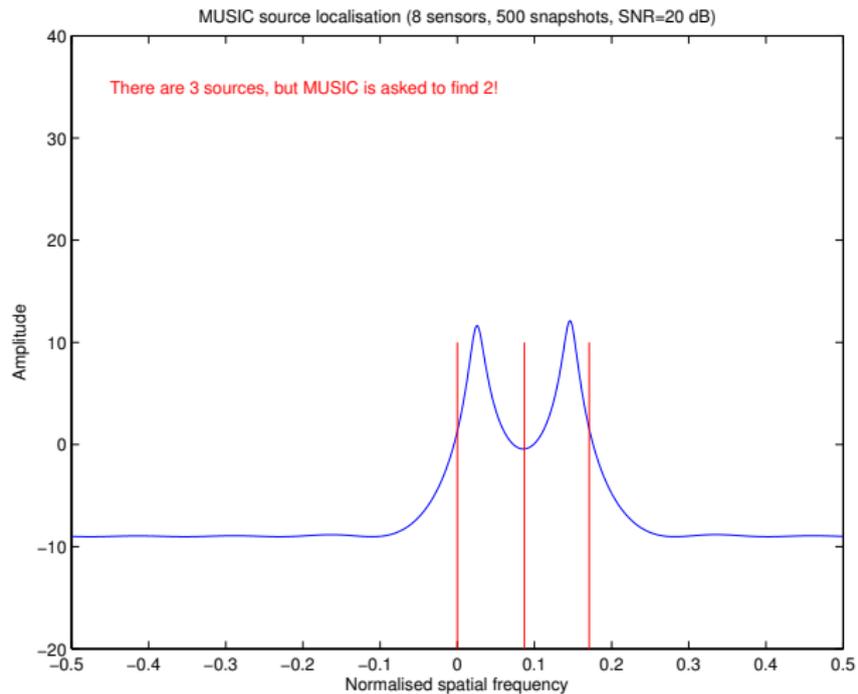
Méthode MUSIC, deux sources, SNR=-10 dB



Méthode MUSIC, deux sources, SNR=-20 dB



Méthode MUSIC, deux ou trois sources ?



Merci pour votre attention

Des questions ?